Dov Tamari

Machines logiques et problèmes de mots. I : les machines de Turing (T.M.)

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 55, p. 47-58

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__47_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1951)

MACHINES LOGIQUES ET PROBLÈMES DE MOTS.

I : LES MACHINES DE TURING (T.M.)

par Dov TAMARI

1. Introduction.

Cette matière étant encore peu connue du public, il était sage de faire table rase. J'ai donc décidé de me concentrer sur un seul sujet substantiel, qui mérite d'être compris en détail : les machines de Turing (T.M. $\mathfrak{M}(n)$) qui sont une contribution très originale aux mathématiques contemporaines. J'espère vous entretenir une autre fois des derniers progrès des problèmes de mots : les négatifs, application des T.M. en partie, et aussi des progrès positifs de V.A. TARDAKOVSKI.

Nos considérations sont "mathématiques pures, dans le sens étroit". Je suggère même de les résumer, si l'on veut, comme un essai réussi de préciser d'une manière assez générale la vague notion classique d'un "algorithme" et rien de plus. Des expressions comme constructibilité, définibilité, finies, actuelles, effectives, calculabilité, etc. indiquent la même chose. En ce qui concerne leur importance pour les fondements, je ne veux pas les surestimer. Toutefois elles peuvent servir, à mon avis, d'excellent exemple pour illustrer les difficultés des fondements, comme en ont servi aussi bien des paradoxes célèbres. Le nom n'est pas, peut-être, bien choisi. Nos machines n'ont ni masse, ni inertie ; il est superflu de dire qu'on ne s'occupe pas de fourniture d'énergie. Elles sont d'ailleurs des "perpetuum mobile" dans le sens le plus littéral (si elles sont "bonnes") et approchent de près un mécanisme cinétique. Pratiquement, elles se réduisent à des schémas logiques, dits "tableaux", et même (grâce à une interprétation convenue) à certains nombres naturels. Une grande partie des détails suivants sont évidemment des conventions arbitraires, mais servent bien à fixer les idées. Il semble d'ailleurs que cette théorie a une application : machines à calculer.

2. Description générale d'une machine.

Distinguons d'abord deux parties : une active : la machine proprement dite, mobile et capable d'imprimer des symboles, S_j , l'autre passive et fixe : une bande linéaire se prolongeant infiniment à droite (ou dans les deux directions) divisée en carrés égaux, chacun porteur d'un seul symbole, le vide ("spatium" des imprimeurs) étant aussi un symbole S_0 . L'unité de déplacement machine-bande est un carré ou "pas". A chaque moment, "tact" dans le sens musical ou "molécule de temps", la machine se trouve dans une certaine disposition q_i , dite sa configuration intérieure I.C. (ou m-configuration), et scrute un seul carré sur la bande, le"carré visé" (scruté). Jusqu'ici, et même plus loin, on a une analogie avec une "machine à écrire" limitée à une seule ligne.

En personnifiant cette machine (elle doit représenter un homme-calculateur idéal), la I.C. correspond à "l'état d'esprit", dont l'attention à chaque instant se porte sur un seul des symboles, celui du carré visé. En conséquence de sa disposition q_i , et de l'observation (constatation) du symbole scruté S_j , elle réagit en exécutant une certaine action A_k , et en passant dans un (autre) état q_ℓ . Son "comportement" $A_k\, q_\ell$ est bien déterminé par sa "situation" initiale $q_i\, S_j$. Un tact est donc complètement décrit par "l'instruction", le quadruple $q_i\, S_j\, A_k\, q_\ell$, où $k = k(i , j)$, $\ell = \ell(i , j)$ sont des fonctions uniformes, $i , \ell = 1 , \dots , N$, $j = 0 , 1 , \dots , N$, l'action A_k est ou bien l'impression d'un symbole S_k $(k = 0 , \dots , N)$ (c'est-à- dire la "sur-impression " comprenant éventuellement l'effacement d'un symbole primitif) où $A_{-1} = R$ (un pas à droite), $A_{-2} = L$ (un pas à gauche) et $A_{-3} = N$ (aucun mouvement).

D'autres conventions de TURING (quelques-unes extrêmement ingénieuses et pratiques) sont moins essentielles. La bande est limitée à gauche par sa "tête" $\partial\partial$; q_1 signifie une I.C. particulière, la "disposition initiale" de la $\mathfrak{M}$. Au commencement "le dossier est vierge", la bande ne portant pas d'inscription du tout, ou seulement, son nom propre (S.D. = description-standard). Les carrés appartiennent alternativement à deux classes $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{E}$, les symboles propres $(\neq S_0)$ sur les $\mathfrak{F}(\in \mathfrak{F})$ étant fixes, ceux $\in \mathfrak{E}$ provisoires, s'effaçant après avoir rendu service ; autrement dit, $\mathfrak{E}$ est une sorte de brouillon. Si deux symboles xy voisinent sur la bande et $x \in \mathfrak{F}$, donc $y \in \mathfrak{E}$, on dit "ce x est <u>marqué</u> y" ou "y est la marque de ce x ".

Ces conventions non-essentielles ont été critiquées par POST qui se limite aux conventions essentielles. Sa théorie n'est qu'en apparence plus générale, et n'entraîne aucune modification nécessaire (sauf pour certaines erreurs mineures évidentes de TURING et des fautes d'impression ; d'ailleurs les corrections de POST contiennent aussi des fautes d'impression) des conventions de TURING dont la machine "universelle" $\mathfrak{U}$ répond à toutes les exigences. Une autre différence encore de pure forme : TURING permet, dans un tact, deux (ou plusieurs) actions.

3. Exemple facile et instructif.

Une $\mathfrak{M}$ pour calculer, c'est-à-dire pour écrire, une suite qui commence 00101101110. Vous devinez bien quelle suite je pense, mais vraiment vous la devinez seulement ! Si j'étais méchant, je pourrais bien dire : non, je pensais autre chose ! Toutefois, il n'est pas difficile, mais pas trop commode (par paresse), de formuler la suite exacte. Mais parce que c'est possible nous pouvons aussi construire la machine voulue, et inversement ; elle sera d'ailleurs encore moins commode, mais dans ce chemin nous "!résoudrons" ! ("!, pour des guillemets ironiques) en principe de tels problèmes d'une manière générale. Voici cette machine particulière (tableau) :

Situation		Comportement	
I.C. initiale I	Symbole visé II	Actions III	I.C. finale IV
b	-	$\partial,R,\partial,R,0,R^2,0,L^2$	0
0	1	$R,\times,L^3$	0
	0		q
q	σ	R^2	q
	-	$1,L$	p
p	$\times$	E,R	q
	∂	R	f
	-	L^2	p
f	σ	R^2	f
	-	$0,L^2$	0

Explications :

0) $q_1 = b$, $N = 5$.
1) ∂ signifie "imprime ∂ ".
2) σ variable, symbole propre ($\neq S_0$)
3) S_0 est représenté par " - " s'il est visé, par E si l'on efface quelque σ, autrement supprimé.
4) N est supprimé.
5) L^3 , par exemple, signifie L,L,L , "trois pas à gauche".
6) Les quatre symboles propres : ∂ , $\times$, 0 , 1 .
7) La première place est une $\mathcal{F}$.

Suivons le fonctionnement de cette $\mathfrak{M}$ en écrivant tout le texte écrit sur la bande qu'on appelle C.C. = configuration complète, tact pour tact ; et en notant sur la place correcte aussi la I.C. finale du tact [1] :

0) $- : - - - - - - - . . .$

1) $\partial\,\partial\,\overset{o}{0} - 0 - : - - - -$

2) $\partial\,\partial\,\overset{q}{0} - 0 - : - - - -$

3) $\partial\,\partial\,0 - \overset{q}{0} - : - - - -$

4) $\partial\,\partial\,0 - 0 - \overset{q}{-} : - - -$

5) $\partial\,\partial\,0 - 0 \overset{p}{-} 1 : - - -$

6) $\partial\,\partial\,0 \overset{p}{-} 0 - 1 : - - -$

7) $\partial\,\overset{p}{\partial}\,0 - 0 - 1 : - - -$

8) $\partial\,\partial\,\overset{f}{0} - 0 - 1 : - - -$

9) $\partial\,\partial\,0 - \overset{f}{0} - 1 - - - - - -$

10) $\partial\,\partial\,0 - 0 - \overset{f}{1} - - - - - -$

11) $\partial\,\partial\,0 - 0 - 1 \overset{f}{-} - - - - -$

12) $\partial\,\partial\,0 - 0 - \overset{o}{1} - 0 - - - -$

13) $\partial\,\partial\,0 - \overset{o}{0} - 1 \times 0 - - - -$

14) $\partial\,\partial\,0 - \overset{q}{0} - 1 \times 0 - - - -$

15) $\partial\,\partial\,0 - 0 - \overset{q}{1} \times 0 - - - -$

16) $\partial\,\partial\,0 - 0 - 1 \times \overset{q}{0} - - - -$

17) $\partial\,\partial\,0 - 0 - 1 \times 0 \overset{q}{-} - - -$

etc.

On démontre facilement par induction qu'on obtient ainsi la suite désirée. Mentionnons le fait évident qu'on peut écrire cette suite de C.C. de nouveau sur une bande en les séparant par des " : " et en introduisant la I.C. devant son symbole scruté : $b - : \partial\,\partial\,o - 0 - 0 : \partial\,\partial\,q\,0 - 0 : \partial\,\partial\,0 - q\,0 : - - -$. Notons $\mathfrak{M}'$ la machine décrivant la suite des C.C. de $\mathfrak{M}$.

4. "Machines partielles" $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$.

Essayons d'abréger le travail (le nôtre, pas celui de la machine !) en introduisant une notation fonctionnelle. Ceci revient à la construction de "parties de rechange" dans le montage des machines entières. La première "machine partielle" est le "trouveur" dont la fonction est de trouver le premier exemplaire d'un certain symbole α dans un texte ininterrompu (ne contenant pas deux S_o consécutifs) ou de constater son absence, si le texte est fini. Une machine partielle n'est pas elle-même une machine, mais se décrit de la même manière :

---

[1] Une C.C. contient exactement tous les carrés visés jusqu'à la fin de son tact.

I	II	III	IV
$f(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$	∂	L	$f_1(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$
	$\sim\partial$, $-$	L	$f(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$
$f_1(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$	α		$\mathfrak{C}$
	$\sim\alpha$	R	$f_1(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$
	$-$	R	$f_2(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$
$f_2(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$	α		$\mathfrak{C}$
	$\sim\alpha$	R	$f_1(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$
	$-$	R	$\mathfrak{B}$

Explications :

1) Les majuscules gothiques dans l'argument sont des I.C. variables pour lesquelles on doit substituer une I.C. particulière ou de nouveau une telle fonction

2) $\sim\partial$ $(\sim\alpha)$ signifie un symbole propre $\neq \partial$ $(\neq \alpha)$.

3) Les $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ (machines partielles) font partie intégrante d'une $\mathfrak{M}$, dont la situation est justement celle de la $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ en travail dans ce moment (naturellement après la substitution complète des variables par des I.C. de $\mathfrak{M}$; on a une liste explicite des I.C. possibles ; autrement on pourrait obtenir par substitution une infinité de I.C.).

4) Rien n'empêche par exemple que $\mathfrak{C}$ soit de la forme $f(\mathfrak{C}', \mathfrak{B}', \alpha')$ et alors le trouveur commence de nouveau à marcher si $\alpha' \neq \alpha$.

5) On constate que s'il y a un α la I.C. finale est $\mathfrak{C}$, autrement $\mathfrak{B}$.

5. Liste des autres $\mathfrak{MP}$ employées.

On trouve facilement leur signification :

I	II	III	IV
$e(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$ $e_1(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$		E	$f(e_1(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha), \mathfrak{B}, \alpha)$ $\mathfrak{B}$
$e(\mathfrak{B}, \alpha)$			$e(e(\mathfrak{B}, \alpha), \mathfrak{B}, \alpha)$
$pe(\mathfrak{C}, \beta)$ $pe_1(\mathfrak{C}, \beta)$	$\begin{cases} \sigma \\ - \end{cases}$	R^2 β	$f(pe_1(\mathfrak{C}, \beta), \mathfrak{C}, \partial)$ $pe_1(\mathfrak{C}, \beta)$ $\mathfrak{C}$
$\ell(\mathfrak{C})$ $r(\mathfrak{C})$ $f'(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$ $f''(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$		L R	$\mathfrak{C}$ $\mathfrak{C}$ $f(\ell(\mathfrak{C}), \mathfrak{B}, \alpha)$ $f(r(\mathfrak{C}), \mathfrak{B}, \alpha)$
$c(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$ $c_1(\mathfrak{C})$	σ		$f'(c_1(\mathfrak{C}), \mathfrak{B}, \alpha)$ $pe(\mathfrak{C}, \sigma)$
$ce(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$ $ce(\mathfrak{B}, \alpha)$			$c(e(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha), \mathfrak{B}, \alpha)$ $ce(ce(\mathfrak{B}, \alpha), \mathfrak{B}, \alpha)$
$pe_2(\mathfrak{C}, \alpha, \beta)$			$pe(pe(\mathfrak{C}, \beta), \alpha)$
$ce_2(\mathfrak{B}, \alpha, \beta)$ $ce_3(\mathfrak{B}, \alpha, \beta, \gamma)$	etc		$ce(ce(\mathfrak{B}, \beta), \alpha)$ $ce(ce_2(\mathfrak{B}, \beta, \gamma), \alpha)$
$e(\mathfrak{C})$ $e_1(\mathfrak{C})$	$\begin{cases} \partial \\ \sim\partial \\ - \end{cases}$ $\begin{cases} \sigma \\ - \end{cases}$	R L R,E,R	$e_1(\mathfrak{C})$ $e(\mathfrak{C})$ $e_1(\mathfrak{C})$ $\mathfrak{C}$

$re(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha, \beta)$			$f(re_1(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha, \beta), \mathfrak{B}, \alpha)$
$re_1(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha, \beta)$		E, β	$\mathfrak{C}$
$re(\mathfrak{B}, \alpha, \beta)$			$re(re(\mathfrak{B}, \alpha, \beta), \mathfrak{B}, \alpha, \beta)$
$cr(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha)$			$c(re(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \alpha, a), \mathfrak{B}, \alpha)$
$cr(\mathfrak{B}, \alpha)$			$cr(cr(\mathfrak{B}, \alpha), re(\mathfrak{B}, a, \alpha), \alpha)$
$cp(\mathfrak{C}, \mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \alpha, \beta)$			$f'(cp_1(\mathfrak{C}, \mathfrak{A}, \beta), f(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \beta), \alpha)$
$cp_1(\mathfrak{C}, \mathfrak{A}, \beta)$	γ		$f'(cp_2(\mathfrak{C}, \mathfrak{A}, \gamma), \mathfrak{A}, \beta)$
$cp_2(\mathfrak{C}, \mathfrak{A}, \gamma)$	$\begin{cases} \gamma \\ \begin{Bmatrix} \sim\gamma \\ - \end{Bmatrix} \end{cases}$		$\mathfrak{C}$ $\mathfrak{A}$
$cpe(\mathfrak{C}, \mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \alpha, \beta)$			$cp(e(e(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}, \beta), \mathfrak{C}, \alpha), \mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \alpha, \beta)$
$cpe(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \alpha, \beta)$			$cpe(cpe(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \alpha, \beta), \mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \alpha, \beta)$
$q(\mathfrak{C})$	σ	R	$q(\mathfrak{C})$
	$-$	R	$q_1(\mathfrak{C})$
$q_1(\mathfrak{C})$	σ	R	$q(\mathfrak{C})$
	$-$		$\mathfrak{C}$
$con(\mathfrak{C}, \alpha)$	$\begin{Bmatrix} \sim A \\ - \end{Bmatrix}$	R^2	$con(\mathfrak{C}, \alpha)$
	A	L, α, R	$con_1(\mathfrak{C}, \alpha)$
$con_1(\mathfrak{C}, \alpha)$	A	R, α, R	$con_1(\mathfrak{C}, \alpha)$
	D	R, α, R	$con_2(\mathfrak{C}, \alpha)$
	$-$	D, R, α, R^3	$\mathfrak{C}$
$con_2(\mathfrak{C}, \alpha)$	C	R, α, R	$con_2(\mathfrak{C}, \alpha)$
	$\begin{Bmatrix} \sim C \\ - \end{Bmatrix}$	R^2	$\mathfrak{C}$

6. Enumération des $\mathfrak{M}$. Premières considérations.

Une $\mathfrak{M}$ est bien définie par la suite (finie !) de ses instructions séparées, disons, par des points-virgules :

$$q_1\ S_0\ A_{k(1,0)}\ q_{\ell(1,0)}\ ;\ q_1\ S_1\ A_{k(1,1)}\ q_{\ell(1,1)}\ ;\ \dots\ ;\ q_N\ S_M\ A_{k(N,M)}\ q_{\ell(N,M)}$$

Remplaçons $q_i \Leftrightarrow$ DA ... A Λ , i fois répété, donc q_1 = DA , q_2 = DAA , etc.

$S_j \Leftrightarrow$ DC ... C C , j fois répété, donc S_o = D , S_1 = DC , etc.,

et la description de $\mathfrak{M}$ est possible par les sept symboles

$$\begin{array}{ccccccc} A & C & D & R & L & N & ; \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

dite "description-standard", S.D. Remplaçons-les de plus par 1 2 3 4 5 6 7 et on obtient un certain nombre naturel n , le nombre descriptif D.N. qui détermine uniquement sa machine $\mathfrak{M}$ qu'on peut donc noter $\mathfrak{M}(n)$. Mais inversement la même $\mathfrak{M}$ permet plusieurs D.N. (même une infinité). Il est donc évident que l'ensemble des machines est dénombrable ; d'ailleurs, en se servant seulement des D.N. les plus petits de chaque $\mathfrak{M}$, son énumération est canoniquement déterminée par l'ordre naturel d'un sous-ensemble des nombres naturels (n.n.).

Même quand un n.n. est (formellement) le D.N. d'une $\mathfrak{M}$, ceci ne veut pas encore dire que la machine soit "bonne". Nous ne nous sommes intéressés qu'aux machines qui ne se bloquent pas, et fournissent un travail utile. Précisons : sans perte de généralité, on peut convenir que les symboles définitifs (ceux des $\mathfrak{F}$) sont exclusivement des 0 et 1 (on pense par exemple à la représentation dyadique des nombres réels) : $S_1 = 0$, $S_2 = 1$. Une machine est dite "bonne", si elle fournit une telle suite ininterrompue et infinie, et son D.N. est dit "bon" ; inversement, la suite est dite "suite calculable", si elle peut être fourni par une machine. A plus forte raison comme ci-dessus : Les bonnes machines sont dénombrables ; les suites calculables sont dénombrables. Mais, malgré cela, nous démontrerons : Il ne peut pas y avoir une "méthode générale" pour déterminer si un n.n. donné est un bon nombre ou, autrement dit, on ne peut pas construire une bonne machine pour déterminer si une machine donnée est une bonne machine. Ce problème de décision est donc résolu par une réponse négative.

Montrons d'abord qu'il y a des suites "! définissables "! (dans le sens ordinaire, probablement inexact), mais non calculables. Les bons D.N. étant ordonnés suivant leur grandeur naturelle, on obtient immédiatement, "! semble "!-t-il, l'énumération de toutes les suites calculables en notant

$X_n = \{X_{n1} , X_{n2} , \ldots , X_{nm} , \ldots ,\}$ la suite produite par la machine du n-ième bon D.N. En "! définissant "! la suite $\xi = \{X_{11} , X_{22} , \ldots , X_{ii} , \ldots ,\}$ on a obtenu une suite non calculable. En fait, autrement, la suite ξ' obtenue par l'échange des chiffres 0 et 1 $(X'_{ii} = 1 - X_{ii})$ serait évidemment aussi calculable. Mais $\xi' \neq X_n$ pour chaque n .

C.Q.F.D.

Donc : l'énumération ci-dessus des suites calculables ne peut pas être effectuée par les moyens finis d'un calcul général. Ceci revient à dire qu'on ne peut pas inventer une machine qui sera capable de sélectionner les bons D.N. ; disons, en produisant une suite $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots,\}$, on a $\gamma_n = n$, si et seulement si n est un bon nombre.

Bien plus ! Il ne peut pas y avoir une machine $\mathcal{E}$ qui pourrait déterminer si une machine donnée quelconque $\mathcal{M}$ imprime (au moins) une fois un symbole donné (disons 0). S'il existerait $\mathcal{E}$, il existerait aussi une machine pour déterminer si $\mathcal{M}$ imprime 0 un nombre infini de fois. Soient $\mathcal{M}_1$ comme $\mathcal{M}$, avec la seule différence qu'elle remplace le premier 0 de $\mathcal{M}$ (s'il existe) par $\overline{0}$, $\mathcal{M}_2$ de même, pour les deux premiers 0 de $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}_2 = (\mathcal{M}_1)_1$) etc. Soit $\mathcal{F}$ une machine qui, pour une $\mathcal{M}$ donnée, produit successivement les S.D. de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, ... , etc. Une telle machine est facile à construire. Combinons $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ en une nouvelle machine $\mathcal{G}$; $\mathcal{G}$ emploie d'abord $\mathcal{F}$ pour écrire le S.D. de $\mathcal{M}$, et alors elle l'examine par $\mathcal{E}$; si $\mathcal{M}$ n'imprime jamais 0 , $\mathcal{G}$ imprimera "0" , autrement disons 1. De nouveau $\mathcal{F}$ ecrira le S.D. de $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{E}$ l'examinera , etc. Examinons de même $\mathcal{G}$ elle-même par sa partie $\mathcal{E}$: si l'on trouve que $\mathcal{G}$ imprime une fois 0 , et seulement dans ce cas, $\mathcal{M}$ n'imprime pas 0 un nombre infini de fois. Même procédé pour déterminer si $\mathcal{M}$ imprime 1 un nombre infini de fois ou non. Donc on a un procédé pour déterminer si $\mathcal{M}$ est bonne, c'est-à-dire , si elle fournit une suite infinie des 0 ou / et des 1. Ceci contredit nos résultats ci-dessus.

Ces résultats apparaîtront peut-être plus étonnants par le fair que TURING a réussi à inventer une machine universelle $\mathcal{U}$ capable d'imiter chaque $\mathcal{M}$ particulière fonctionnant suivant un principe tres simple : Dans la situation initiale la bande porte après la tête $\partial\partial$ sur des carrés $\mathcal{F}$ la S.D. de $\mathcal{M}$ dont' la fin est indiquée par un $:: \in \mathcal{F}$. Alors $\mathcal{U}$ fournira le travail de $\mathcal{M}'$ (la suite des C.C. de $\mathcal{M}$). $\mathcal{U}$ est capable d'imprimer outre 0 et 1 , les symboles S_0 , A , C , D , u , v , w , x , y , z et ":" .

7. Tableau de la machine universelle $\mathfrak{U}$.

I	II	III	IV	Commentaires
b		R	$f(b_1,b_1,::)$	$\mathfrak{U}$ imprime derrière :: " : DA " sur des $\mathfrak{F}$ et → anf ("passe à la configuration anf")
b_1		$R^2,:,R^2,D,R^2,A$	anf	
anf			$q(anf_1,:)$	La dernière C.C. est marquée y, → kom .
anf_1			con(kom,y)	
kom	:	R,Z,L	con(kmp,x)	Trouve le dernier ":" sans la marque Z , la marque Z et la configuration suivante x, → kmp .
	Z	L^2	kom	
	∼ : ∼ Z	L	kom	
kmp			cpe(e(kom,x,y),sim,x,y)	Compare les suites marquées x et y , efface ces marques et → sim si ces suites sont identiques ; autrement → kom .
sim			$f'(sim_1,sim_1,Z)$	Marque les instructions; les instructions de l'exécution sont marquées u . La dernière I.C. est marquée y ; les z sont effacés.
sim_1			$con(sim_2,-)$	
sim_2	A		sim_3	
	∼ A -	L,u,R^3	sim_2	
sim_3	A	L,y,R^2	sim_3	
	∼ A -	L,y	e(mk,Z)	
mk			q(mk,:)	La dernière C.C. se traite en quatre parties : 1) la "situation" n'est pas marquée. 2) le symbole immédiatement devant est marqué x . 3) une autre partie v . 4) le reste w . A la fin on ajoute ":" ; → sh .
mk_1	∼ A	R^2	mk_1	
	A	L^4	mk_2	
mk_2	C	R,x,L^3	mk_2	
	:		mk_4	
	D	R,x,L^3	mk_3	
mk_3	∼ :	R,v,L^3	mk_3	
	:		mk_4	
mk_4			$con(\ell(\ell(mk_5)),-)$	
mk_5	∼ S_0	R,w,R	mk_5	
	-	:	sh	

sh			f(sh_1,inst,u)	Examen des instructions marquées u ; si elles existent l'impression d'un 0 (d'un 1) la machine imprime "0: " (" 1: ") .
sh_1		L^3	sh_2	
sh_2	D	R^4	sh_3	
	$\sim$ D		inst	
sh_3	C	R^2	sh_4	
	$\sim$ C		inst	
sh_4	C	R^2	sh_5	
	$\sim$ C		pe_2(inst,0,:)	
sh_5	C		inst	
	$\sim$ C		pe_2(inst,1,:)	

inst			q(ℓ(inst,), u)	μ est une variable pour les mouvements L , R , N .
$inst_1$	μ	,R,E	$inst_1(\mu)$	
$inst_1$(L)			ce_5(OV,v,y,x, u ,w)	
$inst_1$(R)			ce_5(OV,v,x, u ,y,w)	
$inst_1$(N)			ce_5(OV,v,x,y,u ,w)	
OV			e(anf)	

8. Nombres et fonctions calculables.

Passons des suites calculables aux nombres calculables. Le plus simple est d'identifier les suites avec des nombres réels $\equiv$ (mod 1) et de définir un nombre calculable quelconque comme distinct d'une suite calculable par un entier. A la suite d'une certaine difficulté, sur laquelle je n'insiste pas, TURING change cette convention et en adopte une autre, plus compliquée en apparence et certainement distincte.

On peut définir une fonction calculable d'un entier à valeurs entières : soit γ une suite calculable avec une infinité de zéros ; définissons $\xi(\gamma, n)$ = nombre des 1 entre le n-ième et le (n + 1)-ième zéro de γ ; la fonction $\Phi(n)$ est dite calculable si pour chaque n et pour une certaine γ : $\Phi(n) = \xi(\gamma, n)$. On remarque qu'on ne peut pas décider d'une manière générale si γ est une telle suite. On définit de même des fonctions calculables dont les valeurs de l'argument ou les arguments parcourent les nombres calculables.

TURING donne les théorèmes suivants :

1. Une fonction calculable d'une fonction calculable d'une variable calculable est calculable.

2. Une fonction d'une variable entière définie par récursion moyennant des fonctions calculables est calculable : $\Phi(m, n)$ calculable, r entier $\Rightarrow \eta(n)$ calculable où $\eta(0) = r$ et $\eta(n) = \Phi(n, \eta(n-1))$.

3. $\Phi(m, n)$ calculable de deux variables $\Longrightarrow \Phi(n, n)$ fonction calculable de n.

4. $\Phi(n)$ calculable avec valeurs 0 ou $1 \Longrightarrow \{\Phi(1), \Phi(2), \ldots, \Phi(n), \ldots,\}$ est une suite calculable.

5a. Le théorème de Dedekind (coupure) n'est pas valable. Evident.

5b. Soit $G(\alpha)$ une fonction propositionnelle calculable pour les α calculables telle que

$$\exists(\alpha, \beta)(G(\alpha) \,\&\, \sim G(\beta)), \quad G(\alpha) \,\&\, \sim G(\beta) \Longrightarrow \alpha < \beta,$$

alors il existe un nombre calculable ξ tel que $G(\alpha) \Longrightarrow \alpha \leq \xi$ et $\sim G(\alpha) \Longrightarrow \alpha \geq \xi$; c'est-à-dire ξ calculable existe si on peut pour chaque α calculer sa classe.

6. $\alpha < \beta$ calculable, $\Phi(\alpha) < 0 < \Phi(\beta)$ où Φ une fonction calculable croissante continue ; $\Longrightarrow \exists\, \gamma$ calculable et unique tel que $\Phi(\gamma) = 0$.

Convergence calculable d'une suite de nombres calculables β_n, s'il existe une fonction calculable à valeurs entières $N(\varepsilon)$ de la variable calculable ε avec

$$\varepsilon > 0 \; ; \; m, n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |\beta_n - \beta_m| < \varepsilon .$$

De même "convergence uniforme calculable" ; etc.

Conséquences : par exemple $\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots$, $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots +$ sont calculables ; tous les nombres réels algébriques sont calculables ; les zéros réels de la fonction de Bessel sont calculables. La "classe" des nombres calculables est donc assez vaste.

BIBLIOGRAPHIE

[1] POST (Emil). - Recursive unsolvability of a problem of Thue, J. symb. Logic, t. 12, 1947, p. 1-11.

[2] TURING (A. M.). - On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 42, 1937, p. 230-265.

[3] TURING (A. M.). - On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, A correction, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 43, 1938, p. 544-546.