RENÉ THOM

Sur les variétés-bords

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 89, p. 357-364
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__357_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1953)

SUR LES VARIÉTÉS-BORDS

par René THOM

Cet exposé reprend les notations d'un exposé précédent [4].

1. Définitions.

Un espace X^{n+1} est une variété à bord, de bord V^n, si :

1° le complémentaire $M^{n+1} - V^n$ est une variété ouverte paracompacte de dimension $n + 1$;

2° le sous-ensemble fermé V^n est une variété (compacte) de dimension n ;

3° en tout point x de V^n, il existe une carte locale (compatible avec les structures différentiables données sur $M^{n+1} - V^n$ et V^n), dans laquelle l'image de M^{n+1} est un demi-espace R^{n+1} limité par un R^n image de V^n.

Si M^{n+1} est orientable, le bord V^n de M^{n+1} est également orientable et toute orientation de M^{n+1} induit canoniquement une orientation de V^n (grâce à l'opérateur bord en homologie ∂ : $H_{n+1}(M^{n+1}, V^n) \to H_n(V^n)$).

Soit V^n une variété, non nécessairement connexe, mais orientable et orientée. S'il existe une variété à bord compacte M^{n+1}, de bord V^n, et si, pour une orientation convenable de M^{n+1}, on a $\partial M^{n+1} = V^n$, on dira que V^n est une variété-bord (sans condition d'orientabilité, on dira que V^n est une variété-bord mod 2).

2. Enoncé du problème.

Une variété V^n donnée est-elle une variété-bord ? On sait depuis longtemps que seules peuvent être des bords mod 2, les variétés dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est paire. On va donner ici des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété soit un bord (problème soulevé par N. STEENROD dans [1]) ; dans ce but, on va généraliser quelque peu la question.

Supposons qu'une même variété V^n soit le bord de deux variétés à bord : M_1 et M_2 ; par réunion de M_1 et M_2, et identification de leur bord commun V^n, on obtient un espace P qu'on peut munir d'une structure de variété différentiable de dimension $n + 1$: la structure est canoniquement définie sur l'ouvert $P - V^n$; sur V^n elle-même, elle dépend de la façon dont on prolonge les cartes de V^n

sur chacune des variétés à bord M_1 et M_2 (nous laissons ici de côté la question de savoir si les diverses structures différentiables qu'on peut définir ainsi sur P sont isomorphes).

Soient deux variétés données V^n et V'^n ; si la variété $V' - V$, réunion de V' et de la variété V munie de l'orientation opposée à l'orientation donnée est une variété-bord, on dira que les variétés V et V' sont <u>cobordantes</u> (notation $V \simeq V'$). Si deux variétés V et V'' sont cobordantes à une même troisième V', elles sont cobordantes entre elles (effectuer la construction d'identification décrite plus haut). L'ensemble des classes d'équivalence ainsi défini entre variétés orientées de dimension n sera noté Ω^n. La réunion de deux variétés, représentant deux classes, définit sur Ω^n une loi d'addition qui fait de Ω^n un groupe abélien ; la classe nulle est la <u>classe des variétés-bords</u>. Si W^r désigne une variété de dimension arbitraire r, la relation $V \simeq V'$ entraîne sur les produits $V \times W^r \simeq V' \times W^r$; le produit topologique définit ainsi sur la somme directe des Ω^n une multiplication anticommutative, distributive par rapport à l'addition ; on notera Ω l'anneau gradué ainsi défini.

Sans condition d'orientabilité, on définira de même : deux variétés <u>cobordantes</u> mod 2 (notation $V^k \simeq V'^k$ mod 2), le groupe $\mathfrak{N}^k$ des classes mod 2, et l'anneau $\mathfrak{N}$ somme directe des $\mathfrak{N}^k$; tout élément de $\mathfrak{N}$ est d'ordre 2 (considérer le produit $V^k \times I$).

3. <u>Invariants numériques des variétés cobordantes.</u>

Rappelons qu'on appelle "nombre caractéristique" d'une variété, la valeur prise par une classe caractéristique sur le cycle fondamental de la variété ; ils sont de deux espèces :

i. Pour V^n orientée, et $n \equiv 0$ mod 4, on a des <u>nombres caractéristiques de Pontrjagin</u>, donnés par les classes caractéristiques de Pontrjagin $\pi(P^{4r})$ de la structure des vecteurs tangents ; ce sont des entiers.

ii. Sans condition d'orientabilité, les <u>classes de Stiefel-Whitney</u> donnent des nombres caractéristiques $\langle \pi(w_i), v_n \rangle$ qui sont des entiers mod 2.

PONTRAGIN a démontré [2] que tous les nombres caractéristiques d'une variété-bord sont nuls ; par suite : les <u>nombres caractéristiques</u> (définis par la même classe) de <u>deux variétés cobordantes sont égaux</u>.

Chaque nombre caractéristique de Pontrjagin (resp. de Stiefel-Whitney) définit un homomorphisme de Ω^k (resp. $\mathfrak{N}^k$) (dans Z (resp. Z_2). Mais seuls les nombres caractéristiques associés aux classes de dimension maximum $P^{4k}(V^{4k})$ resp. $W_n(V^n)$ sont des homomorphismes de la structure multiplicative de Ω (resp. $\mathfrak{N}$). Rappelons que $W_n(V^n)$ n'est autre que la caractéristique d'Euler-Poincaré, réduite mod 2 .

Pour toute variété V^{4k} , orientée de dim 4k , désignons par $\tau(V^{4k})$ l'excès du nombre des carrés positifs sur celui des carrés négatifs de la forme quadratique définie par le cup-produit sur $H^{2k}(V^{4k}\ ;\ R)$; il résulte des théorèmes de dualité pour variétés à bord (dualité dite de Poncaré-Lefschetz), que $\tau(V^{4k}) = 0$ si V est un bord. Par suite $\tau(V) = \tau(V')$ si $V \simeq V'$; comme de plus $\tau(V \times W) = \tau(V) \times \tau(W)$ τ définit un homomorphisme de l'anneau Ω sur Z .

4. Sous-variétés L-équivalentes.

Deux sous-variétés (orientées) W_0^k , W_1^k d'une variété V^n seront dites L-équivalentes, si, dans le produit $V^n \times I$, on peut trouver une sous-variété à bord, X^{k+1} , dont le bord est formé seulement de W^k plongée dans $(V^n\ ,\ 0)$ et de W_1^k plongée dans $(V^n\ ,\ 1)$, avec les conditions naturelles de compatibilité pour les orientations $(\partial X^{k+1} = W_1^k - W_0^k)$. Ceci définit encore une relation d'équivalence entre sous-variétés orientées de dim k et on notera $L_k(V^n)$ l'ensemble de ces classes. Même définition sans condition d'orientation (notation $L_k(V^n\ ;\ Z_2)$).

Deux sous-variétés L-équivalentes sont à la fois cobordantes et homologues ; il existe par suite une application canonique J de $L_k(V^n)$ dans le groupe d'homologie $H_k(V^n)$. On peut se demander s'il est possible de donner à $L_k(V^n)$ une structure de groupe abélien, de telle façon que J soit un homomorphisme. Il en est ainsi pour $k < n/2 - 1$: l'addition dans $L_k(V^n)$ est définie par la réunion des représentants de deux classes, qu'on peut toujours, alors, supposer disjoints.

Ici encore les nombres caractéristiques, définis à partir des classes caractéristiques soit de la structure tangente (nombres caractéristiques tangents), soit de la structure normale (nombres caractéristiques normaux) sont des invariants des L-classes.

Revenons maintenant à un théorème d'approximation énoncé dans l'exposé précédent [4] : soit f une application d'une variété V^n dans une variété M^p contenant une sous-variété M^{p-q} ; si f satisfait à une condition de rang maximum sur l'espace des vecteurs transverses à N^{p-q} dans M^p , alors l'image réciproque $f^{-1}(N^{p-q})$ est une sous-variété W^{n-q} , et on peut toujours se ramener à ce cas par une régularisation convenable. Supposons qu'on ait deux applications f , g de V^n dans

M^p , régulières (au sens précédent) sur la sous-variété N^{p-q} de M^p ; la notion de L-équivalence est justifiée par le théorème :

THÉORÈME 1. - Si les applications f , g de V^n dans M^p , "régulières" sur N^{p-q} sont homotopes, alors les sous-variétés $f^{-1}(N^{p-q})$ sont L-équivalentes dans V^n .

En particulier, l'image réciproque "régulière" de toute sous-variété, par une application f inessentielle, est une variété-bord.

(Il suffit évidemment de régulariser l'application $F : V \times I \longrightarrow M^p$ qui définit l'homotopie entre f et g).

On a montré dans [4] comment, à toute sous-variété W^{n-k} d'une variété V^n , on peut attacher une application $f : V^n \longrightarrow M(SO(k))$, dont la classe d'homotopie est bien déterminée ; réciproquement, toute classe d'applications $g : V \longrightarrow M(SO(k))$ est la classe canoniquement attachée à une sous-variété W^{n-k} de V^n . On montre alors facilement que, si deux sous-variétés W^{n-k} , W'^{n-k} de V^n sont L-équivalentes, elles définissent des applications f , $f' : V^n \longrightarrow M(SO(k))$ qui sont homotopes. (Il suffit de construire l'application canoniquement attachée à la sous-variété X^{n-k+1} dans $V^n \times I$, telle que $\partial X = W' - W$) . On montre ainsi :

THÉORÈME 2. - L'ensemble $L_{n-k}(V^n)$ (resp. $L_{n-k}(V^n ; Z_2)$) des L-classes de V^n pour la dimension $n - k$ s'identifie à l'ensemble des classes d'applications de V^n dans $M(SO(k))$, resp. $M(O(k))$.

On notera ces ensembles de classes d'applications $f : V^n \longrightarrow M(SO(k))$, resp. $M(O(k))$, par $C^k(V^n)$, resp. $C^k(V^n;Z_2)$. Pour $k > n/2 + 1$, $C^k(V^n)$ peut être muni d'une structure de groupe (abélien) de cohomotopie, car l'espace $M(SO(k))$ est asphérique pour les dimensions $< k$. On verifie alors que le théorème 2 définit un isomorphisme du groupe $L_{n-k}(V^n)$ sur le groupe de cohomotopie $C^k(V^n)$ (même énoncé mod 2) .

Le théorème 2 permet, dans une assez large mesure, de déterminer $L_{n-k}(V^n)$; comme les complexes $M(SO(1))$ et $M(SO(2))$ s'identifient respectivement à $K(Z , 1)$ et $K(Z , 2)$, les ensembles L_{n-1} et L_{n-2} de V^n s'identifient aux groupes d'homologie $H_{n-1}(V^n ; Z)$ et $H_{n-2}(V^n ; Z)$: Deux sous-variétés de dimension $n - 2$ de V^n sont L-équivalentes (donc cobordantes), dès qu'elles sont homologues. Il en va de même pour les sous-variétés de dimension < 4 dans toute variété, ainsi que pour les sous-variétés du groupe $H_{n-1}(V^n ; Z_2)$. Mais l'application la plus intéressante s'obtient dans le cas où V^n est la sphère S^n . Les ensembles

$L_{n-k}(S^n)$ s'identifient d'après le théorème 2, aux ensembles de classes d'applications de S^n dans $M(SO(k))$, c'est-à-dire aux groupes d'homotopie $\pi_n(M(SO(k)))$; ils sont donc, pour $k > 2$, en général non triviaux ; de même

$$L_{n-k}(S^n ; Z_2) \simeq \pi_n(M(O(k)))$$

est en général non trivial pour $k > 1$. Pour $k > n/2 + 1$, on voit immédiatement que les groupes $L_{n-k}(S^n)$, resp. $L_{n-k}(S^n ; Z_2)$ s'identifient aux groupes Ω^{n-k} et $\mathfrak{N}^{n-k}$ respectivement. Cela provient du fait connu que toute variété W^r de dimension r peut être plongée dans S^n pour $n > 2r + 2$, et qu'alors deux plongements quelconques de W^r sont "isotopes", donc L-équivalents. En remarquant que la structure de groupe de cohomotopie de l'ensemble des applications $f : S^n \to M(SO(k))$ est isomorphe à celle du groupe d'homotopie correspondant (résultat classique en la théorie), nous obtenons :

THÉORÈME 3. - Les groupes Ω^i, resp. $\mathfrak{N}^i$ sont isomorphes aux groupes d'homotopie $\pi_{k+i}(M(SO(k)))$, resp. $\pi_{k+i}(M(O(k)))$ $(k > i + 1)$.

Ceci implique que les groupes d'homotopie $\pi_{k+i}(M(SO(k)))$ (resp. $M(O(k))$) sont indépendants de k pour $i < k - 1$. On peut vérifier directement, en effet, que les complexes $M(SO(k))$ et $M(O(k))$ vérifient, tout comme les sphères, un théorème de "suspension" à la Freudenthal.

On est donc ramené à calculer les groupes d'homotopie d'un complexe espace ; on applique dans ce but la méthode standard due à H. CARTAN et J.-P. SERRE : former, par des fibrations successives et superposées de complexes d'Eilenberg-MacLane, un espace homotopiquement équivalent à l'espace donné. La méthode aboutit dans le cas mod 2 ; dans le cas de $M(SO(k))$ au contraire, on ne peut guère aller au delà des petites dimensions, en raison de sérieuses difficultés algébriques.

5. Cas mod 2.

Le complexe équivalent à $M(O(k))$ est, pour les dimensions $2k$, fait miraculeux, un produit de complexes d'Eilenberg-MacLane :

$$Y = K(Z_2, k) \times K(Z_2, k + 2) \times \dots \times (K(Z_2, k + h))^{d(h)} \times \dots \times (K(Z_2, 2k))^{d(k)}$$

où $d(h)$ désigne le nombre de partitions de l'entier $h \leq k$ en entiers dont aucun n'est de la forme $2^m - 1$.

Cette décomposition montre de suite que le groupe $\mathfrak{N}^h \simeq \pi_{k+h}(M(O(k)))$ est la somme directe de $d(h)$ groupes isomorphes à Z_2 ; de plus, on peut caractériser cohomologiquement chacun des facteurs de Y comme suit :

Soit $\sum_i W_i t^i$ le polynôme de Stiefel-Whitney de la structure fibrée des vecteurs normaux à la variété W^r (pour une immersion de W^r dans un espace euclidien R^m où $m > 2r$) ; désignons par u_j $(j = 1, 2, \dots, r)$ les "racines symboliques" de ce polynôme. Les $d(r)$ facteurs de Y de dimension $k + r$ $(r < k)$ correspondent biunivoquement aux $d(r)$ nombres caractéristiques normaux

$$X_\omega = \sum (u_1)^{a_1} (u_2)^{a_2} \dots (u_m)^{a_m}$$

où l'ensemble $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ parcourt les $d(r)$ partitions de l'entier r en entiers a_j dont aucun n'est de la forme $2^q - 1$.

Autrement dit : toute application $f : S^{r+k} \to M(O(k))$, qui est homologue mod 2 à 0, est inessentielle ; si l'application f est essentielle, l'un au moins des nombres X_ω de V^r n'est pas nul. Ceci donne :

THÉORÈME 4. - Les nombres caractéristiques normaux (ou tangents) de Stiefel-Whitney d'une variété V^r sont des fonctions linéaires indépendantes de $d(r)$ d'entre eux. S'ils sont nuls, la variété est une variété-bord (mod 2).

De là, on déduit la structure multiplicative de l'anneau $\mathfrak{N}$:

THÉORÈME 5. - $\mathfrak{N}$ est isomorphe à une algèbre de polynômes sur le corps Z_2 admettant un générateur U^i pour toute dimension i telle que $i + 1$ ne soit pas une puissance de 2.

On montre facilement qu'on peut faire choix, pour les U^i de dimension paire, de la classe de l'espace projectif réel $P_i(R)$; une définition géométrique des U^i pour i impair n'est pas connue. Le générateur de U^5 est la variété de Wu Wen-Tsun, variété fibrée sur S^1 en plans projectifs complexes [5].

6. Cas des petites dimensions.

$\mathfrak{N}^2$ est isomorphe à Z_2, engendré par U^2 classe de $P_2(R)$.

$\mathfrak{N}^3$ est nul : toute variété de dimensions 3 est un bord mod 2.

$\mathfrak{N}^4$ est $Z_2 + Z_2$, engendré par U^4 classe de $P_4(R)$, et $(U_2)^2$ classe de $(P_2(R))^2$; on notera que le plan projectif complexe $P_2(C)$ est cobordant mod 2 à $(P_2(R))^2$.

$\mathfrak{N}^5 = Z_2$ est engendré par U^5 classe de la variété de Wu Wen-Tsun

$\mathfrak{N}^6 = Z_2 + Z_2 + Z_2$, engendré par U^6, $U^4 . U^2$ et $(U^2)^3$

$\mathfrak{N}^7 = Z_2$ engendré par $U^5 . U^2$.

7. Les groupes Ω^i .

La détermination des groupes d'homotopie de $M(SO(k))$ n'a pas été poussée au-delà de la dimension $k + 7$; elle donne :

THÉORÈME 6. - Pour les petites dimensions, les groupes Ω^i sont :

$$\Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0 \ ; \quad \Omega^4 = Z \ ; \quad \Omega^5 = Z_2 \ ; \quad \Omega^6 = \Omega^7 = 0$$

Le générateur de Ω^4 est la classe du plan projectif complexe $P_2(C)$ comme τ et la classe de Pontrjagin P^4 définissent tous deux des homomorphismes de Ω^4 dans Z , on en déduit :

COROLLAIRE 7. - *Pour toute variété orientée* V^4 *de dimension* 4 , *le nombre caractéristique* $P^4(V^4)$ *est égal à* 3 $\tau(V^4)$ (c'est donc un invariant topologique).

Le générateur de Ω^5 est la classe de la variété de Wu Wen-Tsun.

On obtient de précieux renseignements sur les groupes Ω^i en appliquant au complexe $M(SO(k))$ la $\mathcal{C}$-théorie de J.-P. SERRE [2] ; $\mathcal{C}$ désignant la classe des groupes finis, on obtient :

THÉORÈME 8. - *Tous les groupes* Ω^i *sont finis pour* $i \not\equiv 0$ *mod* 4 ; *pour* $i \equiv 0$ *mod* 4 , *le rang de* $\Omega^i \otimes Q$ *est égal au* i-*ième nombre de Betti de la grassmannienne* $b_i(\hat{G}_k)$.

Autrement dit : étant donné un système (c_j) d'entiers en nombre égal à $b_i(\hat{G}_k)$; il existe toujours un entier non nul N tel que les produits $N.c_j$ forment l'ensemble des nombres caractéristiques (tangents ou normaux) de Pontrjagin d'une variété V^i .

COROLLAIRE 9. - *Si tous les nombres de Pontrjagin d'une variété* V *sont nuls, il existe un entier non nul* N *tel que la variété* $N.V$ *soit une variété-bord.*

Ce corollaire permet la détermination de la structure multiplicative de l'anneau $\Omega \otimes Q$. On obtient :

THÉORÈME 10. - *L'anneau* $\Omega \otimes Q$ *est isomorphe à une algèbre de polynômes admettant un générateur* Y^{4k} *pour toute dimension* $\equiv 0$ mod 4 .

On peut *prendre pour générateur* Y^{4k} *la classe de l'espace projectif de dimension complexe paire* $P_{2k}(C)$.

REMARQUE. - Désignons par Ω_T l'idéal de Ω formé des éléments d'ordre fini. On peut se demander si les classes des espaces $P_{2k}(C)$ et leurs produits constituent un système de générateurs du Z-module Ω/Ω_T. Comme me l'a signalé F. HIRZEBRUCH, il n'en est rien : pour que la propriété précédente soit vraie, pour $\Omega^{4k}/\Omega_T^{4k}$, il est nécessaire que l'entier $2k + 1$ vérifie le théorème de Fermat : ce qui implique que $2k + 1$ est, soit premier, soit d'une forme arithmétique très particulière (1). (La propriété est vraie pour $k = 1$, 2, 3 et fausse pour $k = 4$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] EILENBERG (Samuel). - On the problems of topology, Annals of Math., Series 2, t. 50, 1949, p. 247-260.

[2] PONTRJAGIN (L.). - Kharakterističeskie cikly differenciruemykh mnogoobrazij, Recueil math. Soc. math. Moscou (Mat. Sbornik), t. 63, 1947, p. 233-284.

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, Annals of Math., Series 2, t. 58, 1953, p. 258-294.

[4] THOM (René). - Sous-variétés et classes d'homologie des variétés différentiables, Séminaire Bourbaki, t. 2, 1952/53.

[5] WU WEN-TSUN. - Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 230, 1950, p. 508-511.

ADDITIF

On trouvera une démonstration complète des résultats, présentés dans cet exposé, dans l'article suivant :

[6] THOM (René). - Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv., t. 28, 1954, p. 17-86.

[Février 1958]

(1) $2k + 1$ est le produit d'au moins trois nombres premiers $p_1 \dots p_i$ tels que $p_i - 1$ divise $2k$; le plus petit des entiers non premiers vérifiant la propriété de Fermat est le produit 3.11.17.