JEAN-PIERRE SERRE

Faisceaux analytiques

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 95, p. 409-414
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__409_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1954)

FAISCEAUX ANALYTIQUES

par Jean-Pierre SERRE

Cet exposé fait suite à celui de Décembre 1952, auquel nous renvoyons pour tout ce qui concerne les faisceaux analytiques cohérents, les groupes de cohomologie, etc. Dans cet exposé, il était principalement question de variétés de Stein (généralisation naturelle des domaines d'holomorphie) ; ici, au contraire, nous nous occuperons surtout de variétés algébriques projectives (donc compactes).

I. RÉSULTATS GÉNÉRAUX.

1. Espaces fibrés à fibre vectorielle.

Soit X une variété analytique complexe dénombrable à l'infini, de dimension complexe n, et soit V un espace fibré analytique de base X et de fibre un C-espace vectoriel de dimension finie. Nous noterons $\mathcal{S}_V$ le faisceau des germes de sections holomorphes de V ; c'est un faisceau analytique cohérent, localement libre.

Soit Ω^p le faisceau des germes de p-formes holomorphes sur X, et soit $\mathcal{A}^{p,q}$ le faisceau des germes de formes différentiables de types (p,q) sur X. On posera :

$\Omega_V^p = \Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{S}_V$ = faisceau des germes de p-formes holomorphes sur X, à coefficients dans V,

$\mathcal{A}_V^{p,q} = \mathcal{A}^{p,q} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{S}_V$ = faisceau des germes de formes différentiables de type (p,q) sur X, à coefficients dans V.

(le produit tensoriel est pris sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{O} = \Omega^o$) .

D'après un résultat dû à GROTHENDIECK (non publié) et à DOLBEAULT [2], on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Omega_V^p \longrightarrow \mathcal{A}_V^{p,o} \xrightarrow{d''} \mathcal{A}_V^{p,1} \xrightarrow{d''} \cdots \xrightarrow{d''} \mathcal{A}_V^{p,n} \longrightarrow 0 .$$

Comme les $\mathcal{A}_V^{p,q}$ sont <u>fins</u>, on en tire le résultat suivant (qui généralise [2]) :

THÉORÈME 1. - $H^q(X, \Omega_V^p)$ <u>est isomorphe au</u> q-<u>ième groupe de cohomologie du complexe des sections des</u> $\mathcal{A}_V^{p,q}$, <u>muni de l'opérateur cobord</u> d'' .

Résultat analogue pour la cohomologie à supports compacts (notée H_*^q dans ce qui suit) ; on peut également utiliser des formes différentielles à coefficients distributions ; elles forment un faisceau

$$\mathcal{K}_V^{p,q} = \mathcal{K}^{p,q} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{S}_V .$$

2. La dualité analytique.

Les hypothèses étant celles du n° 1 , soit $A_V^{p,q}$ (resp. $K_V^{p,q}$) l'espace vectoriel des sections à supports quelconques (resp. compacts) du faisceau $\mathcal{A}_V^{p,q}$ (resp. $\mathcal{K}_V^{p,q}$) . Si l'on munit $A_V^{p,q}$ de la topologie de la convergence compacte pour chaque dérivée, on obtient un espace de Fréchet (analogue à l'espace $\mathcal{E}$ de Schwartz) ; on voit aisément que le dual de cet espace de Fréchet n'est autre que $K_{V^*}^{n-p,n-q}$, où V^* désigne l'espace fibré dual de V . En outre, le transposé de d'' vis-à-vis de la dualité précédente, est égal à d'' (au signe près). Par passage à la cohomologie, on obtient, compte-tenu du théorème 1 :

THÉORÈME 2. - Si les deux opérateurs $A_V^{p,q-1} \xrightarrow{d''} A_V^{p,q} \xrightarrow{d''} A_V^{p,q+1}$ sont des homomorphismes, alors les espaces vectoriels $H^q(X , \Omega_V^p)$ et $H_*^{n-q}(X , \Omega_{V^*}^{n-p})$ sont en dualité séparante.

Il n'est pas toujours vrai que d'' soit un homomorphisme ; c'est cependant exact dans chacun des deux cas suivants :

a) X est une variété de Stein ; on a $H^q(X , \Omega_V^p) = 0$ pour $q \neq 0$, donc d'' est un homomorphisme (théorème de Banach), et le théorème 2 montre que $H_*^q(X , \Omega_V^p) = 0$ pour $q \neq n$, ce qui généralise le théorème 4 de [5] .

b) X est une variété compacte ; on s'appuie sur le résultat suivant (cf. [1])

THÉORÈME 3. - Si X est une variété compacte, les $H^q(X , \mathcal{F})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, quel que soit le faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$.

(Se démontre en utilisant deux recouvrements de Stein emboîtés, ainsi qu'un théorème de Schwartz sur les opérateurs complètement continus).

En utilisant le théorème 3, on voit que d'' est un homomorphisme, et le théorème 2 montre alors que $H^q(X , \Omega_V^p)$ et $H^{n-q}(X , \Omega_{V^*}^{n-p})$ sont en dualité séparante donc ont même dimension, puisqu'ils sont de dimension finie d'après le théorème 3 .

Cas particulier. - Si D est un diviseur de X , soit $\mathcal{F}_D$ le faisceau des germes de fonctions méromorphes $\geqslant -D$; on a $\mathcal{F}_D = \mathcal{S}_V$, où V est l'espace fibré (de dimension 1) associé à D ; supposons qu'il existe au moins une forme différentielle méromorphe de degré n non identiquement nulle, et soit K son diviseur (diviseur canonique) ; on a alors

$$\Omega_V^0 = \mathcal{S}_V = \mathcal{F}_D , \text{ et } \Omega_{V^*}^n = \Omega^n \otimes \mathcal{S}_{V^*} = \mathcal{F}_K \otimes \mathcal{F}_{-D} = \mathcal{F}_{K-D} .$$

D'où :

COROLLAIRE. - $H^q(X\ ,\ \mathcal{F}_D)$ <u>et</u> $H^{n-q}(X\ ,\ \mathcal{F}_{K-D})$ <u>sont en dualité séparante</u>.

3. Faisceaux analytiques cohérents sur les variétés algébriques.

Soit X une variété algébrique sans singularités, plongée dans un espace projectif $P_r(C)$; nous désignerons par E une section hyperplane de X relative à ce plongement ; E étant un diviseur, mE est aussi un diviseur $(m \in Z)$, et le faisceau $\mathcal{F}_{mE}$ est bien défini (cf. ci-dessus).

THÉORÈME 4. - <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>un faisceau analytique cohérent sur la variété algébrique</u> X . <u>Pour tout entier</u> m <u>assez grand, le faisceau</u> $\mathcal{F}(m) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}_{mE}$ <u>vérifie les deux propriétés suivantes</u> :

A) <u>Pour tout</u> $x \in X$, $H^0(X\ ,\ \mathcal{F}(m))$ <u>engendre</u> $\mathcal{F}(m)_x$ (considéré comme $\mathcal{O}_x$-module)

B) $H^q(X\ ,\ \mathcal{F}(m)) = 0$ <u>si</u> $q \neq 0$.

(Noter l'analogie avec les théorèmes A et B de la théorie des variétés de Stein).

Pour démontrer le théorème 4 , on se ramène tout d'abord au cas où $X = P_r(C)$ on procède alors par récurrence sur r , le théorème 3 jouant un rôle essentiel dans la démonstration (analogue à celle de [4]) .

II. APPLICATIONS.

4. Le lemme d'Enriques-Severi (cf. [6] , [3] théorème 8.4, ainsi que l'exposé de Néron).

Soit D un diviseur sur la variété algébrique X , et soit Y une sous-variété de X , sans singularités, et de dimension $n-1$; on suppose que Y ne contient aucune composante de D ; ainsi l'intersection $D.Y$ est un diviseur de Y .

On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{D-Y} \longrightarrow \mathcal{F}_D \longrightarrow \mathcal{F}_{D.Y} \longrightarrow 0\ ,$$

où le faisceau $\mathcal{F}_{D.Y}$ est un faisceau <u>sur</u> Y .

Si $H^1(X\ ,\ \mathcal{F}_{D-Y}) = 0$, la suite exacte de cohomologie montre que $H^0(X\ ,\ \mathcal{F}_D)$ s'applique <u>sur</u> $H^0(Y\ ,\ \mathcal{F}_{D.Y})$ par restriction, ce qui signifie que la série linéaire $|D|.Y$ est <u>complète</u> (donc égale à $|D.Y|$).

Prenons en particulier $Y = C_m$, section de X par une forme de degré m de l'espace ambiant ; on a $H^1(X\ ,\ \mathcal{F}_{D-C_m}) = H^1(X\ ,\ \mathcal{F}_{D-mE})$, qui est en dualité (d'après le corollaire au théorème 2) avec $H^{n-1}(X, \mathcal{F}_{K-D+mE})$, lequel est réduit à 0 si m est grand (et $n \geqslant 2$) d'après le théorème 4,B).

Donc la série $|D|.C_m$ est <u>complète</u> si m est grand et $n \geqslant 2$: c'est le lemme d'Enriques-Severi. On notera toutefois que la démonstration de Zariski vaut sur un corps quelconque, et pour des variétés normales (mais pouvant avoir des singularités).

5. Structure des faisceaux analytiques cohérents sur un espace projectif.

Le théorème 4 montre qu'un tel faisceau est toujours <u>algébrique</u> en un sens convenable. Donnons-en deux exemples :

a) Soit V un espace fibré analytique à fibre vectorielle, de base une variété algébrique X . On peut interpréter les éléments de $H^0(X, \mathcal{S}_V \otimes \mathcal{F}_{mE})$ comme des <u>sections méromorphes</u> de V , n'ayant pas de pôles en dehors de E, section hyperplane de X . Le théorème 4, A) montre que par tout point de V passe une telle section, si m est assez grand. On en tire facilement :

THÉORÈME 5. - <u>L'espace fibré</u> V <u>est algébrique</u> (i.e., V peut être défini par des changements de cartes qui soient des fonctions rationnelles).

Si la dimension de V est égale à 1, le théorème 5 redonne un théorème de Lefschetz sur l'existence de diviseurs dont la classe de cohomologie entière est donnée (cf. [4]).

b) Soit $\mathfrak{J}$ un faisceau cohérent d'<u>idéaux</u> sur l'espace projectif $P_r(C)$; on dira qu'un polynome homogène de degré n , $P(t_0, \ldots, t_r)$, <u>appartient à</u> $\mathfrak{J}$, si, pour tout $x \in P_r(C)$, on a $P/t^n \in \mathfrak{J}_x$, t désignant une forme linéaire non nulle en x ; ces polynomes ne sont autres que les sections de $\mathfrak{J} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}_{nE}$, comme on le voit tout de suite. Lorsque n varie, ils forment un idéal homogène I .

THÉORÈME 6. - <u>Tout faisceau cohérent d'idéaux est engendré par les polynomes qu'il contient.</u>

Cela résulte du théorème 4, A).

En particulier, si W est un sous-ensemble analytique de $P_r(C)$, W définit un faisceau cohérent d'idéaux $\mathfrak{J}_W$ (théorème de Cartan), et le théorème 6 montre que $\mathfrak{J}_W$ est engendré par les polynomes qu'il contient, c'est-à-dire que W est réunion finie de sous-variétés algébriques. On peut donc considérer le théorème 6 comme une extension du théorème de Chow.

Par un procédé analogue, mais plus compliqué, on peut montrer que tout faisceau analytique cohérent sur $P_r(C)$ est défini par un module gradué de type fini sur l'anneau S des polynomes en $t_o, \dots, t_r$.

6. Détermination algébrique de la cohomologie d'un faisceau analytique cohérent sur $P_r(C)$.

Puisque tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{M}$ peut être défini par un S-module gradué M, il s'impose de déterminer algébriquement les groupes de cohomologie $H^q(P_r(C), \mathcal{M})$, à partir du module M. Cela peut se faire de deux façons différentes :

THÉORÈME 7. - Soit I l'idéal de S engendré par $(t_o, \dots, t_r)$. Le groupe $H^q(P_r(C), \mathcal{M})$ est isomorphe à la limite inductive des $\mathrm{Ext}_S^q(I^m, M)$ pour m tendant vers l'infini.

THÉORÈME 8. - Soit K un S-module gradué libre, ayant pour base un élément de degré $-r-1$. Si tous les éléments de M sont de degrés > 0, $H^q(P_r(C), \mathcal{M})$ est isomorphe au dual (sur C) de $\mathrm{Ext}_S^{r-q}(M \otimes K, S)$.

(Le produit tensoriel $M \otimes K$ est pris sur S : ce n'est rien d'autre que M dont on a abaissé les degrés de $r+1$ unités).

Les démonstrations des théorèmes 7 et 8 utilisent essentiellement :

a) le théorème 4,

b) le théorème des syzygies, qui permet de "monter" à partir des modules libres,

c) le fait que les $H^q(P_r(C), \mathcal{M})$ peuvent se calculer au moyen du recouvrement de l'espace projectif donné par : U_i, $t_i \neq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri) et SERRE (Jean-Pierre). - Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 237, 1953, p. 128-130.

[2] DOLBEAULT (Pierre). - Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 175-177.

[3] KODAIRA (K.). - Some results in the transcendental theory of algebraic varieties, Ann. of Math., t. 59, 1954, p. 86-134.

[4] KODAIRA (K.).and SPENCER (D.C.). - Divisor class group on algebraic varieties, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 39, 1953, p. 872-877.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Quelques problèmes relatifs aux variétés de Stein, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953. - Liège, Thone ; Paris, Masson, 1953, p. 57-68.

[6] ZARISKI (Oscar). - Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi, Ann. of Math., t.55, 1952, p.552-592.

ADDITIF

[7] DOLBEAULT (Pierre). - Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, I, Ann. of Math., t. 64, 1956, p. 83-130 ; II, Ann. of Math., t. 65, 1957, p. 282-330.

[8] SERRE (Jean-Pierre). - Un théorème de dualité, Comm. Math. Helv., t. 29, 1955, p. 9-26.

[9] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math., t. 61, 1955, p. 197-278.

[10] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, t. 6, 1956, p. 1-42.

[11] ZARISKI (Oscar). - Algebraic sheaf theory, Scientific report on the second summer institute : Several complex variables, Bull. Amer. math. Soc., t. 62, 1956, p. 117-141.

Les résultats du n° 1 sont détaillés dans [7] (voir aussi [8]) ; le théorème de dualité du n° 2 est démontré dans [8] (dans le cas analytique, l'énoncé correspondant de la théorie algébrique est conséquence immédiate des résultats de [10], cf. [11]) . Les résultats des n^{os} 3 et 6 sont une combinaison de ceux de [9] (théorie algébrique des faisceaux cohérents) et de [10] (équivalence des théories algébriques et analytiques). Pour le lemme d'Enriques-Severi et le théorème de Riemann-Roch, voir le rapport de ZARISKI [11] .

[Avril 1957]