ROGER GODEMENT

Cohomologie des groupes discontinus

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 90, p. 365-375
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__365_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1954)

COHOMOLOGIE DES GROUPES DISCONTINUS

par Roger GODEMENT

Soit G un groupe fuchsien dans le demi-plan X : $I(z) > 0$. On pose

$$J_S(z) = cz + d \quad \text{pour} \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G .$$

La théorie des fonctions automorphes conduit à étudier les fonctions $f(z)$ qui, par G , se transforment suivant

$$f(Sz) = \mu(S).J_S(z)^r.f(z) ,$$

r étant un nombre donné non nécessairement entier et $\mu(S)$ un système de constantes donné ("multiplicateur" de f). Les $\mu(S)$ ont évidemment à vérifier des identités, que voici. Tout d'abord on a trivialement

$$J_{ST}(z) = J_S(Tz)\ J_T(z) \quad ;$$

choisissons alors pour chaque S une détermination de $\log J_S(z)$ et posons $J_S(z)^r = e^{ir.\log J_S(z)}$; on aura une identité

$$\log J_{ST}(z) = \log J_S(Tz) + \log J_T(z) + 2\pi i.w(S\ ,\ T)$$

où $w(S\ ,\ T)$ est une application $G \times G \longrightarrow \underset{\sim}{Z}$; cela dit il est clair qu'on doit avoir

$$(1) \qquad \mu(ST) = e^{2\pi ir.w(S,T)}\ \mu(S)\ \mu(T) .$$

Si l'on fait opérer trivialement G sur le groupe multiplicatif C_* , il est visible que $e^{2\pi ir.w(S,T)}$ est un 2-cocycle de G à valeurs dans C_* , et que (1) exprime que $S \longrightarrow \mu(S)$ est une 1-cochaîne ayant w pour cobord.

Il est utile en particulier de former des multiplicateurs en posant $\mu(S) = e^{2\pi ir.\alpha(S)}$ et en exigeant que $\alpha(S)$ vérifie $\alpha(ST) - \alpha(S) - \alpha(T) = w(S,T)$; on peut même s'intéresser, pour des raisons arithmétiques, aux α de la forme $\beta(S)/n$, n entier donné, $\beta(S)$ à valeurs entières ; l'existence de tels multiplicateurs revient à dire que $n.w(S\ ,\ T)$, en tant que 2-cocycle de G à valeurs dans $\underset{\sim}{Z}$, est un cobord. D'où l'utilité d'étudier les groupes de cohomologie de G.

La méthode utilisée consistera à relier la cohomologie du groupe G à celle de l'espace X/G, lequel, étant une surface de Riemann, a des propriétés connues. Si G opérait sans points fixes sur X, la question serait résolue (vu que la cohomologie de X est triviale) par le théorème de Hurewicz and Co :

$$H^p(G\ ;\ A) \approx H^p(X/G\ ;\ A)\ .$$

Mais dans le cas général, il faut tenir compte de l'existence des points fixes possibles de G, et modifier un peu les méthodes usuelles.

1. Groupes discontinus.

Dans ce qui suit on désigne par X un espace topologique (localement compact et dénombrable à l'infini ...) et G un groupe d'automorphismes de X. On fera en dernier lieu les hypothèses suivantes :

(I) : pour tout $x \in X$, le stabilisateur $G(x)$ de x dans G est d'ordre fini ;

(II) : quels que soient x, $y \in X$ il existe des voisinages ouverts $V(x)$, $V(y)$ tels que, pour $s \in G$, $s.V(x)$ ne rencontre $V(y)$ que si $s.x = y$;

(III) : il existe un fermé $D \subset X$ tel que la famille $(s.D)_{s \in G}$ soit un recouvrement localement fini de X ;

(IV) : chaque $s \in G$ autre que e possède au plus un point fixe dans X.

L'hypothèse (II) implique la séparation de X/G ; (III) est l'existence d'un domaine fondamental raisonnable. Les conditions (I), (II), (III) sont évidemment vérifiées par tout groupe discontinu sympathique, y compris pour plusieurs variables complexes. (IV) est évidemment spéciale aux groupes fuchsiens (mais fonctionne aussi dans d'autres cas, par exemple les groupes de Hilbert-Blumenthal associés aux corps algébriques totalement réels).

Noter que, si G est fini, (I), (II) et (III) sont toujours réalisés.

2. Cohomologie de X/G et cochaînes invariantes de X.

Soit A un groupe abélien de coefficients. On utilisera la cohomologie d'Alexander-Spanier. On posera donc

$\mathcal{F}^p(X\ ;\ A)$ = applications $X^{p+1} \to A$

$\mathcal{N}^p(X\ ;\ A)$ = applications $X^{p+1} \to A$ nulles au voisinage de la diagonale de X^{p+1} ;

$F^p(X\ ;\ A)$ = groupe quotient $\mathcal{F}^p(X\ ;\ A)/\mathcal{N}^p(X\ ;\ A)$;
en munissant $F(X\ ;\ A) = \sum F^p(X\ ;\ A)$ de l'opérateur

$$df(x_0\ ,\ \ldots\ ,\ x_{p+1}) = \sum(-1)^i . f(x_0\ ,\ \ldots\ ,\ \hat{x}_i\ ,\ \ldots\ ,\ x_{p+1})$$

on obtient la cohomologie de X à valeurs dans A .

D'autre part, le groupe G opère sur $F^p(X\ ;\ A)$ par l'intermédiaire de la formule

$$f.s(x_0\ ,\ \ldots\ ,\ x_p) = f(s.x_0\ ,\ \ldots\ ,\ s.x_p)\ ,$$

évidemment compatible avec le passage au quotient modulo $\mathcal{N}^p(X\ ;\ A)$. Les cochaînes de X invariantes par G forment un sous-complexe $F(X\ ;\ A)^G$ de $F(X\ ;\ A)$.

PROPOSITION 1. - Dans les hypothèses (I) et (II), la cohomologie de $F(X\ ;\ A)^G$ s'identifie canoniquement à $H(X/G\ ;\ A)$.

DÉMONSTRATION. - Soit π la projection $X \to X/G$. Pour tout ouvert $U \subset X/G$ posons

$$C(U) = \text{complexe des cochaînes invariantes de } \pi^{-1}(U)$$

(ce complexe se définit comme ci-dessus, en remplaçant X par $\pi^{-1}(U)$). Pour $U \supset V$ on a un homomorphisme évident de $C(U)$ dans $C(V)$; donc les $C(U)$ définissent sur l'espace X/G un faisceau différentiel C dont on vérifie, comme pour le faisceau d'Alexander-Spanier, que ses sections forment un complexe isomorphe canoniquement et visiblement à $F(X\ ;\ A)^G$.

Vu les théorèmes généraux sur les faisceaux ([1] théorème 5, par exemple) tout revient à montrer que le faisceau C sur l'espace X/G est fin, et que son faisceau dérivé est trivial : $\mathcal{H}^0(C) = A$, $\mathcal{H}^p(C) = 0$ pour $p \geqslant 1$. (Noter que X/G est paracompact ...).

La première assertion est évidente : toute partition de l'unité sur X/G se remonte, dans X , en une partition de l'unité formée de fonctions invariantes par G , etc.

Pour le second point, il faut prouver ce qui suit : soit U un voisinage ouvert invariant d'un $x \in X$, et soit dans U une cochaîne f invariante telle que $df = 0$; alors, au besoin en rétrécissant U , il y a dans U une cochaîne g invariante telle que $f = dg$ (en degré $\geqslant 1$; en degré 0 il faut prouver que f est localement constante, ce qui est clair). Or vu les axiomes (I) et (II) on peut supposer $U = \bigcup s.V(x)$ où $V(x)$ est stable par $G(X)$, et où $s.V(x)$ ne rencontre $V(x)$ que pour $s \in G(x)$. Les propriétés de f sont :

1° on a, pour chaque $s \in G$, la relation $f(s.x_o , \ldots , s.x_p) = f(x_o , \ldots , x_p)$ dès que les $x_i \in U$ sont assez voisins ;

2° on a $\sum (-1)^i f(x_o , \ldots , \hat{x}_i , \ldots , x_{p+1}) = 0$ dans les mêmes conditions.

Ceci dit, vu que $G(x)$ est fini, on peut supposer, en prenant $V(x)$ assez petit, que l'on a <u>identiquement</u>

$$f(s.x_o , \ldots) = f(x_o , \ldots) \quad \text{pour} \quad s \in G(x) ; \quad x_o , \ldots \in V(x)$$

$$\sum (-1)^i f(x_o , \ldots , \hat{x}_i , \ldots , x_{p+1}) = 0 \quad \text{pour} \quad x_o , \ldots \in V(x) \quad ;$$

si l'on définit une cochaîne de $V(x)$ par

$$g(x_o , \ldots , x_{p+1}) = f(x , x_o , \ldots , x_{p-1})$$

on vérifie trivialement que g est invariante par $G(x)$, et que $dg = f$ dans $V(x)$. Il suffit alors de translater g pour avoir, dans tout U, une cochaîne invariante par G telle que $dg = f$.

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Le faisceau C contient de façon évidente le faisceau d'Alexander de X/G, mais ne lui est identique que si G opère <u>sans points fixes</u>. La raison en est que, au voisinage d'un point fixe x, une cochaîne de X/G, considérée comme cochaîne invariante de X, doit vérifier les relations

$$f(s_o , x_o , \ldots , s_p.x_p) = f(x_o , \ldots , x_p) \quad \text{pour} \quad s_o , \ldots , s_p \in G(x) ,$$

ce qui signifie évidemment beaucoup plus que l'invariance par

$$(x_o , \ldots , x_p) \to (s.x_o , \ldots , s.x_p) .$$

3. <u>Calcul des groupes</u> $H^p(G ; F^q(X ; A))$.

Rappelons que, si F est un groupe abélien sur lequel G opère à droite, on peut définir les groupes $H^p(G ; F)$ à l'aide du complexe $C(G ; F)$ défini comme suit : $C^p(G ; F)$ est l'ensemble des applications $G^{p+1} \to F$ qui vérifient la condition de "covariance"

$$f(s_o t , \ldots , s_p t) = f(s_o , \ldots , s_p)t ,$$

et $C(G\ ;\ F)$ est muni du cobord donné par

$$\delta f(s_o\ ,\ \dots\ ,\ s_{p+1}) = \sum (-1)^i f(s_o\ ,\ \dots\ ,\ \hat{s}_i\ ,\ \dots\ ,\ s_{p+1})\ .$$

On a comme on sait les deux propriétés suivantes :

(i) le groupe $H^o(G\ ;\ F)$ est canoniquement isomorphe à F^G , ensemble des invariants de F ;

(ii) de toute suite exacte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ résulte une suite exacte $0 \to C(G\ ;\ F') \to C(G\ ;\ F) \to C(G\ ;\ F'') \to 0$ et donc une suite exacte de cohomologie

$$\dots \to H^p(G\ ;\ F') \to H^p(G\ ;\ F) \to H^p(G\ ;\ F'') \to H^{p+1}(G\ ;\ F') \to \dots$$

On aura dans la suite à considérer le double complexe

$$\sum C^p(G\ ;\ F^q(X\ ;\ A))$$

et à lui appliquer les suites spectrales valables pour tout complexe double. Pour cette raison, nous aurons besoin de calculer les groupes $H^p(G\ ;\ F^q(X\ ;\ A))$ ce qu'on va faire maintenant, avec le résultat que voici :

PROPOSITION 2. - <u>Supposons que</u> G <u>opère sur</u> X <u>en vérifiant les conditions</u> (I), (II) <u>et</u> (III) <u>et soit</u> X_f <u>l'ensemble des points fixes de</u> G <u>dans</u> X . <u>Alors</u>, <u>pour tout groupe de coefficients</u> A , <u>l'application canonique</u>

$$F^q(X\ ;\ A) \to F^q(X_f\ ;\ A)$$

(restriction à X_f d'une cochaîne de X) <u>induit des isomorphismes</u>

$$H^p(G\ ;\ F^q(X\ ;\ A)) \approx H^p(G\ ;\ F^q(X_f\ ;\ A)) \quad \underline{\text{pour}} \quad p \geqslant 1\ .$$

La démonstration comprend deux parties.

<u>Première partie de la démonstration.</u> - Avec les notations du début du paragraphe 2 , on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{N}^q(X\ ;\ A) & \to & \mathfrak{F}^q(X\ ;\ A) & \to & F^q(X\ ;\ A) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{N}^q(X_f\ ;\ A) & \to & \mathfrak{F}^q(X_f\ ;\ A) & \to & F^q(X_f\ ;\ A) & \to & 0\ ,
\end{array}$$

lequel est commutatif et a pour lignes horizontales des suites <u>exactes</u>. Bien entendu les homomorphismes verticaux consistent à associer à toute application $X^{q+1} \to A$ sa restriction à $(X_f)^{q+1}$.

Appliquant à ces deux suites exactes les suites exactes de cohomologie (paragraphe 3 , propriété (ii)) on obtient un diagramme <u>commutatif</u> (on supprime A dans les notations)

$$\begin{tikzcd}
H^p(G\,;\mathcal{N}^q(X)) \arrow[r] \arrow[d] & H^p(G\,;\mathcal{F}^q(X)) \arrow[r] \arrow[d] & H^p(G\,;F^q(X)) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+1}(G\,;\mathcal{N}^q(X)) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+1}(G\,;\mathcal{F}^q(X)) \arrow[d] \\
H^p(G\,;\mathcal{N}^q(X_f)) \arrow[r] & H^p(G\,;\mathcal{F}^q(X_f)) \arrow[r] & H^p(G\,;F^q(X_f)) \arrow[r] & H^{p+1}(G\,;\mathcal{N}^q(X_f)) \arrow[r] & H^{p+1}(G\,;\ldots)
\end{tikzcd}$$

dont les deux lignes horizontales sont des suites <u>exactes</u>. Vu le lemme des cinq, la proposition sera donc établie si l'on montre que, pour $p \geqslant 1$, les applications

$$H^p(G\,;\mathcal{N}^q(X)) \rightarrow H^p(G\,;\mathcal{N}^q(X_f))$$
$$H^p(G\,;\mathcal{F}^q(X)) \rightarrow H^p(G\,;\mathcal{F}^q(X_f))$$

sont des <u>isomorphismes sur</u>.

<u>Deuxième partie de la démonstration</u>. - Soit $\mathcal{Y}^q$ l'ensemble des applications $X^{q+1} \rightarrow A$ qui sont nulles sur $(X_f)^{q+1}$; on a évidemment la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{Y}^q \rightarrow \mathcal{F}^q(X) \rightarrow \mathcal{F}^q(X_f) \rightarrow 0 \;;$$

utilisant la suite exacte de cohomologie pour G on voit que le second isomorphisme indiqué à la fin de la page précédente sera établi si l'on prouve que

(1) $$H^p(G\,;\mathcal{Y}^q) = 0 \quad \text{pour} \quad p \geqslant 1 \;;$$

de même, le premier isomorphisme résultera de

(2) $$H^p(G\,;\mathcal{N}^q(X) \cap \mathcal{Y}^q) = 0 \quad \text{pour} \quad p \geqslant 1 \,.$$

Cela dit, posons $Y = X^{q+1}$, $E = (X_f)^{q+1}$, partie fermée de Y , D = diagonale de Y . Si l'on fait opérer G sur Y par $s.(x_0 , \ldots , x_q) = (s.x_0 , \ldots , s.x_q)$ il est clair que les axiomes (I) , (II) et (III) sont vérifiés dans Y . En particulier, l'axiome (III), existence d'un "domaine fondamental", implique l'existence sur Y d'une fonction $\theta(y)$, à valeurs 0 ou 1 , telle que les fonctions $\theta(s.y)$ forment une famille localement finie et vérifient

(3) $$\sum_{s \in G} \theta(s.y) = n(y) = \text{ordre de } G(y)$$

pour tout $y \in Y$.

Or $\mathcal{Y}^q$ n'est autre que l'ensemble des applications $Y \to A$ nulles sur E, et il est visible que E <u>contient les points fixes de</u> G <u>dans</u> Y ; autrement dit, $n(y) = 1$ en dehors de E. Considérons alors un p-cocycle de G à valeurs dans $\mathcal{Y}^q$; c'est un système de fonctions

$$f_{s_o, \ldots, s_p}(y)$$

définies sur Y, à valeurs dans A, et vérifiant les conditions suivantes :

(4) $$f_{s_o, \ldots, s_p}(y) = 0 \quad \text{sur } E \;;$$

(5) $$f_{s_o t, \ldots, s_p t}(y) = f_{s_o, \ldots, s_p}(t.y) \quad (\text{"covariance"})$$

(6) $$\sum(-1)^i f_{s_o, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_{p+1}}(y) = 0 \,.$$

Posons alors, conformément à une astuce classique,

(7) $$g_{s_o, \ldots, s_{p-1}}(y) = \sum_{s \in G} \theta(s.y) f_{s, s_o, \ldots, s_{p-1}}(y) \;;$$

il est trivial de vérifier que g satisfait aux conditions (4) et (5), et que de plus

(8) $$\sum(-1)^i g_{s_o, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_p}(y) = n(y).f_{s_o, \ldots, s_p}(y) \;;$$

mais <u>comme</u> $n(y) = 1$ <u>là où</u> f <u>ne s'annule pas</u> la relation (8) montre que f est le cobord de la $(p-1)$-cochaîne g à valeurs dans $\mathcal{Y}^q$; d'où la relation (1).

Pour démontrer (2) on procède évidemment de même ; la condition (4) doit alors être vérifiée non seulement pour $y \in E$ mais aussi pour y assez voisin de la diagonale D de Y, et tout revient à constater que g vérifie aussi les mêmes conditions ; la raison en est évidemment que, si l'on se place dans (7) au voisinage d'un point y_o de la diagonale, la somme (7) ne fait intervenir qu'un nombre <u>fini</u> de valeurs de s, et comme, pour $s, s_o, \ldots, s_{p-1}$ donnés, la fonction $f_{s, s_o, \ldots, s_{p-1}}(y)$ est nulle dans un voisinage de y_o on voit bien que le premier membre de (7) est nul au voisinage de y_o. La proposition 2 est donc démontrée.

4. Utilisation des suites spectrales.

Les propositions 1 et 2 établies, nous pouvons considérer le complexe double

$$C = C(G\ ;\ F(x)) = \sum C^p(G\ ;\ F^q(X)),$$

muni du cobord $d : F^q(X) \to F^{q+1}(X)$, et du cobord $\delta : C^p(G\ ;\ F) \to C^{p+1}(G\ ;\ F)$. On désignera par $H^n(C)$ les groupes de cohomologie de C calculés à l'aide de la différentielle "totale" égale à $d + (-1)^p\delta$ sur $C^p(G\ ;\ F^q)$.

La première suite spectrale associée à C a pour terme E_1 la d-cohomologie de C, la différentielle d_1 étant induite par la différentielle δ. Il s'ensuit facilement que

$$'E_1^{p,q} = C^p(G\ ;\ H^q(X\ ;\ A))$$

muni de δ, et par suite que

(9) $$'E_2^{p,q} = H^p(G\ ;\ H^q(X\ ;\ A)).$$

(On introduit un signe ' pour la première suite spectrale ; la seconde sera indiquée par un signe ").

En particulier, supposons que la cohomologie de X soit triviale : $H^q(X\ ;\ A) = \begin{cases} A & \text{pour } q = 0 \\ 0 & \text{pour } q \geq 1 \end{cases}$. Alors les seuls termes non nuls de E_2 sont les $'E_2^{n,o} = H^n(G\ ;\ A)$, d'où par des raisonnements connus :

(10) $H^n(C) \approx H^n(G\ ;\ A)$ si la cohomologie de X est triviale.

Passons maintenant à la seconde suite spectrale. On aura évidemment

$$''E_1^{p,q} = H^q(G\ ;\ F^p(X\ ;\ A)) \text{ muni de } d : F^p(X\ ;\ A) \to F^{p+1}(X\ ;\ A).$$

En particulier on aura $''E_1^{p,o} = F^p(X\ ;\ A)^G$ muni de d, d'où, en utilisant la proposition 1 :

(11) $$''E_2^{p,o} = H^p(F(X\ ;\ A)^G \approx H^p(X/G\ ;\ A)$$

Pour $q \geqslant 1$, la proposition 2 montre que

(12) $''E_1^{p,q} = H^q(G\ ;\ F^p(X_f\ ;\ A))$ muni de $F^p(X_f\ ;\ A) \xrightarrow{d} F^{p+1}(X_f\ ;\ A)$.

Cette formule permet, comme on le verra, de calculer complètement le terme $''E_2$ dans certains cas simples, à savoir le cas où X_f est discret (groupes fuchsiens) et aussi le cas où G est un groupe cyclique d'ordre premier, car alors G opère trivialement sur X_f, donc sur $F^p(X_f\ ;\ A)$, ce qui permet d'expliciter complètement $''E_1^{p,q}$ vu qu'on connait les groupes de cohomologie des groupes cycliques.

Les résultats qu'on va donner au n° 5 sont dûs à SERRE.

5. Application aux groupes fuchsiens.

On va maintenant faire l'hypothèse (IV), ou plus généralement supposer que l'ensemble des points fixes de G est discret. On peut alors calculer le terme $''E_2$ de la suite spectrale considérée à la page précédente. En effet, comme X_f est discret, on a canoniquement

$$F^p(X_f\ ;\ A) = F^o(X_f\ ;\ A) = \text{applications } X_f \to A \tag{13}$$

en associant à une p-cochaîne $f(x_o, \dots, x_p)$ de X_f la fonction $f(x, \dots, x)$; modulo l'identification (13) il est visible que la différentielle $d : F^p(X_f\ ;\ A \to F^{p+1}(X_f\ ;\ A)$ est nulle si p est pair, et est l'application identique $F^o(X_f\ ;\ A) \to F^o(X_f\ ;\ A)$ si p est impair, de sorte que l'on a un résultat analogue pour la différentielle d_1 de $''E_1$. On tire immédiatement de là les résultats suivants :

$$''E_2^{p,o} = H^p(X/G\ ;\ A) \quad ; \quad ''E_2^{o,q} = H^q(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A)) \quad ; \quad ''E_2^{p,q} = 0 \quad \text{si} \quad p \text{ et } q \neq 0 .$$

Or dans une telle situation on sait ([2], proposition 3 page 437) qu'on a une suite exacte

$$0 \to {''E_2^{1,o}} \to H^1(C) \to {''E_2^{o,1}} \to {''E_2^{2,o}} \to H^2(C) \to {''E_2^{o,2}} \to \dots$$

Si donc la cohomologie de X est triviale (auquel cas on a (10)) il viendra une suite exacte

$$0 \to H^1(X/G\ ;\ A) \to H^1(G\ ;\ A) \to H^1(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A)) \to H^2(X/G\ ;A) \to H^2(G\ ;A) \to \dots$$

Prenons alors X = demi-plan $I(z) > 0$, et pour G un groupe fuchsien. Comme $\dot{X}/G$ est de dimension 2, on a $H^n(X/G\ ;\ A) = 0$ pour $n \geqslant 3$, de sorte que la suite exacte précédente donne des isomorphismes

$$H^n(G\ ;\ A) \approx H^n(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A)) \text{ pour } n \geqslant 3 \quad ; \tag{14}$$

si la surface de Riemann X/G est <u>non compacte</u> on a aussi $H^2(X/G\ ;\ A) = 0$; donc (13) est encore valable pour $n = 2$, et la suite exacte trouvée se réduit à la suite exacte suivante :

$$0 \to H^1(X/G\ ;\ A) \to H^1(G\ ;\ A) \to H^1(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A)) \to 0\ . \tag{15}$$

Si au contraire la surface de Riemann X/G est <u>compacte</u> on a seulement (14) et une suite exacte à 6 termes (qu'il devrait être possible de décanuler).

Pour obtenir des résultats complets, il faut encore calculer les groupes $H^n(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A))$, ce qui est facile. Pour un $x \in X_f$ désignons en effet par $M(x)$ l'ensemble des applications $G \to A$ constantes sur les classes $s.G(x)$; il est clair que

$$F^o(X_f\ ;\ A) \approx \prod_{x \bmod G} M(x)$$

d'où

$$H^n(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A)) \approx \prod_{x \bmod G} H^n(G\ ;\ M(x)) \approx \prod_{x \bmod G} H^n(G(x)\ ;\ A)$$

en vertu de résultats connus.

Dans le cas des groupes fuchsiens, on sait que $G(x)$ est cyclique d'ordre $n(x)$. Si donc G a un nombre fini de classes de points fixes, d'ordres $n_1, \ldots, n_k$, on aura

$$H^p(G\ ;\ F^o(X_f\ ;\ A)) \approx \prod H^p(Z_{n_i}\ ;\ A)\ ,$$

groupes bien connus.

EXEMPLE. - G = <u>groupe modulaire</u>. X/G = sphère moins un point, donc (15) montre que (14) vaut aussi pour $n = 1$ (et $n = 2$ vu X/G non compacte). Ici on a deux entiers n_i , savoir 2 et 3 . Donc il vient

$$H^p(G\ ;\ A) = H^p(Z_2\ ;\ A) \times H^p(Z_3\ ;\ A)$$

pour tout groupe A sur lequel G opère trivialement. Par exemple :

$$H^p(G\ ;\ Z) = Z_2 \times Z_3 \quad \text{si } p \text{ est pair,}$$

$= 0$ si p est impair.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Théorèmes fondamentaux de la théorie des faisceaux, Séminaire Cartan, t. 3, 1950/51.

[2] SERRE (Jean-Pierre). - Homologie singulière des espaces fibrés, Annals of Math., t. 54, 1951, p. 425-505 (Thèse Sc. math. Paris. 1951).