PIERRE SAMUEL

Les fonctions holomorphes abstraites de Zariski

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 86, p. 335-343
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__335_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1953)

LES FONCTIONS HOLOMORPHES ABSTRAITES DE ZARISKI

par Pierre SAMUEL

1. Introduction.

Un <u>cycle</u> (de dimension r) est une combinaison linéaire formelle à coefficients entiers de variétés algébriques de dimension r de l'espace projectif P_n (sur un "domaine universel" de caractéristique quelconque) ; il est dit <u>positif</u> si ses coefficients sont positifs. La réunion des variétés figurant dans l'expression (réduite) d'un cycle $\mathfrak{X}$ s'appelle le <u>support</u> de X. Nous préciserons plus loin la notion de système algébrique de cycles. Dans le cas classique, on a le résultat suivant (remarqué par ENRIQUES) :

<u>Principe de dégénérescence</u>. <u>Si le support du cycle générique d'un système irréductible</u> (S) <u>de cycles positifs est irréductible</u> (c'est-à-dire est une <u>variété</u>) <u>alors le support de tout</u> $X \in (S)$ <u>est connexe</u>.

EXEMPLE. - Dégénérescence d'une cubique gauche. Démonstration simple par voie topologique.

Le principe de dégénérescence conserve un sens sur un domaine universel de caractéristique quelconque ; par définition l'on dira qu'un ensemble algébrique (c'est-à-dire une réunion finie de variétés) est <u>connexe</u> s'il n'est pas réunion de deux sous-ensembles algébriques propres et disjoints ; ceci est la connexion pour la "topologie de Zariski" où les fermés sont les ensembles algébriques ; dans le cas classique, et pour les ensembles algébriques, elle coincide avec la connexion ordinaire (une variété étant connexe au sens ordinaire). Le but principal de ZARISKI était de montrer que ce principe reste vrai dans le cas abstrait. Sa méthode: trouver un critère algébrique de connexion maniable (le critère à fleur de peau "l'anneau de coordonnées n'est pas un composé direct" ne l'étant pas assez).

Pour trouver un tel <u>critère de connexion</u> l'on s'inspire du cas classique. Etant donné un sous-ensemble algébrique W d'une variété V, on dit que V est <u>analytiquement irréductible</u> le long de W si l'anneau $\bar{\mathfrak{o}}_W$ des fonctions holomorphes au voisinage de W est d'intégrité. Alors :

<u>Critère de connexion</u>. <u>Supposons</u> V <u>analytiquement irréductible en chaque point de</u> W . <u>Pour que</u> W <u>soit connexe</u>, <u>il faut et il suffit que</u> V <u>soit analytiquement irréductible le long de</u> W .

Dans le cas classique, le "il suffit" est facile (fonction 0 sur une composante connexe de W, 1 sur les autres), et le "il faut" résulte du prolongement analytique à travers les points reliant les composantes irréductibles de W. Dans le cas dit "abstrait", il va d'abord s'agir de définir l'anneau $\bar{\mathfrak{o}}_W$, puis de démontrer le critère de connexion.

2. Définition des fonctions holomorphes abstraites. Le critère de connexion.

Etant donnée une variété V et un sous-ensemble G de V, une fonction f holomorphe au voisinage de G assigne à tout point P de G un "élément de fonction holomorphe" $f((P))$ (c'est-à-dire une série de Taylor si P est simple sur V), et ces éléments $f((P))$ doivent "se prolonger les uns les autres" ; une propriété équivalente à celle-ci est, grosso modo, le fait que f peut être uniformément approchée (dans un voisinage convenable) par des polynômes sur V (ou des fonctions rationnelles sur V holomorphes dans ce voisinage). Dans le cas abstrait la seule notion d'approximation qui soit à notre disposition est celle d'ordre de contact. D'où :

DÉFINITION des fonctions holomorphes. - Soient V une variété (affine ou projective) définie sur un corps k, G un sous-ensemble de V. Pour tout $P \in G$, notons $\mathfrak{o}_P$ l'anneau local de P sur V (relatif à k) et $\mathfrak{m}_P$ son idéal maximal ; posons $\mathfrak{o}_G = \bigcap_P \mathfrak{o}_P$. Munissons le produit $\bar{\mathfrak{O}}_G = \prod_{P \in G} \bar{\mathfrak{o}}_P$ des complétés $\bar{\mathfrak{o}}_P$ des $\mathfrak{o}_P$ de la topologie "uniforme" où les $\prod \bar{\mathfrak{m}}_P^n$ forment un système fondamental de voisinages de 0. Alors l'adhérence de la diagonale de $\prod_{P \in G} \mathfrak{o}_G$ dans ce produit est un anneau, appelé l'anneau des fonctions fortement holomorphes le long de G.

Etant donnée une partie G' de G, notons $R_{G',G}$ la projection de $\bar{\mathfrak{O}}_G$ sur $\bar{\mathfrak{O}}_{G'}$. On dit qu'un élément $x \in \bar{\mathfrak{O}}_G$ est une fonction holomorphe le long de G s'il existe un recouvrement ouvert fini de G (pour la topologie de Zariski où les fermés sont les ensembles normalement algébriques sur k), soit (G_i), tel que, pour tout i, $R_{G_i,G}(x)$ soit une fonction fortement holomorphe le long de G_i. Les fonctions holomorphes le long de G forment un anneau, noté $\bar{\mathfrak{o}}_G$ (existence d'un raffinement commun à deux recouvrements). Il est clair que $R_{G',G}(\bar{\mathfrak{o}}_G) \subset \mathfrak{o}_{G'}$ si $G' \subset G$. Pour un point P, $\bar{\mathfrak{o}}_P$ est l'anneau local complété de $\mathfrak{o}_P$. Pour $x \in \bar{\mathfrak{o}}_G$ et $P \in G$, on note $x((P))$ l'élément analytique $R_{P,G}(x)$.

Dans ces conditions on notera que, si P et P' sont des points k-isomorphes de G (par exemple deux points génériques de V sur k), les anneaux locaux

$\mathfrak{o}_P$ et $\mathfrak{o}_{P'}$ sont identiques, et l'on a $x((P)) = x((P'))$ (puisque tout $x \in \mathfrak{O}_G$ a cette propriété).

REMARQUE. - Si W est une sous-variété de V contenant G, la trace sur W d'une fonction holomorphe le long de G (par rapport à V) est une fonction holomorphe le long de G (par rapport à W). En particulier, si $G = W$ est une variété projective, une telle trace est <u>constante</u> sur W. Mais une fonction holomorphe le long de W n'est pas nécessairement une constante (par rapport à V) ; bien plus, une fonction rationnelle sur V non constante peut être holomorphe le long de W (c'est-à-dire appartenir à $\mathfrak{O}_W$). Exemple trivial : V est un produit, W une verticale, et la fonction ne dépend que de la 1re variable. Exemple moins trivial et plus général : il existe une transformation rationnelle T de V sur une variété V', régulière en tout point de W, telle que $T(W)$ soit un point P' et que $T^{-1}(P') = W$ (W est alors dite "<u>exceptionnelle</u>" ; l'étude des courbes exceptionnelles sur une surface est d'importance en géométrie algébrique classique) ; on a alors $\mathfrak{o}_W = \mathfrak{o}_{P'}$. Un <u>lemme</u> sur les topologies $\mathfrak{m}$-adiques.

Soient R un anneau (commutatif et noethérien) et $\mathfrak{m}$ un idéal premier de R. Nous avons sur R la topologie <u>$\mathfrak{m}$-adique</u> (définie par les $\mathfrak{m}^n$), et la topologie induite par celle de l'anneau local $R_{\mathfrak{m}}$ (elle est définie par les puissances symboliques $\mathfrak{m}^{(n)}$; on l'appellera "<u>$\mathfrak{m}$-induite</u>" ; elle est moins fine que la $\mathfrak{m}$-adique). Soit alors $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R contenant $\mathfrak{m}$. La topologie $\mathfrak{m}$-adique est plus fine que la $\mathfrak{p}$-adique (triviale). De plus, si R est "analytiquement irréductible en $\mathfrak{p}$" (c'est-à-dire si $(\hat{R}_{\mathfrak{p}})$ est un anneau d'intégrité), la topologie <u>$\mathfrak{m}$-induite est plus fine que la topologie $\mathfrak{p}$-induite</u> (on utilise le fait que $(\hat{R}_{\mathfrak{p}})$ est linéairement compact). On en déduit que, lorsque R est analytiquement irréductible en tout diviseur premier propre de $\mathfrak{p}$, les topologies $\mathfrak{p}$-adique et $\mathfrak{p}$-induite sont <u>identiques</u> (il suffit de montrer que $\mathfrak{p}^n$ est ouvert pour la topologie $\mathfrak{p}$-induite ; on en fait la décomposition primaire, et l'on remarque que tout idéal primaire pour un diviseur premier propre de $\mathfrak{p}$ est ouvert pour la topologie $\mathfrak{p}$-induite d'après la première assertion).

<u>Le principe de prolongement analytique</u>.

Soient P et P' deux points de V tels que P' soit spécialisation de P sur k, et soit x une fonction fortement holomorphe le long de (P, P'). Si $x((P')) = 0$ on a $x((P)) = 0$. Si $x((P)) = 0$ et si V est analytiquement irréductible en P', on a $x((P')) = 0$.

DÉMONSTRATION. - Par hypothèse on a $\mathfrak{O}_{P'} \subset \mathfrak{O}_P$; posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_P \cap \mathfrak{O}_{P'}$ on a $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_{P'}$. Par définition x est un élément de l'adhérence de la diagonale D de $\mathfrak{O}_{P'} \times \mathfrak{O}_{P'}$ dans le produit des complétés de $\mathfrak{O}_{P'}$ et de $\mathfrak{O}_P$, autrement dit dans le produit des complétés $\mathfrak{m}_{P'}$-adique et $\mathfrak{p}$-induit de $\mathfrak{O}_{P'}$. Or l'application canonique de D sur $\mathfrak{O}_{P'}$ ($\mathfrak{m}_{P'}$-adique) applique les voisinages fondamentaux de 0 sur des idéaux fermés de $\mathfrak{O}_{P'}$; donc son prolongement aux complétés est biunivoque (cf. espaces vectoriels topologiques), ce qui démontre la première assertion. Pour la seconde on remarque que la topologie $\mathfrak{p}$-induite est plus fine que la $\mathfrak{m}_{P'}$-adique (lemme) ; donc D (qui a la topologie borne supérieure) est isomorphe au second facteur.

C.Q.F.D.

<u>Le critère de connexion.</u> <u>Soit</u> W <u>un sous-ensemble algébrique de la variété</u> V <u>tel que</u> V <u>soit abalytiquement irréductible en chaque point de</u> W. <u>Pour que</u> W <u>soit connexe, il faut et il suffit que</u> V <u>soit analytiquement irréductible le long de</u> W (c'est-à-dire que $\bar{\mathfrak{O}}_W$ soit intègre).

La démonstration est inspirée par celle du cas classique. Pour le "il suffit", on remarque que la fonction définie par $x((P)) = 0$ pour P sur une composante connexe de W et par $x((P)) = 1$ ailleurs sur W, est fortement holomorphe le long de W. Réciproquement soit x un diviseur de zéro dans $\bar{\mathfrak{O}}_W$ (W étant connexe) ; on a $x((P)) = 0$ pour certain $P \in W$ (x est élément d'un produit d'anneaux d'intégrité) ; d'autre part x est fortement holomorphe sur chacun des ensembles $(W - U_i)$ d'un recouvrement ouvert de W (U_i : sous-ensembles algébriques propres) ; alors un point générique $\bar{P}$ de la composante irréductible W_1 de W contenant P est dans chaque $W - U_i$; de $x((P)) = 0$, on déduit donc $x((\bar{P})) = 0$ (première assertion du principe de prolongement analytique) ; d'où $x((P')) = 0$ pour tout $P' \in W_1$ (seconde assertion). On passe de là aux autres composantes irréductibles de W au moyen des "points de connexion".

<u>Quelques résultats complémentaires.</u>

1° Dans le cas affine l'anneau des fonctions fortement holomorphes le long d'un sous-ensemble algébrique W de V s'identifie canoniquement au complété $\mathfrak{m}$-adique de l'anneau de coordonnées affines R de V ($\mathfrak{m}$ désignant l'idéal correspondant à W).

2° Dans le cas affine toute fonction holomorphe le long d'un sous-ensemble algébrique W est fortement holomorphe. Les résultats 1° et 2° "tuent" la théorie dans le cas affine ; le cas projectif est beaucoup moins bien connu, et est plein de problèmes non résolus.

3° Dans le cas projectif, étant donnée une fonction x holomorphe le long de G, il existe une transformée birationnelle birégulière V' de V telle que la fonction holomorphe x' transformée de x soit fortement holomorphe le long de chaque $G' - E'_i$ (G' : transformé de G ; E'_i sections hyperplanes indépendantes de V').

4° Dans la définition des fonctions holomorphes le long d'un sous-ensemble algébrique W de V nous avons fait intervenir aussi bien les points transcendants (sur k) de W que ses points algébriques ; et les premiers nous ont été d'une grande utilité technique (sous la forme de points génériques). On peut cependant se borner à considérer l'ensemble W_o des points algébriques de W, et l'on se tient ainsi plus près de la théorie classique : en effet la projection $R_{W_o,W}$ est un isomorphisme de $\bar{\mathfrak{O}}_W$ sur $\bar{\mathfrak{O}}_{W_o}$.

3. Le théorème d'invariance des anneaux de fonctions holomorphes.

Etant données deux variétés V et V', une correspondance T entre V et V' est un sous-ensemble algébrique du produit $V \times V'$. Etant donnée une partie (quelconque) G de V nous noterons $T(G)$ le "transformé total" de G, c'est-à-dire $pr_{V'}((G \times V') \cap T)$. On dit que T est une transformation rationnelle de V dans V' si :

a. $pr_V(T) = V$;

b. T est irréductible ;

c. (P, P') désignant un point générique de T sur k, on a $k(P) = k(P, P')$.

Dans ces conditions on dit que T est régulière en $P \in V$ si $T(P)$ se réduit à un point P' et si l'anneau local $\mathfrak{o}_{P'}$ est contenu dans l'anneau local $\mathfrak{O}_P$ (en coordonnées affines ceci signifie que les dénominateurs des formules de transformation ne s'annulent pas en P) ; nous noterons ceci $P' \prec P$. Plus généralement, pour $G \subset V$, nous écrirons $G' \prec G$ si $G' = T(G)$ et si T est régulière en tout point de G ; c'est transitif.

Supposons que T soit une transformation rationnelle de V dans V' et que G soit une partie de V telle que $T(G) = G' \prec G$. Pour tout $P \in G$, l'injection $\mathfrak{O}_{P'} \to \mathfrak{O}_P$ est continue (car $\mathfrak{m}_{P'} \subset \mathfrak{m}_P$; ici $P' = T(P)$) ; elle se prolonge donc en une application continue de $\bar{\mathfrak{O}}_{P'}$ dans $\bar{\mathfrak{O}}_P$, et, en passant aux produits, l'on vérifie aisément qu'on obtient un homomorphisme canonique $H_{G,G'}$ de $\bar{\mathfrak{O}}_{G'}$ dans $\bar{\mathfrak{O}}_G$; ces homomomorphismes sont transitifs et commutent avec les restrictions R (cf. paragraphe 2).

THÉORÈME d'invariance. - Soient T une transformation rationnelle de V dans V' et W' un sous-ensemble algébrique de V' ; notons $W = T^{-1}(W')$. Si

a. $W' \angle W$.

b. V' est localement normale en tout point de W'.

c. (P, P') désignant un point générique de T, le corps $k(P')$ est algébriquement fermé dans $k(P)$.

Alors $H_{W,W'}$ est un isomorphisme de l'anneau de fonctions holomorphes $\tilde{\mathfrak{o}}_{W'}$ sur $\tilde{\mathfrak{o}}_W$.

Le fait que $H_{W,W'}$ est biunivoque ne nécessite que les hypothèses a. et b., et n'est pas trop difficile à démontrer (on utilise le fait que, grâce à b., l'anneau local $\mathfrak{o}_{P'}$ est un sous-espace topologique de $\mathfrak{o}_P$). Mais la démonstration du fait que $H_{W,W'}$ est surjectif est extrêmement difficile (par passage à un modèle normal de T on se ramène d'abord au cas où V et V' sont normales et où $V' < V$; on peut alors décomposer le passage de V' à V en un nombre fini de transformations des types suivants

1° adjonction d'une nouvelle coordonnée transcendante t (plus précisément passage de la variété de point générique homogène $(x_0, \dots, x_n)$ à celle de point générique homogène $(x_0, \dots, x_n, tx_0, \dots, tx_n)$),

2° adjonction d'une nouvelle coordonnée rationnelle t (cf. 1°),

3° normalisation (dans une extension algébrique) ; le passage 1° est le plus facile, les deux autres étant très compliqués).

On déduit du théorème d'invariance le

THÉORÈME de connexion. - Soient V, V' deux variétés, T une correspondance irréductible entre V et V', W un sous-ensemble algébrique de V (tous définis sur k) ; posons $W' = T(W)$, et notons (P, P') un point générique de T sur k. Si

a. $k(P)$ est algébriquement fermé dans $k(P, P')$,

b. V est analytiquement irréductible en tout point de W,

c. W est connexe (sur k), alors W' est connexe (sur k).

Si l'on remplace V par un modèle normal V^0, la correspondance entre V et V^0 est biunivoque sur W (par b.), et les conditions a., c. restent satisfaites ; on peut donc supposer V normale (auquel cas V est analytiquement irréductible en tout point). Le théorème d'invariance, appliqué à la projection U du graphe

T sur V, et le critère de connexion montrent alors que $W_1 = U^{-1}(W)$ est connexe. Le passage de W_1 à W' est alors une projection ; on a $W' \subset W_1$; la propriété de biunivocité de $\bar{\mathfrak{O}}_{W'} \to \bar{\mathfrak{O}}_{W_1}$ s'applique à ce cas ; donc $\bar{\mathfrak{O}}_{W'}$ est intègre et W' est connexe.

COMPLÉMENT. - Si, dans l'énoncé précédent, l'on remplace l'ensemble algébrique W par un point Q (non nécessairement rationnel sur k), et si a. et b. sont vérifiées, alors $T(Q)$ est connexe sur $k(Q)$ (on étend le corps de base de k à $k(Q)$).

EXEMPLE. - On prend pour T une correspondance birationnelle entre V et V', et pour W un "point fondamental" de T qui soit analytiquement irréductible (ou normal) sur V. Alors $T(W)$ (qui est de dimension >0) est connexe.

4. Systèmes algébriques de cycles. Le principe de dégénérescence.

Considérons une variété V^r de l'espace projectif P_n. Les systèmes $(H_0, \ldots, H_r)$ de $r + 1$ hyperplans de P_n forment un espace multiprojectif de dimension $(r + 1)n$; les systèmes tels que tous les H_i passent par un point donné forment une sous-variété de dimension $(r + 1)(n - 1)$ de cet espace ; donc les systèmes $(H_0, \ldots, H_r)$ tels que $H_0 \cap \ldots \cap H_r \cap V \neq \emptyset$ forment une variété de dimension $r + (r + 1)(n - 1) = (r + 1)n - 1$; par conséquent cette variété est définie par une seule équation, multihomogène et de même degré (égal au degré de V) en les coefficients $u_i^{(j)}$ des équations $(\sum_{i=0}^{n} u_i^{(j)} X_i = 0)$ des hyperplans H_j. Le premier membre $F(u^{(0)}, \ldots, u^{(r)})$ de cette équation est appelé la forme associée de V. Pour un cycle positif de dimension r, soit $Z = \sum_q n_q V_q$, on définit la forme associée de Z comme étant $\prod_q F_q(u)^{n_q}$, F_q désignant la forme associée de la variété V_q. Les coefficients de la forme associée de Z sont appelés les coordonnées de Chow de Z ; si Z est rationnel sur un corps k, ses coordonnées de Chow le sont aussi (réciproque fausse pour cause d'inséparabilité).

EXEMPLES. - La forme d'un point (x_i) est $\sum x_i u_i$. Celle d'une droite de coordonnées pluckériennes p_{ij} est $\sum_{i,j} p_{ij}(u_i^{(0)} u_j^{(1)} - u_j^{(0)} u_j^{(1)})$.

Plus généralement les coordonnées de Chow d'une variété linéaire sont essentiellement ses coordonnées grassmanniennes (= plückériennes).

Les coordonnées de Chow d'un cycle Z de dimension r et de degré d sont au nombre de $N = \binom{n+d}{d}^{r+1}$. A un tel cycle correspond ainsi un point représentatif $r(Z)$ dans l'espace projectif P_{N-1}. Il est facile de voir que r est biunivoque mais moins immédiat de montrer que l'ensemble des points de la forme $r(Z)$ est un ensemble algébrique (c'est-à-dire que les conditions à imposer aux coefficients d'une forme F multihomogène de degré convenable, pour que F soit la forme associée d'un cycle, sont algébriques) (Exemple : relation quadratique entre les coordonnées plückériennes d'une droite). Donc, si l'on spécialise (sur un corps k) les coordonnées de Chow d'un cycle Z, on obtient les coordonnées de Chow d'un cycle Z' (dit "spécialisation" de Z) ; de plus, si Z est porté par une variété V définie sur k, Z' est aussi porté par V ; enfin si P est un point du support de Z, et si (Z', P') est spécialisation de (Z, P), alors P' est un point du support de Z'.

On dit qu'un ensemble de cycles Z (de même degré et dimension) est un système algébrique (resp. un système algébrique irréductible) si les points associés $r(Z)$ forment un ensemble algébrique (resp. une variété) dans P_{N-1} ; celui-ci est appelé l'ensemble représentatif du système.

Pour démontrer maintenant le principe de dégénérescence, l'on va appliquer le théorème de connexion (paragraphe 3) à une correspondance bien choisie. Soit M la variété représentative d'un systèüe irréductible (S) de cycles portés par une variété V ; l'ensemble des couples (Q, P) de $M \times V$ où P est un point du support du cycle de point représentatif Q est d'après ce qui a été vu plus haut (et d'autres résultats analogues) une correspondance irréductible T entre M et V, appelée correspondance d'incidence du système (S) ; pour $Q \in M$, $T(Q)$ est le support du cycle correspondant à Q. Comme, pour Q générique, $T(Q)$ est une variété, la condition a. du théorème de connexion est vérifiée. La condition b. le serait aussi si M était normale ; mais on montre assez facilement qu'on peut remplacer M par son modèle normal M^0. Alors le complément au théorème de connexion montre que, pour tout point Q de M, le support $T(Q)$ est connexe sur $k(Q)$ (k : corps de définition de V, M et T). L'on montre alors sans difficultés (par extension du corps de base à la clôture algébrique de $k((Q))$ que $T(Q)$ est aussi "absolument connexe" (c'est-à-dire connexe sur tout corps de base). Ceci démontre le principe de dégénérescence.

Une généralisation facile du principe de dégénérescence est la suivante : si $T(Q)$ est absolument connexe pour Q générique, tout support $T(Q')$ est absolument connexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ZARISKI (Oscar). - Generalized semi-local rings, Summa Brasil. Math., t. 1, 1946, p. 169-195.

[2] ZARISKI (Oscar). - A fundamental lemma from the theory of holomorphic functions on an algebraic variety, Ann. Mat. pura ed appl., t. 29, 1949, p. 187-198.

[3] ZARISKI (Oscar). - Quelques questions concernant la théorie des fonctions holomorphes, Algèbre et théorie des nombres. - Paris, C.N.R.S., 1950, (Colloques internationaux du C.N.R.S., 24, 1949, Paris) ; p. 129-133.

[4] ZARISKI (Oscar). - Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground fields. - New-York, American mathematical Society, 1951 (Mem. Amer. math. Soc. n° 5).

ADDITIF

Depuis cet exposé, ZARISKI a trouvé une démonstration du théorème de connexion ne faisant pas intervenir les fonctions holomorphes abstraites, voir :

ZARISKI (Oscar). - Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz. - Princeton, Princeton University Press, 1957 ; p. 182-188.

[Juin 1957].