JEAN-PIERRE SERRE

Travaux d'Hirzebruch sur la topologie des variétés

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 88, p. 351-356
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__351_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1953)

TRAVAUX D'HIRZEBRUCH SUR LA TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS

par Jean-Pierre SERRE

1. Le formalisme algébrique.

Soit A un anneau commutatif à élément unité, et $Q(x) = \sum \gamma_i . x^i$ une série formelle, $\gamma_i \in A$, $\gamma_0 = 1$ (toutes les séries formelles considérées vérifieront cette dernière condition). Si $C(x) = \sum c_i . x^i$ est une autre série formelle, on va lui associer la série :

(1) $$K_Q(C) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(c_1, \ldots, c_j).x^j ,$$

obtenue de la façon suivante :

Pour tout entier m, on décompose formellement $1 + c_1 x + \ldots c_m x^m$ en produit $(1 + \alpha_1 x) \ldots (1 + \alpha_m x)$ et on considère le produit $Q(\alpha_1 x) \ldots Q(\alpha_m x)$; ce produit est une série formelle en x, dont les coefficients sont symétriques en les α_i, donc peuvent être écrits comme polynomes en les fonctions symétriques élémentaires $c_1, \ldots, c_m$:

$$Q(\alpha_1 x) \ldots Q(\alpha_m x) = \sum_{j=0}^{\infty} K_{j,m}(c_1, \ldots, c_m).x^j .$$

On voit tout de suite que les $K_{j,m}$ sont indépendants de m dès que $m \geqslant j$, et on les note K_j. La série (1) est donc bien définie.

PROPRIÉTÉS des K_j. – Ce sont des polynomes isobares de poids j en les c_i, chaque c_i étant affecté du poids i. En particulier K_j ne contient que $c_1, \ldots, c_j$.

L'opération $C \longrightarrow K_Q(C)$ est multiplicative, i.e. $K_Q(C.D) = K_Q(C).K_Q(D)$, si C et D sont deux séries formelles (commençant par 1, comme toujours).

La connaissance de K_Q détermine Q car $K_Q(1 + x) = Q(x)$.

EXEMPLES.

1.1. – $Q(x) = 1 + x$ donne $K_j = c_j$.

1.2. – $Q(x) = \dfrac{x}{1 - e^{-x}}$ donne pour K_j les polynomes de Todd, notés $T_j(c_1, \ldots, c_j)$. On a par exemple :

$$T_1 = \frac{1}{2} c_1 \quad , \quad T_2 = \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2) \quad , \quad T_3 = \frac{1}{24} c_1 c_2 \quad ,$$
$$T_4 = \frac{1}{720} (-c_4 + c_3 c_1 + 3 c_2^2 + 4 c_2 c_1^2 - c_1^4) \quad .$$

LEMME 1. - Le coefficient de x^n dans $Q(x)^{n+1}$ est égal à 1 pour tout $n \geqslant 0$, si $Q(x) = x/(1 - e^{-x})$.

(En effet, ce coefficient est égal à

$$\mathrm{Res}_0 \, [dx/(1 - e^{-x})^{n+1}] = \mathrm{Res}_0 \, [du/(1 - u)u^{n+1}] = 1 \quad ,$$
en posant $u = 1 - e^{-x}$).

1.3. - $Q(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{tgh}\sqrt{x}}$ donne pour K_j des polynomes notés $L_j(p_1 , \ldots , p_j)$:

$$L_1 = \frac{1}{3} p_1 \quad , \quad L_2 = \frac{1}{45} (7p_2 - p_1^2) \quad , \quad L_3 = \frac{1}{3^3.5.7}(62p_3 - 13p_1 p_2 + 2p_1^3) \quad .$$

(On a noté les variables p_i au lieu de c_i parce que, dans les applications topologiques, elles correspondent à des classes de Pontrjagin, et non à des classes de Chern).

Le lemme suivant se démontre comme le lemme 1 :

LEMME 2. - Le coefficient de x^n dans $Q(x)^{2n+1}$ est égal à 1 pour tout $n \geqslant 0$, si $Q(x) = \sqrt{x}/\mathrm{tgh}\sqrt{x}$.

En utilisant le théorème de Clausen-von Staudt sur la divisibilité des nombres de Bernoulli, on peut démontrer :

LEMME 3. - Pour tout entier r, les polynomes $p^r T_{r(p-1)}$ (p premier) et $p^r L_{r(p-1)/2}$ (p premier $\neq 2$) ont des dénominateurs premiers à p.

2. L'indice d'inertie d'une variété différentiable compacte.

Si V est une variété orientable, on sait définir (cf. [8]) ses classes de Pontrjagin $p_1 , p_2 , \ldots$, qui sont des classes de cohomologie entières de dimensions $4 , 8 , \ldots$. Supposons que la dimension de V soit $4k$, et que V soit compacte ; alors on peut former le polynome $L_k(p_1 , \ldots , p_k)$ qui est un multiple rationnel, soit $L(V)$, de la classe fondamentale de V supposée orientée. D'autre part, le cup-produit définit une forme bilinéaire symétrique sur $H^{2k}(V,R)$; nous désignerons l'indice d'inertie de cette forme (différence entre le nombre de carrés positifs et le nombre de carrés négatifs) par $I(V)$. On a alors ([2], Théorème 3.1) :

THÉORÈME 1. - <u>Pour toute variété</u> V , <u>différentiable, compacte, orientée, et de dimension divisible par</u> 4 , <u>on a</u> $L(V) = I(V)$.

(En particulier, si $\dim V = 4$, on a $I(V) = p_1/3$, cf. [5] , [7]).

La démonstration repose de façon essentielle sur les résultats de THOM concernant les variétés bords (cf. [5]) . THOM définit l'algèbre graduée Ω des classes de variétés différentiables compactes orientées modulo la relation d'équivalence du cobordisme, et montre que l'algèbre $\Omega \otimes Q$ (Q , corps des rationnels) est une algèbre de polynomes engendrée par les classes des espaces projectifs complexes $P_{2k}(C)$, $k \geqslant 1$. Etendons alors les définitions de $I(V)$ et $L(V)$ en posant $I(V) = L(V) = 0$ si $\dim V \not\equiv 0 \mod 4$. On montre que $I(V)$ et $L(V)$ sont invariants par cobordisme, donc définissent des applications de Ω dans Q ; de plus ce sont des homomorphismes d'anneaux ($L(V \times W) = L(V).L(W)$ résulte de la formule $K_Q(C.D) = K_Q(C).K_Q(D)$, et du fait que les classes de Pontrjagin rationnelles vérifient un "théorème de dualité" , cf. [1] par exemple). Donc $I(V)$ et $L(V)$ définissent des homomorphismes de $\Omega \otimes Q$ dans Q , et pour voir que ces homomorphismes coïncident il suffit de montrer que $L(V) = I(V)$ lorsque $V = P_{2k}(C)$; or on a évidemment $I(P_{2k}(C)) = 1$; d'autre part on sait que le polynome de Pontrjagin $P(t) = \sum p_i . t^{4i}$ de $P_{2k}(C)$ est égal à $(1 + u^2t^4)^{2k+1}$, où u désigne la classe de cohomologie de dimension 2 duale d'un hyperplan ; le fait que $L(P_{2k}(C)) = 1$ résulte alors du lemme 2 .

APPLICATION ([3]). - Il n'y a pas de variété différentiable compacte V de dimension 12, admettant pour polynome de Poincaré réel le polynome $1 + t^6 + t^{12}$.

En effet, on aurait $1 = I(V) = L(V) = \dfrac{62.p_3}{3^3.5.7}$, ce qui est impossible puisque $3^3.5.7$ n'est pas divisible par 62.

Résultat analogue pour les variétés de dimension 20.

3. <u>Le genre de Todd</u>.

Soit E un espace fibré de base V et de groupe structural le groupe unitaire $U(n)$. Les classes de Chern c_1 , ... , c_n de E sont des classes de cohomologie entières de dimensions 2 , ... , 2n de la base V . On peut former les polynomes $T_j(c_1 , \dots , c_j)$ et l'on obtient les classes de Todd du fibré E .

Ceci s'applique en particulier au cas d'une variété presque-complexe V de dimension $2k$. La classe de cohomologie $T_k(c_1 , \dots , c_k)$ est un multiple rationnel, soit $T(V)$, de la classe fondamentale de V . Le nombre rationnel $T(V)$ est appelé genre de Todd de V .

PROPRIÉTÉS du genre de Todd. - On a $T(V \times W) = T(V).T(W)$, cela se voit comme pour $L(V)$. On a $T(P_k(C)) = 1$, car le polynome de Chern de $P_k(C)$ est $(1 + ut^2)^{k+1}$, avec les notations du n° 2 , et l'on applique le lemme 1 .

Les propriétés de $T(V)$ sont très analogues à celles de $L(V)$. Il y a cependant une différence importante : alors que le théorème 1 montre que $L(V)$ est un entier, on ignore s'il en est de même de $T(V)$. On a toutefois :

THÉORÈME 2. - ([2] , Théorème 4.1). - $2^{k-1}.T(V)$ est un entier si $\dim V = 2k$.

THÉORÈME 3. - (THOM, cité dans [3] , c), Théorème 8.3). - Si $\dim V = 2$, 4 ou 6 , $T(V)$ est un entier.

Pour démontrer le théorème 3, il suffit d'examiner le cas où $\dim V = 6$. On choisit alors une variété $W \subset V$, de dimension 4 , dont la classe d'homologie soit duale de la classe c_1 . En appliquant la dualité de Whitney, on voit que la classe W_2 de W est nulle, donc la classe $p_1(W)$ est divisible par 48, d'après un théorème de Rokhlin. Comme $p_1(W) = - 2c_1c_2$, c_1c_2 est divisible par 24,

C.Q.F.D.

Genre de Todd et genre arithmétique. - Soit V une variété algébrique sans singularités, de dimension complexe k , et soit $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur V . Posons :

$$\pi(V) = \sum_{q=0}^{q=k} (-1)^q.\dim_C H^q(V , \mathcal{O})$$

$$= \sum_{q=0}^{q=k} (-1)^q.\dim_C \{\text{espace vectoriel des formes de 1e espèce de degré } q\} .$$

On démontre (cf. [4] par exemple) que $\pi(V)$ est égal au genre arithmétique de V (défini au moyen de la formule de postulation de Hilbert), et l'on conjecture que $\pi(V) = T(V)$ (l'égalité $\pi(V) = T(V)$ a été démontré par TODD, mais en s'appuyant sur un raisonnement insuffisant de SEVERI).

Lorsque $k = 1$, 2 , 3 , on sait démontrer que $\pi(V) = T(V)$ (pour $k = 1$, ce n'est rien d'autre que la relation bien connue entre le genre et la caractéristique d'Euler-Poincaré, pour $k = 2$, 3 , il faut utiliser des résultats moins triviaux, notamment le théorème 1).

On sait également démontrer que $\pi(V) = T(V)$ lorsque V est une intersection complète d'hypersurfaces sans singularités et se coupant proprement.

4. Les puissances réduites de Steenrod.

Soit V une variété compacte différentiable, de dimension m. Soit p un nombre premier $\neq 2$. Les puissances de Steenrod (cf. [1], par exemple) sont des homomorphismes :

$$\mathcal{P}_p^r \ : \ H^k(V, Z_p) \longrightarrow H^{k+2r(p-1)}(V, Z_p) .$$

Supposons V orientée ; alors, si $k + 2r(p-1) = m$, la dualité de Poincaré montre qu'il existe des classes bien déterminées $s_p^r \in H^{2r(p-1)}(V, Z_p)$ telles que :

$$\mathcal{P}_p^r(u) = s_p^r . u \qquad \text{pour tout } u \in H^k(V, Z_p) .$$

THÉORÈME 4. ([2], Théorème 2.1, voir aussi [7]). - Les classes s_p^r peuvent être exprimées comme polynomes en les classes de Pontrjagin p_i de V. De façon précise :

$$s_p^r \equiv p^r . L_{r(p-1)/2}(p_1, \dots, p_{r(p-1)/2}) \mod p ,$$

le second membre ayant un sens à cause du lemme 3.

[Pour $p = 2$, on a un résultat tout à fait analogue : les classes U_i de WU ([6]) s'expriment en fonction des classes de Stiefel-Whitney W_i par les formules : $U^i \equiv 2^i . T_i (W_1, \dots, W_i) \mod 2$].

Le théorème 4 se déduit sans trop de difficulté du lemme suivant :

LEMME 4. ([3], b), Théorème 4.3). - $\sum_{r,t} \mathcal{P}_p^t (s_p^r) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{p,j}(p_1, \dots, p_j)$, où les polynomes $B_{p,j}$ sont les polynomes associés à la série $Q(x) = 1 + x^{(p-1)/2}$.

Le lemme 4 se démontre par une méthode analogue à celle de WU dans [6] ; on considère la diagonale Δ de $V \times V$, et on calcule de deux façons différentes les $\mathcal{P}_p^t(U)$, où U désigne la classe duale de Δ dans $V \times V$. Pour plus de détails, voir [3], b).

Lorsque V est presque-complexe, on peut calculer les classes de Pontrjagin p_i en fonction des classes de Chern, et le théorème 4 donne :

THÉORÈME 4'. - Si V est presque-complexe, on a :

$$s_p^r \equiv p^r . T_{r(p-1)} (c_1, \dots, c_{r(p-1)}) \mod p .$$

Soit $2n$ la dimension de V. On a :

$$\mathcal{P}_p^1(c_{n-p+1}) \equiv c_{n-p+1}.s_p^1 \equiv c_{n-p+1} . \sum u_1^{p-1} \quad (2 \leq p \leq n+1) ,$$

en convenant de désigner par $\sum u_1^{p-1}$ le polynome symétrique $\sum u_1^{p-1} + \ldots + u_n^{p-1}$, exprimé au moyen des fonctions symétriques élémentaires $c_i = \sum u_1 \ldots u_i$.

Mais d'autre part, on sait exprimer les $\mathcal{P}_p^r(c_i)$ en fonction des c_i, cf. [1]. En faisant $r = 1$ et $i = n - p + 1$ et comparant avec le résultat précédent, on obtient certaines congruences entre classes de Chern ([3], c), Théorème 5.3):

THÉORÈME 5. - Les classes de Chern c_i d'une structure presque-complexe de la variété V de dimension $2n$ vérifient les relations suivantes modulo p (p premier $\leq n+1$) :

$$c_{n-p+2} \sum u_1^{p-2} - c_{n-p+3} \sum u_1^{p-3} + \ldots + c_{n-1}c_1 - nc_n \equiv 0 \mod p .$$

En particulier $nc_n \equiv 0 \mod 2$, $c_{n-1}c_1 - nc_n \equiv 0 \mod 3$, etc.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Armand) et SERRE (Jean-Pierre). - Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod, Amer. J. of Math., t. 75, 1953, p. 409-448.

[2] HIRZEBRUCH (Friedrich). - On Steenrod's reduced powers, the index of inertia and the Todd genus, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 39, 1953, p. 951-956.

[3] a), b), c) HIRZEBRUCH (Friedrich). - Notes polycopiées, Princeton 1953.

[4] KODAIRA (K.) and SPENCER (D.C.). - On arithmetic genera of algebraic varieties, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 39, 1953, p. 641-649.

[5] THOM (R.). - Variétés différentiables cobordantes, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 1733-1735 ; Sur les variétés-bords, Séminaire Bourbaki, t. 6, 1953/54 ; Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comm. Math. Helv., t. 28, 1954, p. 17-86.

[6] WU WEN-TSUN. - Classes caractéristiques et i-carrés, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 230, 1950, p. 508-511.

[7] WU WEN-TSUN. - Sur les puissances de Steenrod. - Colloque de Topologie, Strasbourg 1951.

[8] WU WEN-TSUN. - Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, n° 11 : Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées. - Paris, Hermann, 1952 (Actual. scient. et ind. n° 1183).

* * *

Pour les paragraphes 1, 2, 3 et la démonstration de la conjecture $\mathcal{T}(V) = T(V)$ (pour toute variété algébrique V, projective et non singulière), voir :

HIRZEBRUCH (Friedrich). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, Heft 9).

[Avril 1957]