

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ROBERT PALLU DE LA BARRIÈRE

## L'existence de sous-espaces stables

*Séminaire N. Bourbaki*, 1954, exp. n° 85, p. 327-334

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1951-1954\\_\\_2\\_\\_327\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__327_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'EXISTENCE DE SOUS-ESPACES STABLES, D'APRÈS WERMER

par Robert PALLU de LA BARRIÈRE

1. Orientation.

Le principal résultat de WERMER est le suivant :

THÉORÈME 1. - Soit  $A$  un opérateur continu sur un espace de Banach  $E$ ,  $A$  étant inversible (c'est-à-dire possédant un inverse borné) et tel que la suite  $\{\|A^n\|\}_{n \in \mathbb{Z}}$  soit à croissance lente. Il existe des sous-espaces (fermés non triviaux (c'est-à-dire  $\neq 0$  et  $\neq E$ ) stables par  $A$ .

WERMER déduit ce résultat d'un résultat plus fin où les conditions imposées sur la suite  $\{\|A^n\|\}$  sont moins restrictives. Cependant nous ferons un exposé direct du cas où  $\{\|A^n\|\}$  est à croissance lente, étant donnée la lumière jetée dans ce cas par la transformation de Fourier  $F$ .

REMARQUES générales. - Soient  $E$  un Banach et  $L(E, E)$  l'algèbre des endomorphismes continus de  $E$ . A tout opérateur  $A \in L(E, E)$ , inversible, correspond une représentation  $n \rightarrow A^n$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $L(E, E)$ . La recherche de sous-espace stables par  $A$  revient au problème de la réductibilité de la représentation  $n \rightarrow A^n$ . Soit alors  $X$  un groupe élémentaire (c'est-à-dire de la forme  $R^e \times Z^m \times T^h \times D$ ,  $D$  étant un groupe fini). Une représentation  $x \rightarrow A(x)$  de  $X$  sera dite à croissance lente si elle est continue pour la topologie de la convergence simple forte et si  $\|A(x)\|$  est à croissance lente pour  $x \rightarrow \infty$ . Le théorème 1 est alors un cas particulier du suivant (L. SCHWARTZ).

THÉORÈME 2. - Toute représentation irréductible à croissance lente d'un groupe élémentaire  $X$  est de dimension 1.

2. Démonstration du théorème 2.

A. PROPOSITION. - A toute représentation  $x \rightarrow A(x)$  à croissance lente correspond une représentation  $\varphi \rightarrow A(\varphi)$  de  $(S)_x$  algèbre des fonctions numériques indéfiniment dérivables à décroissance rapide munies du produit de composition.

DÉMONSTRATION. -

a. Existence de  $A(\varphi)$ . - Pour tout  $e \in E$  poser  $A(\varphi)e = \int A(x)e \varphi(x) dx$ ,

b. Continuité de  $A(\varphi)$ . - On a

$$\|A(\varphi)e\| \leq \|e\| \int \|A(x)\| |\varphi(x)| dx \quad \text{d'où}$$

$$\|A(\varphi)\| \leq \int \|A(x)\| |\varphi(x)| dx .$$

c. Continuité de  $\varphi \rightarrow A(\varphi)$ . - Si  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $A(\varphi) \rightarrow 0$  dans  $L(E, E)$  muni de la topologie uniforme.

d.  $A(\varphi * \Psi) = A(\varphi) A(\Psi)$ , car

$$A(\varphi * \Psi) = \int A(x) (\varphi * \Psi)(x) dx =$$

$$= \iint A(x + x') \varphi(x) \Psi(x') dx dx' = \int A(x) A(x') \varphi(x) \Psi(x') dx dx' =$$

$$= \int A(x) \varphi(x) dx \int A(x') \Psi(x') dx' = A(\varphi) A(\Psi) .$$

REMARQUE. - On a également  $A(\tau_h \varphi) = A(h) A(\varphi) = A(\varphi) A(h)$  si  $\tau_h$  est la translation d'amplitude  $h$ .

B. - Soit  $y$  le groupe dual de  $X$ . Munissons  $(S)_y$  du produit usuel. L'application  $u \rightarrow A(\hat{F}^{-1} \bar{u}) = B(u)$  est une représentation de  $(S)_y$  dans  $L(E, E)$  c'est-à-dire que  $B(uv) = B(u) B(v)$ .

On peut considérer les applications  $\varphi \rightarrow A(\varphi)$  et  $u \rightarrow B(u)$  comme des distributions  $A$  et  $B$  sur  $X$  et sur  $Y$  à valeurs dans  $L(E, E)$  ( $A \in (S')_x^{L(E, E)}$ ,  $B \in (S')_y^{L(E, E)}$ ).  $B$  n'est autre que la transformée de Fourier de  $A$ . Le support  $\sum_y$  de  $B$  sera appelé spectre de la représentation.

A tout  $e \in E$  correspond une distribution  $B_e \in (S')_y^E$  définie par  $B_e(v) = B(v)e$ . L'application  $e \rightarrow B_e$  est continue, car si  $v$  décrit un borné de  $(S)_y$ ,  $B(v)$  décrit un borné de  $L(E, E)$ , et si de plus  $e \rightarrow 0$ , alors  $B_e(v) = B(v)e \rightarrow 0$ .

A tout couple  $e \in E, e' \in E'$  correspond une distribution usuelle  $B_{e,e'}$  définie par  $B_{e,e'}(v) = \langle B(v)e, e' \rangle = F \langle A(x)e, e' \rangle$ ;  $\sum$  n'est autre que l'adhérence de la réunion des supports des  $B_e$  ou des  $B_{e,e'}$ , le support de  $B_e$  étant par ailleurs l'adhérence de la réunion des supports des  $B_{e,e'}$  quand  $e'$  parcourt  $E'$ .

### C. Construction de sous-espaces stables.

1re méthode. - Soit  $e \in E$ ; le sous-espace fermé  $\mathcal{M}_e$  engendré par les  $A(x)e$  est stable par les  $A(x)$  et les  $A(\varphi)$ .

2e méthode. - Soit  $\sigma$  fermé  $\subset \Sigma$ . Le sous-espace  $\mathcal{N}_\sigma$  des  $e \in E$ , tels que  $B_e$  ait son support contenu dans  $\sigma$ , est fermé et stable par tout opérateur permutant aux  $A(\varphi)$  en particulier par les  $A(x)$  et les  $A(\varphi)$ . En effet l'ensemble des distributions de  $(S)_y^{L(E,E)}$  ayant leur support dans  $\sigma$  est fermé, et  $e \rightarrow B_e$  est continue, donc  $\mathcal{N}_\sigma$  est fermé.  $\mathcal{N}_\sigma$  est stable, car soit  $T \in L(E, E)$  permutant aux  $A(x)$ . Il faut montrer que  $B_e(u) = 0$  entraîne  $B_{Te}(u) = 0$ . Or ceci découle de

$$B_{Te}(u) = B(u)(Te) = TB(u)e = TB_e(u).$$

3e méthode. - Soit  $\Delta_v$  le noyau de  $B(v)$ .  $\Delta_v$  est un sous-espace fermé et stable par tout  $T \in L(E, E)$  permutant aux  $A(\varphi)$ .

REMARQUES.

- 1° Si  $\sigma$  est le support de  $B_e$ , on a  $\mathcal{M}_e \subset \mathcal{N}_\sigma$
- 2°  $\Delta_v$  est l'ensemble des  $e$  tels que  $vB_e = 0$ . Si  $\sigma$  est l'ensemble des  $y \in \Sigma$  tels que  $v(y) = 0$ , on a  $\Delta_e \subset \mathcal{N}_\sigma$

D. Sous-espaces stables non triviaux

a. Cas où  $\Sigma$  ne se réduit pas à un point. - Soit  $u, v \in (S)_y$  tels que  $uv = 0$ ,  $u$  et  $v$  n'étant pas identiques à 0 sur  $\Sigma$ . On a  $B(u)B(v) = B(v)B(u) = 0$ ,  $uB \neq 0$ ,  $vB \neq 0$  et par suite  $B(u) \neq 0$  et  $B(v) \neq 0$  (car  $uB(w) = B(u)B(w)$ ).  $\Delta_u$  et  $\Delta_v$  sont des sous-espaces stables non triviaux, ainsi que  $\mathcal{N}_\sigma$ , si  $\sigma$  est l'intersection de  $\Sigma$  et du support de  $u$  (ou de  $v$ ) ou encore  $\mathcal{M}_e$  avec  $e = B(u)e_0$ ,  $e_0 \notin \Delta_u$ .

b. Cas où  $\Sigma$  se réduit à un point. - Si  $\Sigma = \{0\}$ , la distribution  $A$  est un polynôme en  $x$  à coefficients dans  $L(E, E)$ , soit  $A(x) = \sum_{p=0}^p K_p \frac{x^p}{p!}$ .

La relation  $A(x + x') = A(x)A(x')$  entraîne  $K_p K_q = K_{p+q}$ , d'où  $K_0 = 1$  et  $K_p = (K_1)^p$ . Ou bien  $K_1 = 0$ , ou bien le noyau de  $K_1$  est non trivial.

Si  $\Sigma = \{a\}$ , on se ramène au cas précédent en posant  $A_1(x) = e^{-iax} A(x)$  et l'on voit que si la représentation est irréductible on a  $A(x) = e^{iax} \cdot I$ , ce qui suppose  $E$  de dimension 1.

3. Cas où  $X = R$ .

A la représentation  $x \rightarrow A(x)$  sont associées deux représentations de  $R_+$  et de  $R_-$  dites semi-groupes positif et négatif. Soit

$$R_1(\lambda) = \int_0^\infty A(x) e^{-\lambda x} dx \quad \text{et} \quad R_2(\lambda) = - \int_{-\infty}^0 A(x) e^{-\lambda x} dx.$$

$R_1(\lambda)$  et  $R_2(\lambda)$  sont les transformées de Laplace des semi-groupes positif et négatif, définies et holomorphes respectivement dans  $\Re(\lambda) > 0$  et  $\Re(\lambda) < 0$ . Soit  $K$  le générateur infinitésimal de la représentation. On a  $R_1(\lambda) = (\lambda - K)^{-1}$  pour  $\Re(\lambda) > 0$  et  $R_2(\lambda) = (\lambda - K)^{-1}$  pour  $\Re(\lambda) < 0$ . Le spectre  $\Sigma_1$  de  $K$  est donc sur l'axe imaginaire et peut être ainsi défini : un point  $\lambda_0 = 0 + i\eta \in \Gamma \Sigma_1$ , si  $\lambda_0$  est centre d'un cercle  $\gamma$  tel que  $R_1(\lambda)$  et  $R_2(\lambda)$  soient dans  $\gamma$  en prolongement analytique de part et d'autre de l'axe imaginaire.

Ces considérations rappellent celles de Carleman en ce qui concerne la définition du spectre d'une fonction. On peut exprimer ainsi l'idée de Carleman. Soit  $T \in (\mathcal{D}')_x$ . Posons  $T = T_1 - T_2$ ,  $T_1$  ayant son support sur  $R_+$  et  $T_2$  son support sur  $R_-$  ( $T_1$  et  $T_2$  sont définies à une distribution de support 0 près). Supposons que  $T_1$  ait sa transformée de Laplace

$$f_1(\lambda) = f_1(\xi + i\eta) = F(T_1 e^{-\xi x})$$

définie dans  $\Re(\lambda) > 0$  et  $T_2$  sa transformée de Laplace

$$f_2(\lambda) = f_2(\xi + i\eta) = F(T_2 e^{-\xi x})$$

définie dans  $\Re(\lambda) < 0$ , auquel cas nous dirons que  $T$  est à croissance presque lente (ce qui sera réalisé en particulier pour  $T \in (S')_x$ ). Identifions l'axe imaginaire du plan des  $\lambda$  avec le dual de  $R$ . Le spectre  $\sigma_T$  de  $T$  est défini de la façon suivante :  $\eta \in \Gamma \sigma_T$  si  $0 + i\eta$  est centre d'un cercle  $\gamma$  tel que  $f_1(\lambda)$  et  $f_2(\lambda)$  soient dans  $\gamma$  en prolongement analytique de part et d'autre de l'axe imaginaire.  $\sigma_T$  est visiblement fermé.

Si  $T \in (S')_x$ , on a

$$F(T) = F(T_1) - F(T_2) = \lim_{\xi \rightarrow 0} [f_1(\xi + i\eta) - f_2(-\xi + i\eta)]$$

le crochet étant considéré comme une distribution en  $\eta$  dépendant du paramètre  $\xi$ . Par suite si  $\eta \in \Gamma \sigma_T$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $\eta$  tel que  $F(T) = 0$  sur  $V$ , et  $\eta$  n'appartient pas au support de  $F(T)$ . On peut montrer la réciproque. Donc si  $T \in (S')_x$ , le spectre de  $T$  coïncide avec le support de  $F(T)$ .

Ces considérations se généralisent à des distributions à valeurs vectorielles.

Nous voyons donc que pour une représentation à croissance presque lente (c'est-à-dire telle que la distribution  $A(x)$  soit à croissance presque lente), le spectre au sens de Carleman de la distribution  $A(x)$  coïncide avec le spectre du générateur infinitésimal  $K$  de la représentation et si  $A(x)$  est à croissance

lente avec le spectre de la représentation.

On peut donner des définitions analogues pour  $T \in (\mathcal{D}')_{\mathbb{Z}}$ ,  $T = \{t_n\}$ . La transformée de Laplace sera

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{t_n}{\lambda^n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} t_n e^{-in\theta} / \rho^n = F\{t_n / \rho^n\}$$

fonction holomorphe de  $\lambda = \rho e^{i\theta}$  à l'intérieur de la couronne déterminée par les  $\rho$  tels que  $T/\rho^n \in (S')_{\mathbb{Z}}$ .  $T$  sera dite à croissance presque lente si  $T_1 = \{t_n\}_{n > 0}$  et  $T_2 = \{t_n\}_{n \leq 0}$  ont leurs transformées de Laplace

$$f_1^T(\lambda) = F(T_1/\rho^n) = \sum_1^{\infty} \frac{t_n}{\lambda^n}$$

et

$$f_2^T(\lambda) = F(T_2/\rho^n) = \sum_{-\infty}^0 \frac{t_n}{\lambda^n} = \sum_0^{+\infty} t_{-n} \lambda^n$$

respectivement définies dans  $|\lambda| > .1$  et  $|\lambda| < 1$ . Le spectre  $\sigma_T$  de  $T$  est ainsi défini :  $\theta \in \int \sigma_T$  si  $e^{i\theta}$  est centre d'un cercle  $\gamma$  tel que  $f_1^T(\lambda)$  et  $f_2^T(\lambda)$  soient dans  $\gamma$  en prolongement analytique de part et d'autre de  $|\lambda| = 1$ . On a alors : dans le cas d'une représentation à croissance presque lente  $n \rightarrow A^n$  (c'est-à-dire telle que  $\{ \|A^n\| \}$  soit à croissance presque lente) le spectre au sens de Carleman de la distribution  $\{A^n\}$  coïncide avec le spectre du générateur  $A$  de la représentation et si  $n \rightarrow A^n$  est à croissance lente avec le spectre de la représentation.

#### 4. Sous-espaces invariants par une représentation à croissance presque lente.

Une suite  $\{\rho_n\}$ ,  $\rho_n \geq 0$  sera dite satisfaisante à la condition (A) s'il existe une suite  $\{d_n\}$ ,  $d_n \geq 0$  telle que

a.  $\rho_n \leq d_n$  pour tout  $n$ .

b.  $d_{-n} = d_n$

c.  $d_n \geq 1$

d.  $\sum_0^{\infty} \log d_n / n^2 + 1 < \infty$

e.  $d_n$  est non décroissante pour  $|n|$  croissant

f.  $\log d_n / n$  décroît quand  $|n|$  croît

La condition (A) est vérifiée en particulier si  $\rho_n = 0$  ( $\exp(|n|^\alpha)$ ) avec  $0 < \alpha < 1$ .

On a alors le résultat suivant :

THÉOREME 3. - Soit  $A$  un opérateur inversible tel que la suite  $\|A^n\|$  vérifie (A),  $\Sigma$  le spectre de  $A$  (sur le cercle unité),  $\sigma$  un ensemble fermé  $\subset \Sigma$ . L'ensemble  $\mathcal{N}_\sigma$  des  $e \in E$  tels que le spectre (au sens de Carleman) de la suite  $A^n e$  soit contenu dans  $\sigma$  est un sous-espace fermé invariant par les  $A^n$ . Si  $\Sigma$  n'est pas réduit à un point, il existe des  $\mathcal{N}_\sigma$  non triviaux.

Pour la démonstration de ce théorème (lemmes 1 à 5) WERMER associe à toute suite  $\{\rho_n\}$  vérifiant (A) l'espace de Banach  $L$  des suites  $H = \{h_n\}$  telles que  $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h_n| \rho_n < \infty$  et son dual  $L'$  espace des suites  $X = \{x_n\}$  telles que  $\sup |x_n| / \rho_n < \infty$ . Si  $X \in L'$ ,  $X$  est à croissance presque lente.  $L$  est une algèbre pour le produit de composition et le produit de composition d'un élément de  $L$  par un élément de  $L'$  est défini et est dans  $L'$ .

LEMME 1. - Soit  $\Lambda$  un ensemble fermé du cercle unité. L'ensemble  $E_\Lambda$  des  $X \in L'$  dont le spectre  $\sigma(X)$  est dans  $\Lambda$  est un sous-espace faiblement fermé de  $L'$ .

DÉMONSTRATION. - Soient  $X^p = \{x_n^p\} \rightarrow X$  avec  $\sigma(X^p) \subset \Lambda$ ,  $X^p \rightarrow X$  (faiblement),  $\lambda_0 \in \Lambda$ ,  $\gamma$  un cercle de centre  $\lambda_0$  tel que  $f_1^{X^p}$  et  $f_2^{X^p}$  soient en prolongement analytique dans  $\gamma$ ,  $f^{(p)}$  holomorphe dans  $\gamma$  et prolongeant  $f_1^{X^p}$  et  $f_2^{X^p}$ . On montre d'abord que les  $f^{(p)}$  sont uniformément bornés dans  $\gamma$  (démonstration très technique où interviennent les différentes parties de (A)). Soit alors dans un voisinage de  $\lambda_0$ ,  $f(\lambda)$  la limite d'une suite partielle de  $f^{(p)}$ . Pour tout  $n$  on a  $\lim_{p \rightarrow \infty} x_n^p = x_n$ . Par suite  $|x_n^p| \leq \|X^p\| \rho_n \leq \rho_n$  et pour  $|\lambda| > 1$

$$f^{(p)}(\lambda) \rightarrow \sum_1^\infty x_n / \lambda^n = f_1^X(\lambda).$$

De même pour  $|\lambda| < 1$ ,

$$f^{(p)}(\lambda) \rightarrow f_2^X(\lambda)$$

d'où la conclusion.

LEMME 2. - Soit  $S$  un ensemble fermé du cercle unité, et  $z \in \partial S$ . Il existe  $H \in L$ , avec  $FH = 0$  sur  $S$  et  $FH(z) \neq 0$ .

DÉMONSTRATION. - Soit  $X_\lambda = \{\lambda^n\}$  pour  $|\lambda| = 1$ . On a  $\sigma(X_\lambda) = \{\lambda\}$  et  $FH(\lambda) = \langle H, X_\lambda \rangle$ . Il suffit de prendre  $H$  orthogonal à  $E_\Lambda$  et tel que  $\langle H, X_{\lambda_0} \rangle \neq 0$ .

LEMME 3. - Soit  $X_0 \in L'$  et  $S$  l'ensemble sur lequel s'annulent toutes les FH pour  $H * X_0 = 0$ ,  $S_1$  un voisinage fermé de  $S$ . Si  $FH = 0$  sur  $S_1$ , on a  $H * X_0 = 0$ .

DÉMONSTRATION. - Sinon soit  $\lambda$  un point du cercle unité qui considéré comme caractère de  $L$  annule l'idéal fermé  $I$  des  $K$  tels que  $K * (H * X_0) = 0$ .

On vérifie que  $\lambda \in S$ . Soit alors  $H_1 \in L$  avec  $FH_1(\lambda) \neq 0$  et  $FH_1 = 0$  sur  $\bar{S}_1$ . On a  $H_1 * H = 0$ , d'où  $H_1 \in I$  et contradiction.

COROLLAIRE. - Soit  $H \in L$ . Si  $H * X_0 = 0$ ,  $FH = 0$  sur  $\sigma(X_0)$ .

DÉMONSTRATION. - Il suffit de montrer que  $X_0 \in E_{S_1}$ . Sinon soit  $H \in L$  avec  $\langle H, X_0 \rangle \neq 0$ ,  $\langle H, X \rangle = 0$  pour  $X \in E_{S_1}$  d'où  $FH(\lambda) = 0$  sur  $S_1$  et  $H * X_0 = 0$  et enfin la contradiction  $\langle H, X_0 \rangle = 0$ .

A partir de maintenant  $\rho_n = |||T^n|||$ .

LEMME 4. -  $\mathcal{N}_\sigma$  est un sous-espace fermé invariant par tout  $T \in L(E, E)$  permutant aux  $A^n$ .

DÉMONSTRATION. -  $\mathcal{N}_\sigma$  est fermé d'après le lemme 1 et la continuité des applications  $e \rightarrow \langle A^n e, e' \rangle$  de  $E$  dans  $L'$ .  $\mathcal{N}_\sigma$  est invariant par  $T$  d'après  $\langle A^n T e, e' \rangle = \langle A^n e, T^* e' \rangle$ .

LEMME 5. - Si  $\sum n$  n'est pas réduit à un point, il existe des sous-espaces stables non triviaux.

DÉMONSTRATION. - Il existe  $H, K \in L$  tels que  $H * K = 0$ ,  $FH$  et  $FK$  n'étant pas identiques à zéro sur  $\sum$ . Soit  $A(H) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n A^n$ , on a  $A(H) \neq 0$  sinon  $H * \{A^n\} = 0$  et  $FH$  serait nulle sur le spectre  $\sum$  de  $A^n$ . De même  $A(K) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n A^n \neq 0$  et  $A(H) A(K) = A(H * K) = 0$ . Les noyaux de  $A(H)$  et  $A(K)$  sont des sous-espaces stables non triviaux ainsi que  $\mathcal{N}_\sigma$ ,  $\sigma$  étant l'intersection de  $\sum$  et du support de  $u$ .

REMARQUE. - Le théorème 1 se déduit chez WERMER du théorème 3 grâce à un théorème de Gelfand et Hille : Si  $A$  est inversible, la suite  $|||A^n|||$  à croissance lente et le spectre de  $A$  réduit à un point  $p$ ,  $A - p$  est nilpotent.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARLEMAN (T.). - Sur l'application de la théorie des fonctions analytiques dans la théorie des transformées de Fourier, Colloque d'Analyse harmonique [Nancy 1947]. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1949 (Coll. intern. du C.N.R.S., n° 15) ; p. 45-53.
- [2] WERMER (John). - The existence of invariant subspaces, Duke math. J., t. 19, 1952, p. 615-622.

Signalons également :

ARONSAJN (N.) and SMITH (K.T.). - Invariant subspaces of completely continuous operators. - Lawrence, University of Kansas, 1953 (Studies in eigenvalue problem, Technical report n° 9)

où est démontrée l'existence de sous-espaces stables non triviaux par un opérateur complètement continu dans un Banach (résultat généralisé par DIXMIER à un espace vectoriel topologique localement convexe quelconque).

---