PIERRE CARTIER

Représentations des groupes de Lie

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 96, p. 415-424
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__415_0>

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE LIE

par Pierre CARTIER

[d'après HARISH-CHANDRA]

Les groupes de Lie envisagés seront connexes. La structure analytique dont sera muni un tel groupe sera exclusivement une structure réelle. Différentiable signifie indéfiniment différentiable.

Nous allons d'abord énoncer les résultats principaux du mémoire de HARISH-CHANDRA [2] :

A. - Si $\{H, T_g\}$ est une représentation unitaire du groupe de Lie semi-simple G, on peut choisir de manière "presque canonique" une base de H par rapport à laquelle les coefficients de T_g soient des fonctions analytiques sur G ;

B. - Si les T_g engendrent un facteur (algèbre faiblement fermée d'opérateurs dont le centre est réduit aux scalaires) celui-ci est de classe I au sens de von NEUMANN.

Dans ces conditions les résultats de GODEMENT (cf. [3]) montrent que la théorie des caractères s'applique de manière satisfaisante à G.

1. Généralités sur les groupes semi-simples.

Rappelons d'abord quelques résultats connus (cf. [4]). Soit G semi-simple connexe, Z son centre, $G^* = G/Z$, K^* un sous-groupe compact maximal de G^*, K l'image réciproque de K^* dans G. Alors $K = K_1 . D$ où K_1 est un groupe compact semi-simple et D abélien. De plus, il existe des sous-groupes A abélien et N nilpotent, tels que $G = K \cdot A \cdot N$ (décomposition unique $g = kan$), N étant de plus invariant dans $S = A \cdot N$. Un groupe $S = A \cdot N$ sera dit quasi-nilpotent si A est abélien et N nilpotent invariant.

On rencontrera d'autre part des algèbres de groupe dont voici la liste :

$\mathcal{E}'(G)$ distributions à support compact, le produit étant le produit de composition. Involution donnée par $d\alpha^*(g) = d\alpha(g^{-1})$ (une distribution sera toujours notée sous forme intégrale). $\mathcal{E}'(G)$ sera mis en dualité avec les fonctions analytiques et muni de la topologie faible correspondante.

Viennent ensuite des sous-algèbres de $\mathcal{E}'(G)$:

$\mathcal{A}(G)$ mesures à support compact

$\mathcal{D}(G)$ fonctions à support compact indéfiniment différentiables

$U(G)$ distributions nulles en dehors de l'unité e du groupe.

$Z(G)$ centre de $U(G)$.

Si $\alpha \in U(G)$, on pose $L_\alpha f = \alpha * f$, $R_\alpha f = f * \alpha$; L_α et R_α sont des opérateurs différentiels. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G se plonge dans $U(G)$ et l'on a

$$[X , Y] = X * Y - Y * X \qquad (X , Y \in \mathfrak{g}) .$$

Toutes ces algèbres sauf $Z(G)$ sont denses dans $\mathcal{E}'(G)$ donc $\alpha(f)=0$ pour toute $\alpha \in U(G)$ implique $f = 0$, si f est analytique.

2. - <u>Analycité et différentiabilité des représentations linéaires</u>.

Une représentation de G dans un Banach H notée $\{H , T_g\}$ est une représentation $g \to T_g$ de G dans le groupe des opérateurs continus inversibles de H , telle que l'application $(g , x) \to T_g x$ de $G \times H$ dans H soit <u>continue.</u>

Une représentation de G se prolonge à $\mathcal{A}(G)$ ou à $\mathcal{D}(G)$ mais non en général à $\mathcal{E}'(G)$ ou à $U(G)$. Lorsque $\dim H$ est finie, on sait que l'application $g \to T_g$ de G dans l'espace $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs de H , est analytique, et que, si G est simplement connexe, les représentations de G correspondent biunivoquement à celles de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Mais si $\dim H$ est infinie, $g \to T_g$ n'est analytique pour aucune des topologies usuelles de $\mathcal{L}(H)$ (faible, forte et uniforme). La définition 1 a pour but de pallier à ces inconvénients de manière au moins partielle :

DÉFINITION 1. - <u>Un vecteur</u> $x \in H$ <u>sera dit différentiable si l'application</u> $g \to T_g x$ <u>de</u> G <u>dans</u> H <u>est différentiable</u>. (Idem pour <u>analytique</u>).

H^∞ : espace des vecteurs différentiables ;

W : espace des vecteurs analytiques.

On a $W \subset H^\infty$. Si $x \in H$, $f \in \mathcal{D}(G)$, $T_f x \in H^\infty$. D'autre part, " y orthogonal aux $T_f x$ " équivaut à $\int \langle T_g x , y \rangle f(g)dg = 0$ donc $\langle T_g x , y\rangle = 0$ d'où $\langle x , y\rangle = 0$ et $y = 0$ donc, d'après le théorème de Hahn-Banach, les $T_f x$ sont denses dans H ; a fortiori H^∞ est dense dans H . <u>Hélas</u> le fait que W soit dense dans H n'est ni aussi trivial ni aussi général. Il suffit cependant de le démontrer pour une classe très limitée de représentations. Posons $\rho(g) = \|T_g\|$ et soit $L^1(\rho)$ l'espace des fonctions sommables pour $\rho(g)dg$; nous appellerons coefficient de la représentation toute fonction $\langle T_g x , y\rangle = \varphi_{x,y}(g)$ où y est dans le dual H' de H. Un calcul analogue à celui qu'on vient de faire montre que si le sous-espace L des éléments de $L^1(\rho)$ analytiques pour la représentation régulière est dense dans $L^1(\rho)$ alors les $T_f x$ $(f \in L)$ sont denses dans H. Or ces derniers sont des vecteurs analytiques.

Les sous-espaces H^∞ et W sont invariants par G ; la formule $T_\alpha x = \int T_g x \, d\alpha(g)$ a un sens pour $x \in H^\infty$ et $\alpha \in \mathcal{E}'(G)$. On définit ainsi une représentation de $\mathcal{E}'(G)$ dans H^∞. De la même manière, on définit une représentation de $U(G)$ dans W.

PROPOSITION 1. - Si $J \subset W$ est un sous-espace invariant par $U(G)$, son adhérence $\bar{J}$ est invariante par G. Inversement, si J' est un sous-espace fermé invariant par G, $J' \cap W$ est invariant par $U(G)$.

La deuxième assertion est triviale. Démontrons la première. Soit J_1 le plus petit sous-espace fermé invariant par G contenant J. D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que si $y \in H'$ est orthogonale à J, elle est orthogonale à J_1. Or si $x \in J$, $T_\alpha x \in J$ $(T_\alpha x , y) = 0$ i.e. $\alpha(\varphi_{x,y}) = 0$ donc $\varphi_{x,y} = 0$ car c'est une fonction analytique donc $\langle T_g x , y \rangle = 0$ et y est orthogonale aux $T_g x$ $(x \in J)$ donc à J_1.

Dans le cas des représentations non unitaires, l'analogue de la proposition 1, pour les vecteurs différentiables peut être fausse.

Appelons sous-espace différentiable (resp. analytique) un sous-espace de H^∞ (resp. W) invariant par $U(G)$. On peut caractériser comme suit les sous-espaces analytiques.

PROPOSITION 2. - Soient $J \subset H$ et $J' \subset H'$ deux sous-espaces faiblement denses ; $\alpha \to T_\alpha$ une représentation de $U(G)$ dans J telle que

1° les coefficients $\varphi_{x,y}$ $(x \in J , \ y \in J')$ soient analytiques

2° $\langle T_\alpha x , y \rangle = \int \langle T_g x , y \rangle \, d\alpha(g)$ $\qquad \alpha \in U(G)$

Alors J est un sous-espace différentiable ; et il est même analytique dans les deux cas suivants : $J' = H'$ ou bien la représentation est unitaire et $J = J'$.

Pour $x \in J$ posons $\vec{\varphi}_x(g) = T_g x$; c'est une fonction définie dans G à valeurs dans H, différentiable pour la topologie $\sigma(H , J')$ car

$$\langle R_\alpha \vec{\varphi}_x , y \rangle = R_\alpha \varphi_{x,y} = \varphi_{T_\alpha x , y} = \langle \vec{\varphi}_{T_\alpha x} , y \rangle \qquad x \in J , \ y \in J'$$

Il en résulte que les dérivées de $\vec{\varphi}_x$ sont fortement continues donc (cf. L. SCHWARTZ [6]) $\vec{\varphi}_x$ est fortement différentiable et x est un vecteur différentiable.

Si $J' = H'$ prenons des coordonnées locales $x_1, x_2, \dots, x_n$ au voisinage de e dans G. On pose

$$\delta_q(f) = \left(\prod_i \frac{1}{q_i!} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{q_i} . f\right)_e = 0$$

$$q = (q_1, \dots, q_n) \quad q_i \geqslant 0$$

Soit $y \in H'$; pour $x \in J$, la fonction $\langle \vec{\varphi}_x, y \rangle$ sur G est analytique, donc l'ensemble des

$$|\delta_q \langle \vec{\varphi}_x, y \rangle|^{1/|q|} = ||\langle \delta_q \vec{\varphi}_x, y \rangle||^{1/|q|} \qquad \text{pour } q \geqslant 0$$

est borné. En vertu du théorème de Baire l'ensemble des $||\delta_q \vec{\varphi}_x||^{1/|q|}$ est borné pour x fixe dans J et la série de Taylor de $\vec{\varphi}_x$ converge au voisinage de e nécessairement vers $\vec{\varphi}_x$. Donc x est analytique.

Supposons maintenant la représentation unitaire. Soit $X \to \exp X$ l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G. Si f est analytique, on a alors

$$f(\exp X) = \sum_n \frac{1}{n!} (R_X^n f)(e) \tag{1}$$

Soit V_X un voisinage ouvert convexe symétrique de 0 dans $\mathfrak{g}$ dans lequel la série de Taylor (1) de $f = \varphi_{x,x}$ converge dans V_x et $U_x = \frac{1}{2} V_x$ $(x \in J)$. Or on a

$$\left|\left|\frac{1}{n!} T_X^n x\right|\right|^2 = \frac{1}{(n!)^2} \langle T_X^n x, T_X^n x \rangle = \frac{1}{(n!)^2} |\langle T_X^{2n} x, x \rangle| \leqslant \frac{2^{2n}}{(2n!)} |\langle T_X^{2n} x, x \rangle|$$

Il en résulte facilement que la série $\sum_n \frac{1}{n!} T_X^n x$ converge pour $X \in U_x$, et comme on peut prolonger aux variables complexes, que φ_x est analytique.

PROPOSITION 3. - <u>Soient</u> $\{H^i, T_g^i\}$ $(i = 1,2)$ <u>deux représentations de</u> G <u>et</u> V^i <u>un sous-espace analytique dense de</u> H^i. <u>Soit</u> φ <u>une équivalence algébrique entre les représentations de</u> $U(G)$ <u>dans les</u> V^i, <u>continue pour les normes des</u> H^i. <u>Alors</u> φ <u>se prolonge par continuité en une équivalence</u> $\overline{\varphi}$ <u>des deux représentations de</u> G.

Il suffit de vérifier que les fonctions analytiques $\langle (\overline{\varphi} \circ T_g^1)x, y \rangle$ et $\langle (T_g^2 \circ \overline{\varphi})x, y \rangle$ ont même intégrale pour $\alpha \in U(G)$ $(x \in H^1, y \in H^2)$.

Enfin terminons ce paragraphe par un résultat un peu moins trivial.

THÉORÈME 1.- <u>Soient</u> H <u>un espace préhilbertien,</u> $\alpha \to T_\alpha$ <u>une représentation unitaire faiblement continue de</u> $U(G)$ <u>dans</u> H. <u>On peut alors définir une représentation unitaire</u> T_g <u>de</u> G <u>dans le complété</u> $\overline{H}$ <u>de</u> H <u>et une seule telle que</u> H <u>en soit un sous espace analytique et que, sur</u> H, $T_\alpha = \int T_g \, d\alpha(g)$.

Les hypothèses signifient que $T_{\alpha * \beta} = T^{*}_{\alpha} \cdot T_{\beta}$ et que $\langle T_{\alpha} x , y \rangle = \alpha(\varphi_{x,y})$ où $\varphi_{x,y}$ est analytique. On peut toujours se ramener au cas où la représentation de $U(G)$ est monogène de générateur x. Alors si la série de Taylor de $\varphi_{x,x}(\exp X)$ converge dans V_x les séries $\sum_n (n!)^{-1} T^n_X y$ convergent pour $y \in H$ et $X \in \frac{1}{2} U_x$. Cette série permet alors de définir un opérateur T_g de H pour $g \in \exp X$, $(X \in \frac{1}{2} U_x)$. On démontre ensuite la formule

$$\langle T_g x , T_h y \rangle = \langle T_{h^{-1}g} x , y \rangle$$

en remarquant que les deux membres sont des fonctions analytiques de (g , h) assez voisin de (e , e). Il suffit donc de comparer les intégrales de ces deux termes par rapport à $d\alpha(g)\, d\beta(h)$, $(\alpha , \beta \in U(G))$, mais on obtient alors les deux termes $\langle T_{\alpha} x , T_{\beta} y \rangle$ et $\langle T_{\beta^* \alpha} x, y \rangle$ qui sont égaux puisqu'on a affaire à une représentation unitaire de $U(G)$. De ce résultat, on déduit l'existence d'une représentation unitaire $\tilde{T}_{\tilde{g}}$ du revètement universel $\tilde{G}$ de G ($p : \tilde{G} \to G$ est la projection canonique) et la formule $(\tilde{T}_{\tilde{g}} x , y) = \varphi_{x,y}(p(\tilde{g}))$ par prolongement analytique ; par suite $\tilde{T}_{\tilde{g}}$ ne dépend que de $p(\tilde{g})$. Ceci achève l'essentiel de la démonstration du théorème.

3. Le théorème fondamental.

HYPOTHÈSES. - G groupe de Lie connexe $G = K \cdot A \cdot N$ — K compact, A abélien, N nilpotent.

$\{H , T_g\}$ représentation de G dans un Banach H.

Bien que la démonstration de ce théorème du mémoire de HARISH-CHANDRA suppose seulement que H est un Banach, les conséquences les plus importantes concernent le cas des représentations unitaires de G.

$\mathfrak{D}$ représente une classe de représentations irréductibles équivalentes du groupe compact K (nécessairement de dimension finie). $H_{\mathfrak{D}}$ désigne la somme des sous-espaces de H dans lesquels les $T_k (k \in K)$ induisent une représentation de classe $\mathfrak{D}$. On pose $H^{o} = \sum_{\mathfrak{D}} H_{\mathfrak{D}}$; si $J \subset H$ est un sous-espace invariant par K, alors $J \cap H^{o} = \sum_{\mathfrak{D}} J \cap H_{\mathfrak{D}}$. On note enfin W est le sous-espace des vecteurs analytiques.

THÉORÈME FONDAMENTAL. - Dans les hypothèses précédentes, $W \cap H^{o} = W^{o}$ est partout dense dans H et invariant par les T_{α} $(\alpha \in U(G))$.

On peut (donc) associer à toute représentation de G une représentation de $U(G)$ dans W^{o} c'est-à-dire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G car $U(G)$ est son algèbre associative enveloppante universelle. Tirons d'abord quelques conséquences de ce théorème :

COROLLAIRE 1. - Si les H_{ω} sont tous de dimension finie, alors $H^{o} \subset W$ donc tout vecteur de H^{o} est analytique.

[GODEMENT a donné de ce corollaire une autre démonstration basée sur la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques (cf. [7] par exemple). Son importance vient de ce qu'il assure que les fonctions "sphériques" de G sont analytiques]

W est invariant par K, donc aussi $W^{o} = \sum_{\omega} W \cap H_{\omega}$. D'autre part, si χ est le caractère de la classe ω, posons $E_{\omega} = \int T_k \overline{\chi}(k)\,dk$. Les E_{ω} sont des projecteurs continus tels que $E_{\omega} E_{\omega'} = 0$ si $\omega \neq \omega'$ et $E_{\omega} H = H_{\omega}$. Donc E_{ω} applique W^{o} sur $W \cap H_{\omega}$; W^{o} étant dense dans H, $W \cap H_{\omega}$ est dense dans H_{ω} donc égal à celui-ci s'il est de dimension finie. Par suite $H_{\omega} \subset W$ et $W \supset H^{o}$.

COROLLAIRE 2. - Si $\dim H_{\omega}$ est finie pour toute ω, il existe une correspondance biunivoque entre les sous-espaces de W^{o} invariants par $U(G)$ et les sous-espaces fermés de H invariants par G.

Soit $L \subset W^{o}$ invariant par $U(G)$; $\overline{L}$ est fermé et invariant par G (proposition 1). Inversement, si M est un sous-espace fermé et invariant par G, alors $M \cap W^{o} = (M \cap W) \cap W^{o}$ est invariant par $U(G)$ (proposition 1). On a évidemment $L \subset \overline{L} \cap W^{o}$; d'autre part $H^{o} = W^{o}$ (corollaire 1) donc

$$\overline{L} \cap W^{o} = \overline{L} \cap H^{o} = \sum_{\omega} \overline{L} \cap H_{\omega} \ ;$$

comme $\overline{L} \cap H_{\omega} = E_{\omega}(\overline{L})$ et que H_{ω} étant de dimension finie $E_{\omega}(L)$ est fermé, on a $\overline{L} \cap H_{\omega} = L \cap H_{\omega}$ et $\underline{\overline{L} \cap H^{o}} = \sum_{\omega} L \cap H_{\omega} \subset L$. Finalement $L = \overline{L} \cap W^{o}$.

Dans l'autre sens, $M \supset M \cap W^{o}$ est clair. Comme M est invariant par K, on a (transformée de Fourier-Peter-Weyl), $M = \overline{\sum_{\omega} M \cap H_{\omega}} \subset \overline{M \cap H^{o}} = \overline{M \cap W^{o}}$ et finalement $M = \overline{M \cap W^{o}}$.

COROLLAIRE 3. - Si $\dim H_{\omega}$ est finie pour toute ω, il existe deux sous-espaces fermés invariants par G, soient L et M, tels que la représentation de G construite dans L/M soit irréductible.

Soit ψ un vecteur non nul de W^{o}, H_{ψ} le sous-espace invariant par $U(G)$ engendré par ψ. Par ZORN, on construit un sous-espace H'_{ψ} de H_{ψ} invariant par $U(G)$ maximal et ne contenant pas ψ. On prend $L = \overline{H_{\psi}}$, $M = \overline{H'_{\psi}}$. Le corollaire assure que L et M sont invariants par G et qu'il n'y a pas de sous-espace fermé invariant par G compris strictement entre L et M .

Passons à la démonstration du théorème fondamental. Le premier pas (et le plus pénible) consiste à le démontrer dans le cas particulier où $K = \{e\}$ i.e. $G = A \cdot N$ est quasi-nilpotent.

LEMME 1. - <u>Soit</u> S <u>un groupe connexe quasi-nilpotent, et soit</u> $\{H, T_s\}$ <u>une représentation de</u> S . <u>Le sous-espace des vecteurs analytiques est partout dense dans</u> H .

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$ les algèbres de Lie de A et N respectivement. On peut supposer S simplement connexe. Alors A et N sont homéomorphes à des espaces numériques et l'exponentielle est un isomorphisme analytique de $\mathfrak{a}$ sur A et de $\mathfrak{n}$ sur N . Par suite l'application $(\alpha, \nu) \longrightarrow \exp \nu . \exp \alpha$ est un isomorphisme analytique de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{n}$ sur S . On peut alors parler de fonctions linéaires et polynômes sur S . Or dans la formule de Campbell-Hausdorff $\exp \nu \exp \nu' = \exp (\nu + \nu' + \frac{1}{2}[\nu , \nu'] + \dots)$ le second membre n'a qu'un nombre fini de termes non nuls car $\mathfrak{n}$ est nilpotente, donc la loi de multiplication dans N s'exprime au moyen de polynômes. Comme N est invariant dans S , on a :

$$\exp \alpha \ \exp \nu \ (\exp \alpha)^{-1} = \exp \nu' \qquad\qquad \nu' = (\exp \operatorname{ad} \alpha) . \nu$$

donc pour α fixe, cet automorphisme de N s'exprime au moyen de polynomes. Il en résulte facilement que si Q est un polynome sur $\mathfrak{n}$, l'ensemble des translatées à gauche de la fonction $f_Q(na) = Q(\nu)$ (si $n = \exp \nu$) est de rang fini sur le corps des constantes. On démontre encore plus facilement que si P est un polynome sur $\mathfrak{a}$, l'ensemble des translatées de la fonction $f_P(na) = P(\alpha)$ est de rang fini. Notons V l'espace vectoriel engendré par les fonctions linéaires sur S et leurs translatées et $\{Q_1 , Q_2 , \dots , Q_n\}$ une base (finie) de V . Soit $\mathfrak{F}$ la famille des fonctions de la forme :

$$e^{- F(Q_1(s) , \dots , Q_n(s))}$$

où F parcourt l'ensemble des formes quadratiques définies positives. $\mathfrak{F}$ a les propriétés suivantes :

1° si $f \in \mathfrak{F}$, elle est continue, nulle à l'infini et > 0 en tout point

2° $\mathfrak{F}$ est fermée pour la multiplication des fonctions.

3° $\mathfrak{F}$ est invariante par translation

4° $\mathfrak{F}$ sépare les points de S .

5° $\mathfrak{F} \subset L^1(\rho)$ pour toute semi-norme $\rho \geqslant 0$ $(\rho(gg') \leq \rho(g) \rho(g'))$

Les points 1°, 2°, 3°, sont clairs. Supposons, contrairement à 4°, que l'on ait $f(s_0 s_1) = f(s_1)$ pour toute $f \in \mathfrak{F}$ et tous s_0, $s_1 \in S$; en vertu de 3°, on aurait $f(s) = f(ss_1) = f(ss_1^n)$ pour toute $f \in \mathfrak{F}$. Mais s_1^n tend vers l'infini avec n et comme f est nulle à l'infini ceci implique $f = 0$. On démontre enfin 5° en remarquant que la mesure de Haar à droite sur S est $ds = d\gamma\, d\alpha$ (pour $s = \exp\gamma \exp\alpha$) et qu'une semi-norme est à croissancé exponentielle au plus.

Soit $\mathcal{G}$ le sous-espace engendré par $\mathfrak{F}$; $\mathcal{G}$ est une algèbre et sépare les points; donc, (théorème de Stone-Weierstrass), toute fonction nulle à l'infini est limite uniforme de fonctions de $\mathcal{G}$. Alors, si f est continue à support compact et $f_0 \in \mathfrak{F}$, il existe $h \in \mathfrak{F}$ telle que $|f_0^{-1} f - h| < \varepsilon$ d'où

$$\int |f - f_0 h| \rho \, ds \leqslant \varepsilon \int f_0 \rho \, ds \quad ;$$

on a donc prouvé que $\mathcal{G}$ est dense dans $L^1(\rho)$.

En vertu de la remarque suivant la définition 1, on peut supposer que la représentation en question de S est la représentation régulière dans $L^1(\rho)$. On va montrer que $\mathfrak{F}$ est formée de vecteurs analytiques. Or si $f \in \mathfrak{F}$

$$f(t^{-1}s) = \exp-(F(Q_i(t^{-1}s)) - F(Q_i(s)))\exp-F(Q_i(s))$$

On démontre alors que pour tous les t assez voisins de ε et les S tels que $F(Q_i(s)) \geqslant 1$ on a l'inégalité

$$-(F(Q_i(t^{-1}s)) - F(Q_i(s))) < \frac{1}{2} F(Q_i(s))$$

On peut développer la première exponentielle dans l'expression de $f(t^{-1}s)$ et l'on obtient une série de polynomes en t convergeant dans $L^1(\rho)$ pour t assez voisin de ε. Il est alors facile de voir que f est un vecteur analytique de la représentation.

Ceci achève la démonstration du lemme 1.

Le cas général où $K \neq \{e\}$ résulte sans difficulté du lemme suivant :

LEMME 2. - <u>Soient</u> $G = K \cdot S$ <u>avec</u> K <u>compact,</u> x <u>un vecteur analytique pour</u> S <u>et</u> h <u>une fonction analytique sur</u> K ; <u>alors le vecteur</u>

$$\int h(k)\, T_k x \, dk$$

<u>est analytique pour</u> G.

En prenant pour h le caractère de la classe ω, ce lemme montre que $W \cap H_\omega$ est dense dans H_ω.

4. Application aux groupes semi-simples.

Si le groupe G semi-simple admet une représentation linéaire fidèle de dimension finie, alors le groupe D du paragraphe 1 est compact, car le centre de G est fini ; par suite K est compact, et le théorème fondamental s'applique à G. Il s'applique même au cas général à condition de se limiter aux représentations "permises" c'est-à-dire les représentations pour lesquelles T_g est un scalaire si $g \in K \cap Z$. Une représentation est "quasi-simple" si elle est permise et si de plus T_ζ est un scalaire pour $\zeta \in Z(G)$. On peut démontrer que toute représentation unitaire de G est une somme continue de représentations quasi-simples.

On utilise alors le théorème algébrique suivant, généralisation d'un théorème démontré antérieurement par HARISH-CHANDRA (cf. [1], p. 55).

THÉORÈME 2. - Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre compacte maximale et soit X la sous-algèbre de $U(\mathfrak{g})$ engendrée par $\mathfrak{p}$ [1]. On considère un idéal à gauche $\mathfrak{J}$ de codimension finie de X et la représentation canonique de $U(\mathfrak{g})$ dans $V = U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}).\mathfrak{J}$. On a alors $V = \sum_{\mathfrak{D}} V_{\mathfrak{D}}$ la somme étant étendue à toutes les classes de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{p}$. De plus $V_{\mathfrak{D}}$ est un module de type fini sur le centre de $U(\mathfrak{g})$.

On se limitera désormais aux représentations unitaires de G.

THÉORÈME 3. - Si $\{H, T_g\}$ est une représentation unitaire irréductible de G elle est quasi-simple et les $H_{\mathfrak{D}}$ sont tous de dimension finie ; les vecteurs de H^0 sont analytiques.

Elle est quasi-simple car on sait que tout opérateur hermitien, borné ou non, qui commute aux T_g est un scalaire si la représentation est irréductible. De plus, si x est un vecteur non nul de $W \cap H_{\mathfrak{D}}$ le sous-espace $U(G).x$ est invariant par $U(G)$ donc dense dans H. Si Y est l'annulateur de x dans X, $U(G).x$ est un quotient de V et le théorème 2 s'applique. Il y a donc $x_1, x_2, \dots, x_n \in H_{\mathfrak{D}}$ tel que tout $y \in H_{\mathfrak{D}}$ soit de la forme $T_{\zeta_1} x_1 + T_{\zeta_2} x_2 \dots + T_{\zeta_n} x_n$ où les ζ_i sont dans $Z(G)$; les T_{ζ_i} sont alors des scalaires et $H_{\mathfrak{D}}$ est de dimension finie. Appliquer ensuite le corollaire 1 du théorème fondamental.

THÉORÈME 4. - Si $\{H, T_g\}$ est une représentation factorielle de G, alors il y

---

[1] On note $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.