SÉMINAIRE N. BOURBAKI

J.-C. HERZ

Caractérisation des caractères des groupes finis

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 92, p. 385-390

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__385_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1954)

CARACTÉRISATION DES CARACTÈRES DES GROUPES FINIS.

par J.-C. HERZ.

(d'après R. BRAUER, [2])

1. Introduction.

Le travail de R. BRAUER s'ordonne autour d'un théorème principal qui donne une caractérisation des caractères généralisés d'un groupe fini $\mathfrak{G}$ en tant que fonctions complexes des éléments de $\mathfrak{G}$. De nombreux résultats, classiques ou inédits, en sont déduits.

Un caractère généralisé de $\mathfrak{G}$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des caractères irréductibles de $\mathfrak{G}$. Le théorème principal fait intervenir la notion de groupe élémentaire : produit direct d'un p-groupe et d'un groupe cyclique d'ordre premier à p. Il s'énonce :

THÉORÈME 1. - Une fonction complexe $\Theta(G)$ définie sur $\mathfrak{G}$ est un caractère généralisé si et seulement si

(I) Θ est une fonction de classe (c'est-à-dire prend la même valeur pour deux éléments G et G' conjugués).

(II) Pour tout sous-groupe élémentaire $\mathfrak{E}$ de $\mathfrak{G}$, la restriction de Θ à $\mathfrak{E}$ est un caractère généralisé de $\mathfrak{E}$.

Ce théorème fournit une caractérisation des caractères irréductibles de $\mathfrak{G}$.

THÉORÈME 2. - La fonction Θ est un caractère irréductible de $\mathfrak{G}$, si et seulement si elle vérifie les conditions (I), (II),

(III) la valeur moyenne de $|\Theta|^2$ est 1.

(IV) le nombre $\Theta(1)$ est positif ou nul.

2. Démonstration du théorème 1.

La condition est évidemment nécessaire. Pour démontrer qu'elle est suffisante, il suffirait d'utiliser un théorème sur les caractères induits donné précédemment par l'auteur [1]. Il donne ici une démonstration plus simple, en se plaçant à un point de vue plus général.

Il considère un corps quelconque K de caractéristique nulle muni d'une famille $\mathfrak{F}$ de valuations exponentielles ν, et il appelle entier de K, tout élément x

tel que $\nu(x) \geqslant 0$ pour toute valuation ν de $\mathfrak{F}$, et <u>anneau de caractères</u> de $\mathfrak{G}$ sur K, l'ensemble des combinaisons linéaires $\Theta(G) = \sum a_i \chi_i(G)$ des caractères absolument irréductibles de $\mathfrak{G}$, dont les coefficients sont des entiers de K.
Le théorème principal prend alors la forme suivante :

THÉORÈME 1*. - Soit $\mathfrak{G}$ un groupe fini. Une fonction $\Theta(G)$ sur $\mathfrak{G}$ à valeurs dans une extension de K appartient à l'anneau de caractères de $\mathfrak{G}$ sur K si et seulement si :

(I) Θ est une fonction de classe sur $\mathfrak{G}$;

(II_K) pour tout sous-groupe élémentaire $\mathfrak{E}$ de $\mathfrak{G}$, la restriction de Θ à $\mathfrak{E}$ appartient à l'anneau des caractères de $\mathfrak{E}$ sur K.

La nécessité étant évidente, indiquons les grandes lignes de la démonstration de la réciproque. On appelle g l'ordre de $\mathfrak{G}$. On considère une fonction de classe $\Theta(G)$ vérifiant les conditions (I) et (II_K). Or toute fonction de classe est une combinaison linéaire

$$\Theta(G) = \sum a_i \chi_i(G) ,$$

les a_i étant donnés par

$$a_i = \frac{1}{g} \sum_G \Theta(G) \chi_i(G^{-1})$$

(relationsd'orthogonalité des caractères).

On montre d'abord que les a_i, <u>a priori</u> dans une extension de K, appartiennent à K lui-même. Pour cela on montre, grâce à (II_K), que tout a_i est invariant par toute transformation appartenant au groupe de Galois de $K(\varepsilon)$ sur K, ε étant une racine g-ième primitive de l'unité.

Reste à montrer que les a_i sont des entiers de K. C'est immédiat si $\nu(p) = 0$ pour tout diviseur premier p de g. Supposons donc que $\nu(p) > 0$ pour un diviseur premier fixé de g. On construira un sous-groupe élémentaire $\mathfrak{E}$ de $\mathfrak{G}$ comme produit direct d'un sous-groupe cyclique $\{A\}$ d'ordre a premier à p et d'un p-sous-groupe de Sylow $\mathfrak{P}$ du normalisateur de A. Si $\zeta_1 \dots \zeta_a$ et $\theta_1 \dots \theta_h$ désignent respectivement les caractères irréductibles de $\{A\}$ et de $\mathfrak{P}$, on a, pour $P \in \mathfrak{P}$,

$$\Theta(A^n P) = \sum_{\rho,\sigma} \sum_i a_i S_{i\rho\sigma} \zeta_\rho(A^n) \theta_\sigma(P) = \sum_\sigma \sum_i a_i w_{i\sigma} \theta_\sigma(P)$$

où les $S_{i\rho\sigma}$ sont des entiers $\geqslant 0$.

Les éléments $w_{i\sigma}$ jouent un rôle capital dans la suite de la démonstration. On s'appuie sur un lemme :

LEMME 1. - Soit m le nombre de classes de $\mathfrak{G}$ rencontrant $A\mathfrak{P}$. On peut choisir m valeurs de σ telles que, $W_0 = (w_{i\sigma})$ étant la matrice correspondante, W'_0 sa transposée, $\overline{W}_0$ sa conjuguée, on ait

$$\nu(\det (W'_0 \overline{W}_0)) = 0 .$$

On considère alors les sous-groupes élémentaires $\mathfrak{G}_1 , \mathfrak{G}_2 , \dots , \mathfrak{G}_t$ construits comme $\mathfrak{G}$ à partir de tous les éléments $A_1 , \dots , A_t$ de $\mathfrak{G}$ (non conjugués deux à deux) dont l'ordre est premier à p. La matrice $W = (W_1 , \dots , W_t)$ se trouve être une matrice carrée. On montre, en application du lemme 1, que $\nu(\det W) = 0$, et on en déduit immédiatement $\nu(a_i) \geqslant 0$, d'où le théorème.

3. <u>Conséquences du théorème 1</u>.

Le théorème 2 énoncé plus haut, résulte immédiatement du théorème 1. On a ensuite

THÉORÈME 3. - Tout caractère χ d'un groupe fini $\mathfrak{G}$ peut s'écrire sous la forme $\chi = \sum_i c_i \psi_i^*$, où les c_i sont des entiers, les ψ_i des caractères irréductibles de sous-groupes élementaires $\mathfrak{E}_i$, et ψ_i^* le caractère de $\mathfrak{G}$ induit par ψ_i.

LEMME 3. - Si $\mathfrak{E} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{P}$ est un sous-groupe élémentaire et ψ un caractère irréductible de $\mathfrak{E}$, il existe un sous-groupe $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{A} \times \mathfrak{P}_0$ $(\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P})$ de $\mathfrak{E}$ et un caractère <u>linéaire</u> ψ_0 de $\mathfrak{E}_0$ tels que ψ soit le caractère de $\mathfrak{E}$ induit par ψ_0.

THÉORÈME 4. - (conséquence des théorème 3 et lemme 3). - Tout caractère de $\mathfrak{G}$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de caractères de $\mathfrak{G}$ induits par des caractères linéaires de sous-groupes élémentaires de $\mathfrak{G}$.

THÉORÈME 5. - Pour qu'une fonction Θ définie sur $\mathfrak{G}$ appartienne à l'anneau de caractères de $\mathfrak{G}$ sur K, il faut et il suffit que

(I) Θ soit une fonction de classe ;

(II_K^*) si λ est un caractère linéaire d'un sous-groupe élémentaire $\mathfrak{E}$ d'ordre e de $\mathfrak{G}$, le nombre $\frac{1}{e} \sum_E \Theta(E) \lambda(E^{-1})$ $(E \in \mathfrak{E})$ soit un entier de K.

THÉORÈME 6. - La fonction $\Theta(G)$ est un caractère irréductible du groupe fini $\mathfrak{G}$ si et seulement si

(I) $\Theta(G)$ est une fonction de classe ;

(II^*) $\mathfrak{E}$ étant un sous-groupe élémentaire d'ordre e de $\mathfrak{G}$ et λ un caractère linéaire de $\mathfrak{G}$, le nombre $\frac{1}{e}\sum_{E} \Theta(E)\, \lambda(E^{-1})$ $(E \in \mathfrak{E})$ est un entier ;

(III) $\frac{1}{g}\sum_{G} |\Theta(G)|^2 = 1$;

(IV) $\Theta(1) \geqslant 0$.

4. Caractères linéaires de $\mathfrak{G}$.

Le théorème 2 donne dans le cas d'un caractère linéaire :

THÉORÈME 7. - $\Theta(G)$ est un caractère linéaire de $\mathfrak{G}$ si et seulement si

($I^{\#}$) $\Theta(G)$ est une fonction de classe, non identiquement nulle,

($II^{\#}$) $\Theta(AB) = \Theta(A)\,\Theta(B)$ si A et B sont deux éléments permutables d'ordres premiers entre eux ou si A et B sont éléments d'un p-sous-groupe de $\mathfrak{G}$.

Ce théorème permet à son tour d'établir le

THÉORÈME 8. - A tout nombre premier p_j divisant l'ordre de $\mathfrak{G}$, associons un p_j-sous-groupe de Sylow $\mathfrak{P}_j$, et soit $\mathfrak{P}_j^*$ le sous-groupe de $\mathfrak{P}_j$ engendré par les quotients $A^{-1}B$ d'éléments A , B de $\mathfrak{P}_j$ conjugués dans $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}'$ étant le commutateur de $\mathfrak{G}$, le quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ est isomorphe au produit direct de tous les groupes $\mathfrak{P}_j/\mathfrak{P}_j^*$.

Ce théorème a deux corollaires :

COROLLAIRE 1. - Le groupe $\mathfrak{P}_j^*$ est l'intersection de $\mathfrak{G}'$ avec $\mathfrak{P}_j$.

COROLLAIRE 2. - Un groupe $\mathfrak{G}$ est égal à son commutateur si et seulement si $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^*$ pour tout sous-groupe de Sylow $\mathfrak{P}$.

Le groupe $\mathfrak{H}^*$ associé comme précédemment à un sous-groupe quelconque $\mathfrak{H}$ possède des propriétés intéressantes :

THÉORÈME 9. - Si $\mathfrak{H}$ est un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{G}$, et si ω est un caractère linéaire de $\mathfrak{H}$ dont le noyau contient $\mathfrak{H}^*$, ω^n peut être étendu à un caractère linéaire de $\mathfrak{G}$.

THÉORÈME 9*. - Il existe un sous-groupe invariant $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{G}$ pour lequel $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ est isomorphe à un sous-groupe $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}^*$ tel que $\mathfrak{T}$ contienne les puissances n-ièmes de tous les éléments de $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}^*$ et que $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}$ soit l'ensemble des éléments de $\mathfrak{H}$ dont la n-ième puissance est dans $\mathfrak{H}^*$.

COROLLAIRE 1. - Si $(\mathfrak{G} : \mathfrak{H})$ est premier à $(\mathfrak{H} : \mathfrak{H}^*)$, on a $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{H}/\mathfrak{H}^*$, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$.

COROLLAIRE 2. - Si $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}^*$ contient les puissances n-ièmes des éléments de $\mathfrak{H}$.

THÉORÈME 10. - $\mathfrak{H}^*$ est le sous-groupe de $\mathfrak{H}$ engendré par les quotients AB^{-1} des éléments de $\mathfrak{H}$ d'ordres puissances de nombres premiers qui sont conjugués dans $\mathfrak{G}$.

THÉORÈME 10*. - Soient $\mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_m$ un système de sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{H}$ pour les divers nombres premiers p_1 , p_2 , ... , p_m divisant l'ordre de $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{H}^*$ peut être défini comme le sous-groupe de $\mathfrak{H}$ engendré par $\mathfrak{H}'$ et l'ensemble des quotients UV^{-1} où U et V appartiennent au même $\mathfrak{Q}_i$ et sont conjugués dans $\mathfrak{G}$.

COROLLAIRE. - Si $\mathfrak{H}$ est tel que deux éléments U , V d'un sous-groupe de Sylow $\mathfrak{Q}_i$ de $\mathfrak{H}$ conjugués dans $\mathfrak{G}$ le soient aussi dans $\mathfrak{H}$ $(i = 1 , \dots , m)$, $\mathfrak{H}^*$ est égal à $\mathfrak{H}'$.

5. Un théorème de Frobenius.

R. BRAUER retrouve par l'application des théorèmes 1^* et 5 le théorème suivant dû à FROBENIUS :

THÉORÈME 11. - Soit un groupe fini $\mathfrak{G}$, d'ordre g , $\mathfrak{H}$ une partie invariante de $\mathfrak{G}$, et n un entier naturel donné. On définit une fonction $\Theta(G ; \mathfrak{H})$ sur $\mathfrak{G}$ par les équations :

$$\Theta(G ; \mathfrak{H}) = \frac{g}{(g,n)} \qquad \text{si } G^n \in \mathfrak{H} ,$$
$$\Theta(G ; \mathfrak{H}) = 0 \qquad \text{si } G^n \notin \mathfrak{H} ,$$

Dans ces conditions, $\Theta(G , \mathfrak{H})$ appartient à l'anneau de caractères de $\mathfrak{G}$ sur le corps des racines g-ièmes de l'unité.

6. Applications aux caractères modulaires.

Le théorème 1 a une application immédiate.

THÉORÈME 12. - Soit p un nombre premier, p^α la plus haute puissance de p divisant l'ordre g du groupe $\mathfrak{G}$. Si Φ est un caractère p-modulaire de $\mathfrak{G}$, on obtient un caractère généralisé (ordinaire) de $\mathfrak{G}$ en posant $\Theta(G) = p^\alpha \Phi(G)$

si G est p-régulier, = 0 sinon.

Cette construction permet d'établir :

THÉORÈME 13. - Le déterminant de la matrice des invariants de Cartan est une puissance de p.

Enfin, grâce aux propriétés des nombres de décomposition de $\mathfrak{G}$ (théorème 14), on a :

THÉORÈME 15. - Si G est restreint aux éléments p-réguliers de $\mathfrak{G}$, tout caractère modulaire irréductible $\Phi_j(G)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire $\sum_i a_i \chi_i(G)$, où les entiers a_i ne dépendant pas de G.

THÉORÈME 16. - Les caractères $\Phi_j(G)$ s'annulent pour tous les éléments p-singuliers de $\mathfrak{G}$.

THÉORÈME 17. - Si $\Theta(G)$ est une fonction de classe sur $\mathfrak{G}$ qui s'annule pour tous les éléments p-singuliers de $\mathfrak{G}$, $\Theta(G)$ est une combinaison linéaire $\Theta(G) = \sum_i s_i \Phi_i(G)$, à coefficients complexes s_i. Si $\Theta(G)$ est un caractère généralisé de $\mathfrak{G}$ qui s'annule pour tous les éléments, p-singuliers, les s_i sont des entiers.

On peut se demander comment caractériser les caractères Φ_i parmi les fonctions de classe qui s'annulent pour tous les éléments p-singuliers.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRAUER (Richard). - On Artin's L-series with general group characters, Annals of Math., t. 48, 1947, p. 502-514.

[2] BRAUER (Richard). - A characterization of the characters of groups of finite order, Annals of Math., t. 57, 1953, p. 357-377.