ANDRÉ NÉRON

Le lemme d'Enriques-Severi

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 94, p. 399-407

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__399_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1954)

LE LEMME D'ENRIQUES-SEVERI

par André NÉRON

(d'après O. ZARISKI [3])

1. Préliminaires.

Toutes les variétés considérées sont algébriques et plongées dans un même espace projectif S^n. Soit V une variété et soit $P \in V$; on dit que V est normale en P si l'anneau local de V et P, relativement à tout corps de définition de V, est intégralement fermé. On dit que V est normale si elle est normale en tous ses points.

A toute fonction f sur V on sait associer son diviseur (f). Si V est normale, on a $(f) = \sum_C v_C(f)$, somme étendue à tous les V-diviseurs irréductibles C et dans laquelle v_C désigne la valuation attachée à l'anneau local de C dans V. Deux V-diviseurs C et C' sont linéairement équivalents (et on écrit $C \equiv C'$) s'il existe une fonction f sur V telle que $C - C' = (f)$.

Dans ce qui suit, V désignera toujours une variété normale. Soit Ω le domaine universel (qu'on identifie au corps des "constantes") et soit $\mathcal{L}$ un Ω-module de fonctions sur V de dimension finie. Alors il existe un V-diviseur positif D tel que $(f) + D$ soit positif pour toute $(f) \in \mathcal{L}$. L'ensemble L des diviseurs positifs $(f) + D$ est, par définition, un système linéaire sur V. Il a une structure d'espace projectif sur Ω. Tout corps de définition de V, de D et des éléments d'une base de $\mathcal{L}$ s'appelle un corps de définition de L. Pour $\mathcal{L}$ donné, il existe un D minimal et un seul, et le système L correspondant est sans composante fixe.

L est dit complet s'il n'est pas contenu dans un système linéaire plus grand. Soient L un système linéaire et C_o un diviseur ; l'ensemble des D tels que $C_o + D \in L$ est un système linéaire, noté $L - C_o$. Il est complet si L est complet.

Les hypersurfaces d'ordre m découpent sur V un système linéaire, noté L_m

THÉORÈME 1. - L_m est contenu dans un système linéaire complet $|L_m|$, et on a $L_m = |L_m|$ pour m assez grand.

En effet, soient R_m le Ω-module des classes (mod V) des formes homogènes de degré m dans S^n, et soit I_m sa fermeture intégrale. Soit $C_m \in L_m$ la trace sur V de l'hypersurface $f_m = 0$, et soit $\bar{f}_m$ la classe (mod V) de f_m. On montre facilement, compte tenu de la normalité de V, que pour tout $D \equiv C_m$, on a $D - C_m = (g/\bar{f}_m)$, avec $g \in I_m$. Le théorème résulte de ce que I_m est un R_m-module fini et est égal à R_m pour m assez grand.

COROLLAIRE. - Tout système linéaire est contenu dans un système linéaire complet.

Par $D \in L$ on peut en effet faire passer une hypersurface H_m ne contenant pas V. Posons $H_m.V = D + C$. Le système linéaire L est contenu dans le système linéaire complet $|L_m| - C$.

Le système complet contenant L sera dans la suite noté $|L|$. On montre que tout corps de définition de L est un corps de définition de $|L|$. Pour tout V-diviseur D, on posera $\ell(D) = \dim|D| + 1$. L'entier $\ell(D)$ est aussi la dimension du module des f telles que $(f) \geqslant -D$.

Le théorème de Bertini (que MATSUSAKA a étendu au cas abstrait) affirme que si L n'a pas de composante fixe et s'il n'est pas "composé avec un pinceau" (c'est-à-dire si tous les éléments de L ne sont pas composés d'un nombre fini de V-diviseurs appartenant à un système linéaire de dimension 1), L est irréductible (c'est-à-dire tout élément générique de $\underline{L}$ est irréductible).

Ce théorème s'applique en particulier à L_m. De plus, tout élément générique de L_m est normal ([2], cf. [1]).

Pour tout système linéaire L et pour toute sous-variété C de V, les C-diviseurs $D.C$ (avec $D \in L$ tel que $D.C$ soit défini) forment un système linéaire, appelé C-trace de L, et noté $L.C$. Lorsque $\dim C = \dim V - 1$, on a de plus

$$\dim (L.C) = \dim L - \dim (L - C) - 1 \tag{1}$$

2. Le lemme d'Enriques-Severi.

En voici l'énoncé, sous la forme due à ZARISKI :

THÉORÈME 2. - Soit V^r une variété normale $(r \geqslant 2)$ et soit D un V-diviseur. Alors, en désignant par C_m la trace sur V d'une hypersurface générique H_m de degré m, on a $|D.C_m| = |D|.C_m$ (autrement dit $|D|.C_m$ est complet) pour m assez grand.

Ce lemme joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème de Riemann-Roch pour les surfaces (voir plus loin). Il permet d'obtenir Riemann-Roch pour toute surface normale dans le cas abstrait et sans utiliser le théorème de réduction des singularités.

3. Réduction du problème.

Supposons le théorème démontré pour $|D| = L_s$ (s assez grand pour que L_s soit complet), et montrons qu'il est valable pour tout $|D|$.

Soit en effet $D_m \in |D.C_m|$. Il existe un j tel que $L_j - D$ soit irréductible (appliquer le théorème de Bertini) et complet. Soit donc $Y \in L_j - D$ irréductible. Pour m assez grand, on a $D_m + C_m.Y \in L_j.C_m$ puisque, par hypothèse $L_j.C_m$ est complet. Autrement dit, $D_m + C_m.Y = H'_j.C_m$, où H'_j est une hypersurface d'ordre j. Prenons $m > j$. Alors $Y \subset H'_j$, car sinon $H'_j.Y$ serait défini, et on aurait

$$H'_j.Y \geqslant C_m.Y = H_m.Y$$

ce qui est incompatible avec le théorème de Bezout. Donc on a

$$D_m = E.C_m \quad \text{avec} \quad E = H'_j.V - Y \in |D| .$$

4. Démonstration dans le cas $|D| = L_s$.

On va démontrer dans ce cas le théorème plus précis suivant :

THÉORÈME 2'. – Soit (s, m) un couple d'entiers (s assez grand pour que L_s soit complet). Alors il existe un entier q ne dépendant que de V tel que $L_s.C_m$ soit complet dès que $m - \varepsilon \geqslant q$.

Pour tout triplet d'entiers i, m, s $(i \geqslant m - s > 0)$ et pour tout $D \in |L_s.C_m|$, posons

$$M_i(C_m, D) = (L_i.C_m) \cap ((L_{s+i}.C_m) - D) .$$

Dans ce qui suit, s est supposé assez grand pour que L_s soit complet.

LEMME. – Soit $C_{m1} \in L_1.C_m$. Alors on a

$$\dim M_i(C_m, D + C_{m1}) - \dim M_i(C_m, D) \leqslant d_{s+i+1-m}(C_1)$$

où $d_{s+i+1-m}(C_1)$ désigne la déficience $\dim|N| - \dim N$ du système linéaire $N = L_{s+i+1-m}(C_1)$.

Il suffit de montrer qu'il existe une application linéaire projective u de $M_i(C_m, D + C_{ml})$ dans $|N|$ telle que $u^{-1}(N) \subset M_i(C_m . D)$. Pour définir u, on procède comme suit. Soit $C_m = H_m . V$. A tout $A \in M_i(C_m, D + C_{ml})$ on peut associer une hypersurface H_{s+i+1} telle que $A + D + C_{ml} = H_{s+I+1} . C_m$ et supposer de plus que $A \rightarrow H_{s+i+1}$ est une application linéaire projective biunivoque.
On pose

(2) $$u(A) = (H_{s+i+1} - H_m) . C_1 .$$

Soit maintenant $A \in u^{-1}(N)$. On a une ralàtion de la forme

(3) $$u(A) = H_{s+i+1-m} . C_1$$

La comparaison de (2) et (3) montre qu'il existe une hypersurface H'_{s+i+1} du pinceau linéaire défini par H_{s+i+1} et $H_{s+i+1-m} + H_m$ qui contient C_1. Compte tenu de $H_m \supset C_m$, on a $H'_{s+i+1} . C_m = H_{s+i+1} . C_m = A + D + C_{ml}$. Or $H'_{s+i+1} . V - C_1$ appartient à $|L_{s+i}|$, donc à L_{s+i} qui est complet, donc est de la forme $H_{s+i} . V$. Donc $H_{s+i} . C_m = A + D$. Donc $A \in M_i(C_m, D)$.

COROLLAIRE. - <u>On a</u>

$$\dim L_i . C_m - \dim M_i(C_m, D) \leq \dim L_{i+1} . C_m - \dim M_{i+1}(C_m . D) + d_{s+i+1-m}(C_1)$$

En effet, considérons l'application linéaire projective biunivoque v de $L_i . C_m$ dans $L_{i+1} . C_m$ définie par $v(A) = A + C_{ml}$. On a évidemment

$$\dim L_{i+1} . C_m - \dim M_{i+1}(C_m, D) \geqslant \dim L_i . C_m - \dim v^{-1}(M_{i+1}(C_m, D))$$

et le corollaire s'obtient en constatant que

$$M_i(C_m, D + C_{ml}) \supset v^{-1}(M_{i+1}(C_m, D)) \supset M_i(C_m, D)$$

Du corollaire, on déduit par sommation

$$\dim L_{m-s} . C_m - \dim M_{m-s}(C_m, D) \leq d$$

où $d = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(C_1)$ est fini.

Or considérons L_{m-s} et son sous-système $M_{m-s}(D)$ dont la trace sur C_m est $M_{m-s}(C_m, D)$. D'après (1), (paragraphe 1), les deux systèmes ont mêmes dimensions que leurs traces. Donc

(4) $$\dim L_{m-s} - \dim M_{m-s}(D) \leq d .$$

De (4) on déduit l'existence d'un q tel que $M_{m-s}(D)$ soit irréductible pour $m - s \geq q$.

Il suffit d'appliquer Bertini.

$M_{m-s}(D)$ n'a pas de composante fixe E dès que $(m - s)(r - 1) \geq d$. En effet, le nombre de conditions imposées à une H_j par la condition de passer par E est $\geq j(r + 1)$, car par $j(r - 1)$ points génériques indépendants d'une composante de E passe une hypersurface dégénérée en j hyperplans.

$M_{m-s}(D)$ n'est pas composé avec un pinceau dès que $\dim_{m-s-1} \geq d$. En effet, pour tout $C_1 \in L_1$, on a alors d'après (4) $(L_{m-s-1} + C_1) \cap M_{m-s}(D) \neq \emptyset$. Comme L_1 est sans point fixe, il n'existe pas de point de V appartenant à toute composante de tout élément de $M_{m-s}(D)$.

Soit donc $m - s \geq q$ et soit $C_{m-s} \in M_{m-s}(D)$ irréductible.

Il existe $C'_m = H'_m . V \in L_m$ telle que $C_{m-s} . C_m + D = C'_m . C_m$. Soient Y_i $(i = 0 , \dots , n)$ les coordonnées homogènes dans S^n. Soient $F_m(Y)$, $F'_m(Y)$ et $F_{m-s}(Y)$ les premiers membres des équations de H_m, H'_m et H_{m1}. Prenant pour "hyperplan de l'infini" $Y_o = 0$, posons $X_i = \frac{Y_i}{Y_o}$ $i = 1 , \dots , n)$ et soient $f_m(X) = F_m(Y)/Y_o^m$, $f'_m(X) = F'_m(Y)/Y_o^m$ et $f_{m-s}(X) = F_{m-s}(Y)/Y_\bullet^m$. Soient de plus $\bar{x}_i$, x_i, x'_i les valeurs des X_i en des points génériques de V, C_m et C_{m-s} respectivement. La fonction g sur C_m telle que $g(x) = \frac{f'_m(x)}{f_{m-s}(x)}$ n'a de pôles qu'à l'infini. Donc $g(x)$ est entier par rapport à $k[x]$, donc puisque V est normale, $g(x) \in k[x]$. Donc il existe des polynômes G et H tels que

$$f'_m(\bar{x}) = G(\bar{x})\, f_{m-s}(\bar{x}) + H(\bar{x})\, f_m(\bar{x})$$

et la fonction sur C'_m ayant pour valeur en x'

$$\frac{f'_m(x')}{f_m(x')} = H(x') \in k[x']$$

n'a de pôles qu'à l'infini. Or cette fonction ne dépend pas du choix de l'indice de l'hyperplan de l'infini. Donc elle est constante. Donc le faisceau défini par H_m et H'_m contient une hypersurface H''_m passant par C_{m-s}. On a

$H''_m . C_m = H'_m . C_m = C_{m-s} . C_m + D$. Donc, en posant $H''_m . V - C_{m-s} = C_s$, il vient $D = C_s . C_m$.

C.Q.F.D.

5. Le genre arithmétique.

Soit d'abord un cycle homogène de dimension r de S^n dont toutes les composantes ont pour coefficient $+1$ (et qu'on peut identifier à l'ensemble algébrique réunion de ces composantes). Le nombre des conditions imposées à une forme de degré m par la propriété de s'annuler sur W est, pour m assez grand, représenté par un polynôme en m , $\chi(W, m)$, appelé fonction caractéristique de W . $\chi(W, m)$ est aussi le rang du module R_m des formes de degré m dans S_n (mod W). Désignant par a_0 le terme constant au polynôme χ , on appelle genre arithmétique de W le nombre

$$p_a(W) = (-1)^r a_0 \quad .$$

Soit W_s^{r-i} l'intersection de W et de i hypersurfaces génériques indépendantes de degré s . On a, quels que soient m et s ,

$$\chi(W_s^r , ms) - \chi(W_s^r , ms - s) = \chi(W_s^{r-1} , ms) \ .$$

On en déduit

$$\chi(W , m) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \, p_a(W_m^i) \ .$$

Dans le cas où W est une variété normale, on a $\chi(W , m) = \dim L_m + 1 = \ell(C_m)$ donc

$$\ell(C_m) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \, p_a(W_m^i) \ . \tag{5}$$

Sur une variété normale V , on définit le genre arithmétique de tout V-diviseur. Pour cela, on démontre les deux propriétés suivantes

(A) $p_a(Z) = p_a(Z')$ pour $Z \equiv Z'$

(B) $p_a(Z + Z') = p_a(Z) + p_a(Z') + p_a(Z.Z')$

pour les couples de V-diviseurs Z et Z' tels que les symboles figurant dans ces relations soient définis au sens précédent.

Pour démontrer (A), on remarque que

$$\chi(Z , m) = \dim L_m - \dim(L_m - Z)$$

et que L_m est complet, donc que $L_m - Z = L_m - Z'$ pour m assez grand.

La démonstration de (B) repose sur la relation

$$\chi(Z\ ,\ m) + \chi(Z'\ ,\ m) = \chi(Z + Z'\ ,\ m) + \chi(Z.Z'\ ,\ m)$$

On constate ensuite qu'il existe une et une seule façon d'étendre la définition de $p_a(Z)$ aux V-diviseurs de manière

1° que $p_a(0) = 0$ en toute dimension

2° que la propriété (A) soit valable quels que soient Z et Z'

3° qu'on ait la propriété

(B') $p_a(Z + C_m) = p_a(Z) + p_a(C_m) + p_a(Z.C_m)$

pour tout Z et pour $C_m \in L_m$ générique sur un corps de définition de Z, le cycle $Z.C_m$ étant regardé comme un C_m-diviseur.

6. Expression de $\ell(D + C_m)$ pour m assez grand.

THÉORÈME 3. – On a pour m assez grand

$$\ell(D + C_m) = (-1)^r\ (p_a(V) + p_a(-D - C_m))$$

On se ramène au cas $D = -E$ ($E \geqslant 0$ irréductible) en prenant pour E un élément générique de $|C_j - D|$, l'entier j étant assez grand.

On a

$$\ell(C_m - E) = \chi(V\ ,\ m) - \chi(E\ ,\ m)$$

D'où, compte tenu de (5)

$$(C_m - E) = (-1)^r\ p_a(V) + \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i}\ (p_a(V_m^i) - p_a(E.V_m^{i-1}))$$

Il suffit alors de remarquer qu'on a, d'après (B')

$$p_a(E.V_m^{i-1}) = p_a(V_m^i) + p_a(E.V_m^{i-1} - V_m^i) + p_a(E.V_m^i - V_m^{i+1})$$

7. Le système canonique.

Soit ω une différentielle sur une variété normale V. A tout V-diviseur irréductible C, on associe l'ordre $v_C(\omega)$ de ω en C ainsi défini : on considère des coordonnées $x_1 \dots x_r$ uniformisantes et séparantes (c'est-à-dire telles que toute fonction sur C soit algébrique séparable sur le corps engendré par les traces des x_i sur C) de C, et si on a

$$\omega = A\ dx_1 \dots dx_n\ ,$$

on pose $v_C(\omega) = v_C(A)$. Le <u>diviseur</u> (ω) <u>de</u> ω est le V-diviseur

$$(\omega) = \sum_C v_C(A) \quad .$$

Les (ω) appartiennent à une classe déterminée modulo l'équivalence linéaire, appelée <u>classe canonique</u>. Les éléments positifs de cette classe (associés aux <u>différentielles de première espèce</u>) forment un système <u>complet</u>, appelé <u>système linéaire canonique</u>, noté $K = K(V)$.

Soit $C_m \in L_m$ irréductible et normale et considérons le système canonique $K(C_m)$. Soit ω une différentielle sur V et soit t un paramètre uniformisant de C_m (c'est-à-dire une fonction sur V telle que $v_{C_m}(t) = 1$. On peut trouver $r - 1$ fonctions $z_1 , \dots , z_{r-1}$ formant avec t un système de coordonnées uniformisantes séparantes de C_m sur V . Soit $\omega = A\, dt\, dz_1 \dots dz_{r-1}$ et considérons sur C_m la différentielle $\omega_t = A_t\, dz_{1,t} \dots dz_{r-1,t}$ (A_t , z_{it} , fonctions induites par A et z_i respectivement sur C_m) . On établit la relation

$$(\omega_t) = ((\omega) + C_m - (t)).C_m$$

(Δ désignant un C_m-diviseur irréductible, cette relation est facile à vérifier localement en Δ pour un t particulier : on prend t tel que $C_m - (t)$ n'admette pas Δ pour composante ; on montre ensuite que $(\omega_t) + (t)C_m$ ne dépend pas de t).

Il en résulte $|K + C_m|.C_m \subset K(C_m)$.

Plus généralement, si D est un V-diviseur irréductible d'un système linéaire de la forme $|E + C_m|$, on a encore $|D + K|.D \subset K(D)$ (on se ramène au cas précédent par une transformation birationnelle). $|D + K|$ s'appelle le système <u>adjoint</u> de D sur V .

8. <u>Application au théorème de Riemann-Roch.</u>

Soit V une surface normale et soit D un V-diviseur. Posons $D + C_m = E_m$. On a

$$\ell(D) = \ell(E_m) - \dim(|E_m|.C_m) - 1 \quad .$$

Or d'après Riemann-Roch pour C_m

$$\dim|E_m|.C_m + 1 \leq \ell(E_m.C_m) = - p_a(- E_m.C_m) - p_a(C_m) + j_m - 1$$

où j_m est l'indice de spécialité de $E_m.C_m$ sur C_m , défini par

$$j_m = \ell(K_m - E_m . C_m) \text{ , avec } K_m \in (K(C_m) .$$

Le théorème 3 et les propriétés du symbole p_a entraînent donc

$$\ell(D) \geqslant p_a(V) + p_a(- D) - j_m$$

Or d'après le paragraphe précédent

$$j_m = \dim \left| |K + C_m| . C_m - E_m . C_m \right| + 1$$
$$= \dim \left| (K - D) . C_m \right| + 1$$

Pour m assez grand, le lemme d'Enriques-Severi donne

$$j_m = \dim(|K - D| . C_m) + 1$$

et comme de plus

$$\dim|K - D| . C_m = \dim|K - D| ,$$

il vient

$$\ell(D) \geqslant p_a(V) + p_a(- D) - i(D)$$

où $i(D) = \dim|K - D| + 1 = \ell(K_o - D)$ (avec $K_o \in K$) s'appelle l'indice de spécialité de D . C'est le théorème de Riemann-Roch pour les surfaces normales.

Si V est non singulière, on a

$$p_a(- D) = 2 + p_a(D^2) - p_a(D) .$$

D'où la forme habituelle

$$\dim D \geqslant \nu(D) - p_a(D) + p_a + 2 - i(D)$$

où $\nu(D) = p_a(D^2)$ est le degré de D .

BIBLIOGRAPHIE

[1] SAMUEL (Pierre). - Sections hyperplanes des variétés normales, Séminaire Bourbaki, t. 3, 1950/51.

[2] SEIDENBERG (A.). - The hyperplane sections of normal varieties, Trans. Amer. math. Soc., t. 69, 1950, p. 357-386.

[3] ZARISKI (Oscar). - Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi, Annals of Math., Series 2, t. 55, 1952, p. 552-592.