JEAN BRACONNIER

Sous-algèbres sous-invariantes d'une algèbre de Lie et tour des dérivations

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 56, p. 59-65

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__59_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1952)

SOUS-ALGÈBRES SOUS-INVARIANTES D'UNE ALGÈBRE DE LIE ET TOUR DES DÉRIVATIONS

par Jean BRACONNIER

(d'après E. SCHENKMAN [1])

1. Dérivations d'une algèbre de Lie.

Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie sur un corps commutatif K. Si $x \in \mathfrak{a}$, on désigne par $\mathrm{ad}(x)$ l'endomorphisme $y \to [y,x]$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$. On dit qu'un sous-espace de $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{a}$ s'il est appliqué dans lui-même par tous les $\mathrm{ad}(x)$ $(x \in \mathfrak{a})$. On dit que $\mathfrak{a} \neq 0$ est simple si les seuls idéaux de $\mathfrak{a}$ sont $\{0\}$ et $\mathfrak{a}$. On appelle centralisateur d'une partie X de $\mathfrak{a}$ l'ensemble $\mathfrak{z}(X)$ des x tels que $\mathrm{ad}(x).X = 0$; le centralisateur de X est une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ et un idéal de $\mathfrak{a}$ si X est un idéal de $\mathfrak{a}$. Le centralisateur $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$ s'appelle le centre de $\mathfrak{a}$.

On appelle dérivation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ un endomorphisme D de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ tel que $D.[x,y] = [D.x,y] + [x,D.y]$ quels que soient x et y. L'espace vectoriel $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ des dérivations de $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie si on le munit de la loi de composition $(D_1,D_2) \mapsto [D_1,D_2] = D_2.D_1 - D_1.D_2$. Si $x \in \mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}(x)$ est une dérivation de $\mathfrak{a}$ dite intérieure et on a $[\mathrm{ad}(x),D] = \mathrm{ad}(D.x)$, si $x \in \mathfrak{a}$ et $D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{a})$. On en déduit moyennant un calcul immédiat le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - $x \to \mathrm{ad}(x)$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ dont le noyau est le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$; $\mathrm{ad}(\mathfrak{a})$ est un idéal de $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ dont le centralisateur est formé des D telles que $D.\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$.

En itérant le procédé et en posant $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}_i(\mathfrak{a}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{D}_{i-1})$, si $i > 0$, on voit qu'on obtient pour tout $i > 0$ un homomorphisme ad_i de $\mathfrak{D}_{i-1}$ sur un idéal $\mathrm{ad}_i(\mathfrak{D}_{i-1})$ de $\mathfrak{D}_i$ et que le centralisateur de cet idéal est formé des dérivations D de $\mathfrak{D}_{i-1}$ dont l'image est contenue dans le centre de $\mathfrak{D}_{i-1}$.

En particulier, si $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = 0$, on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{D}_i) = 0$ pour tout i. En identifiant $\mathfrak{D}_{i-1}$ à son image par l'isomorphisme ad_i, $\mathfrak{D}_{i-1}$ est un idéal de $\mathfrak{D}_i$

dont le centralisateur dans $\mathfrak{D}_i$ est 0 .

2. Algèbres nilpotentes.

a) Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie et, si $B \subset \mathfrak{a}$ et $C \subset \mathfrak{a}$, soit $[B,C]$ le sous-espace engendré par les $[b,c]$ $(b \in B,\ c \in C)$ et $\{B,C\}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ engendrée par $B \cup C$; si B est un idéal et C une sous-algèbre, on a $\{B,C\} = B + C$; si B et C sont des idéaux, $[B,C]$ et $B + C$ sont des idéaux. Si on pose $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}'$ et si $k > 1$ $\mathfrak{a}^k = [\mathfrak{a}^{k-1}, \mathfrak{a}]$ (resp. $\mathfrak{a}^{(k)} = [\mathfrak{a}^{(k-1)}, \mathfrak{a}^{(k-1)}]$), $(\mathfrak{a}^k)_k$ (resp. $(\mathfrak{a}^{(k)})_k$) est une suite décroissante d'idéaux de $\mathfrak{a}$ et on a $\mathfrak{a}^{(k)} \subset \mathfrak{a}^{2k}$; $\mathfrak{a}^{\omega} = \bigcap \mathfrak{a}^k$ et $\mathfrak{a}^{(\omega)} = \bigcap \mathfrak{a}^{(k)} \subset \mathfrak{a}^{\omega}$ sont des idéaux de $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{a}^{\omega} = 0$ (resp. $\mathfrak{a}^{(\omega)} = 0$) on dit que $\mathfrak{a}$ est nilpotente (resp. résoluble) ; toute sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ et tout quotient de $\mathfrak{a}$ par un idéal sont alors nilpotents (resp. résolubles). Si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont des idéaux nilpotents (resp. résolubles) de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ est nilpotent (resp. résoluble) ; il existe donc un plus grand idéal nilpotent $N(\mathfrak{a})$ (resp. résoluble $R(\mathfrak{a})$) de $\mathfrak{a}$ et on a $R(\mathfrak{a}/R(\mathfrak{a})) = 0$. On appelle $R(\mathfrak{a})$ le radical de $\mathfrak{a}$ et, si $R(\mathfrak{a}) = 0$, on dit que $\mathfrak{a}$ est semi-simple. Dans tout ce qui suit, on ne considèrera que des algèbres de dimension finie ; il existe alors k tel que $\mathfrak{a}^k = \mathfrak{a}^{k+1} = \mathfrak{a}^{\omega}$ (resp. $\mathfrak{a}^{(k)} = \mathfrak{a}^{(k+1)} = \mathfrak{a}^{(\omega)}$) .

b) Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathfrak{a}$ (de dimension finie sur K), on désigne par $\mathfrak{a}(u)$ le noyau de u . $(u^k.\mathfrak{a})$ est une suite décroissante de sous-espaces de $\mathfrak{a}$ et il existe k tel que $u^k.\mathfrak{a} = u^{k+1}.\mathfrak{a}$; on a alors $\mathfrak{a} = u^k.\mathfrak{a} + \mathfrak{a}(u^k)$. On dit que u est nilpotent si $u^k.\mathfrak{a} = 0$ pour un entier k . Si D est une dérivation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, la réunion de la suite croissante $(\mathfrak{a}(D^k))$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ (car $D^{2k}[x,y] = \sum_{p=0}^{2k} \binom{2k}{p} [D^p.x, D^{2k-p}y]$) (LEIBNIZ).

c) PROPOSITION 2. - Si $\mathfrak{a}$ est nilpotente et si $\mathfrak{b}$ est un idéal non nul de $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \neq 0$.

En effet, si on pose $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}_k = [\dots[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1], \dots \mathfrak{a}_k]$ si $k > 0$ et $\mathfrak{b}_o = \mathfrak{b}$, on a $\mathfrak{b}_k \subset \mathfrak{b}$ car $\mathfrak{b}$ est un idéal. $(\mathfrak{b}_k)$ est une suite décroissante d'idéaux ; il existe donc $k \geq 0$ tel que $\mathfrak{b}_k \neq 0$ et $\mathfrak{b}_{k+1} = 0$ car $\mathfrak{a}$ est nilpotente et $\mathfrak{b}_k \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$.

En particulier si $\mathfrak{a} \neq 0$ est nilpotente, $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \neq 0$.

THÉORÈME 1. – *Pour qu'une algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$ *soit nilpotente, il faut et il suffit que* $\mathrm{ad}(x)$ *soit nilpotent pour tout* $x \in \mathfrak{a}$.

C'est évidemment nécessaire. C'est suffisant d'après le théorème d'Engel.

THÉORÈME 2. – *Si* $\mathfrak{a}$ *est une algèbre de Lie, on a* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{\omega} + \mathfrak{h}$ *où* $\mathfrak{h}$ *est une sous-algèbre nilpotente de* $\mathfrak{a}$.

On le montre par récurrence sur $\dim \mathfrak{a}$. C'est trivial si $\dim \mathfrak{a} = 0$. Si $\dim \mathfrak{a} > 0$, supposons-le démontré pour toutes les algèbres de dimension $< \dim \mathfrak{a}$. Si pour tout $x \in \mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent, $\mathfrak{a}$ est nilpotente d'après le théorème 1. Dans le cas contraire, il existe $x \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathrm{ad}(x)^k . \mathfrak{a} \neq 0$ pour tout k. Soit $\mathfrak{i}$ l'intersection des $\mathrm{ad}(x)^k . \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ réunion des $\mathfrak{a}(\mathrm{ad}(x)^k)$. On a $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} + \mathfrak{n}$ et $\dim \mathfrak{n} < \dim \mathfrak{a}$; donc $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^{\omega} + \mathfrak{h}$ où $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{a}^{\omega}$ car $\mathrm{ad}(x).\mathfrak{i} = \mathfrak{i}$. D'où $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} + \mathfrak{n}^{\omega} + \mathfrak{h} = \mathfrak{a}^{\omega} + \mathfrak{h}$.

3. Sous-algèbres sous-invariantes.

Soient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ deux sous-algèbres d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ telles que $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{b}$. On appelle *suite de composition joignant* $\mathfrak{b}$ *à* $\mathfrak{c}$ une suite décroissante $(\mathfrak{a}_i)_{0 \leq i \leq k}$ de sous-algèbres de $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{c}$ et que $\mathfrak{a}_{i+1}$ soit un idéal de $\mathfrak{a}_i$ pour tout i. S'il existe une suite de composition joignant $\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{c}$, on dit que $\mathfrak{c}$ est *sous-invariante* dans $\mathfrak{b}$.

PROPOSITION 3. – *Si* $\mathfrak{b}$ *est une sous-algèbre sous-invariante d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^{\omega}$ *et* $\mathfrak{b}^{(\omega)}$ *sont des idéaux.*

On montre par récurrence sur n que, si $(\mathfrak{a}_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une suite décroissante de sous-algèbres de $\mathfrak{a}$, on a $[\mathfrak{a}_n^r , \mathfrak{a}_0] \subset [\mathfrak{a}_n , [\mathfrak{a}_{n-1} , \dots , \mathfrak{a}_0] \dots]$. Ceci étant, soit $(\mathfrak{b}_i)_{0 \leq i \leq q}$ une suite de composition joignant $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{b}$ et p tel que $\mathfrak{b}^p = \mathfrak{b}^{\omega}$. Posons $n = p+q-1$, $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_i$ si $0 \leq i \leq k$, $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}$ dans le cas contraire. Comme $\mathfrak{a}_{i+1}$ est un idéal de $\mathfrak{a}_i$, on a $[\mathfrak{b}^n , \mathfrak{a}] \in \mathfrak{b}^p$, d'où $[\mathfrak{b}^{\omega}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{b}^{\omega}$. En particulier, si $\mathfrak{b}_1$ est sous-invariante et si $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_1^2$, $\mathfrak{b}_1$ est un idéal. Si p' est tel que $\mathfrak{b}^{p'} = \mathfrak{b}^{(\omega)}$, on a alors $\mathfrak{b}^{(\omega)} = \mathfrak{b}^{(\omega)2}$ et $\mathfrak{b}^{(\omega)}$ est un idéal.

On dit qu'une suite de composition $(\mathfrak{a}_i)_{0 \leq i \leq k}$ joignant $\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{c}$ est une suite de Jordan-Hölder si tous les quotients $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ sont simples, i.e. si, pour tout i, $\mathfrak{a}_{i+1}$ est un idéal maximal de $\mathfrak{a}_i$. Toute suite de composition joignant $\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{c}$ est extraite (en répétant au besoin certains termes) d'une suite de Jordan-Hölder joignant $\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{c}$ (théorème de Schreier) ; si $(\mathfrak{a}_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ et $(\mathfrak{b}_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ sont deux suites de Jordan-Hölder joignant $\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{c}$, on a $m = n$ et il existe une permutation φ de $[0,m]$ telle que $\mathfrak{a}_i$ soit isomorphe à $\mathfrak{b}_{\varphi(i)}$ pour tout i (théorème de Jordan-Hölder).

PROPOSITION 4. - Si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont deux sous-algèbres sous-invariantes de $\mathfrak{a}$,

a) $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{d}$ est sous-invariante dans toute sous-algèbre $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{a}$;

b) $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ est sous-invariante dans $\mathfrak{a}$;

c) les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant $\mathfrak{c}$ à $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ sont des quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{b}$.

Les a) et b) sont immédiats. c) l'est aussi si $(\mathfrak{a}_i)$ est une suite de Jordan-Hölder joignant $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{b}$, ou bien $\mathfrak{a}_{i+1} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{b}$, ou bien $\mathfrak{a}_{i+1} \cap \mathfrak{b}$ est un idéal maximal de $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{b}$ et, dans ce cas, $(\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{b})/(\mathfrak{a}_{i+1} \cap \mathfrak{b})$ est isomorphe à $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$. On démontre aussi facilement la

PROPOSITION 5. - Si f est un homomorphisme de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{a}'$, $f.\mathfrak{b}$ est sous-invariante dans $\mathfrak{a}'$; si $\mathfrak{b}'$ est sous-invariante dans $\mathfrak{a}'$, $f^{-1}(\mathfrak{b}')$ est sous-invariante dans $\mathfrak{a}$.

Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre, toute sous-algèbre $\mathfrak{b} \subset N(\mathfrak{a})$ est sous-invariante dans $\mathfrak{a}$ (car $(N(\mathfrak{a})^k + \mathfrak{b})$ est une suite de composition joignant $N(\mathfrak{a})$ à $\mathfrak{b}$ et $N(\mathfrak{a})$ est un idéal de $\mathfrak{a}$).

Pour qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ soit résoluble, il faut et il suffit que les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant $\mathfrak{a}$ à 0 soient de dimension 1.

Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre quelconque d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, l'intersection $\mathfrak{b}^*$ des sous-algèbres sous-invariantes de $\mathfrak{a}$ qui contiennent $\mathfrak{b}$ est sous-invariante. Si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{a}$ telles que $\{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, alors $\{\mathfrak{b}^*, \mathfrak{c}^*\} = \mathfrak{b}^* + \mathfrak{c}^*$.

4. Le théorème fondamental

THÉORÈME 3. - Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre sous-invariante d'une algèbre de Lie

$\mathfrak{a}$, *et si* $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}) = 0$, *on a* $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \subset \mathfrak{b}^{\omega}$.

LEMME. – *Si* $\mathfrak{a}$ *est une algèbre à centre nul, on a* $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}^{\omega}) \subset \mathfrak{a}^{\omega}$.

En effet, on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{\omega} + \mathfrak{k}$ où $\mathfrak{k}$ est nilpotente (théorème 2). Soit $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}^{\omega}) + \mathfrak{k} = \mathfrak{a}_1^{\omega} + \mathfrak{h}$ où $\mathfrak{h}$ est nilpotente. On a $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{\omega} + \mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}^{\omega} + \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}^{\omega} + \mathfrak{h}$. De plus $\mathfrak{a}_1^{\omega} = (\mathfrak{z}(\mathfrak{a}^{\omega}) + \mathfrak{h})^{\omega} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a}^{\omega})$. Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}^{\omega}) \not\subset \mathfrak{a}^{\omega}$, il existe $y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a}^{\omega}) \cap \complement \mathfrak{a}^{\omega}$ (sinon $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}^{\omega}) \subset \mathfrak{a}_1^{\omega} \subset \mathfrak{a}^{\omega}$) ; on a $y = x+x'$ avec $x' \in \mathfrak{a}_1^{\omega}$, $x \in \mathfrak{h}$ et $x \neq 0$; $x = y-x' \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a}^{\omega}) + \mathfrak{a}_1^{\omega} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a}^{\omega})$; donc $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}^{\omega}) \cap \mathfrak{h}$ est idéal non nul de $\mathfrak{h}$ (proposition 3 et proposition 2). On a $0 \neq \mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}^{\omega}) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a}^{\omega} + \mathfrak{h}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ ce qui est absurde.

Cela étant, on a $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \subset \mathfrak{b}^{\omega}$ (sinon $0 \neq \mathfrak{z}(\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{b})$ d'après le lemme). Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \not\subset \mathfrak{b}^{\omega}$, on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \not\subset \mathfrak{b}$ (sinon $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \subset \mathfrak{b}^{\omega}$). $\mathfrak{b}^{\omega}$ est un idéal (proposition 3) et il en est de même de $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega})$. $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + \mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre sous-invariante de $\mathfrak{c}$, et $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{c}$; soit $\mathfrak{b}_1$ une sous-algèbre de $\mathfrak{c}$ telle que $\mathfrak{b}$ soit un idéal de $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}_1$. Soit $y \in \mathfrak{b}_1 \cap \complement \mathfrak{b}$; on a $y = x+x'$ avec $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega})$ et $x' \in \mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}_1$ et $x = y-x' \in \mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \cap \mathfrak{b}_1$ n'appartient pas à $\mathfrak{b}$. Si $\mathfrak{d} = Kx + \mathfrak{b}$, on a $\mathfrak{b}^{\omega} = \mathfrak{d}^{\omega}$ (car $[\mathfrak{b}, x] \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \subset \mathfrak{b}^{\omega}$ et $\mathfrak{d}^2 \subset \mathfrak{b}^{\omega}$, d'où $\mathfrak{d}^{\omega} \subset \mathfrak{b}^{\omega}$). On a $\mathfrak{z}(\mathfrak{d}^{\omega}) \cap \mathfrak{d} \not\subset \mathfrak{d}^{\omega}$ (sinon $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \cap \mathfrak{d} \subset \mathfrak{b}^{\omega} \subset \mathfrak{b}$). Donc le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{d}) \cap \mathfrak{d}$ de $\mathfrak{d}$ est non nul d'après le lemme et $0 \neq \mathfrak{z}(\mathfrak{d}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{b})$, ce qui est absurde.

THÉORÈME 4. – *Si* $\mathfrak{b}$ *est une sous-algèbre sous-invariante d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$ *telle que* $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}) = 0$, *on a* $\dim \mathfrak{a} \leqslant \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{b}^{\omega}) + \dim (\text{centre de } \mathfrak{b}^{\omega})$.

En effet, $\mathfrak{b}^{\omega}$ est un idéal de $\mathfrak{a}$ (proposition 3) et $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega})$ est le centre de l'algèbre $\mathfrak{b}^{\omega}$ (théorème 3). Enfin, $x \to$ restriction à $\mathfrak{b}^{\omega}$ de $\mathrm{ad}(x)$ est un homomorphisme de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{D}(\mathfrak{b}^{\omega})$ dont le noyau est $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega})$. On a donc $\dim \mathfrak{a} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) = \dim \mathfrak{a}/\mathfrak{z}(\mathfrak{b}^{\omega}) \leqslant \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{b}^{\omega})$.

THÉORÈME de la tour des dérivations. – *Si* $\mathfrak{a}$ *est une algèbre de Lie à centre nul, on a* $\dim \mathfrak{D}_i(\mathfrak{a}) \leqslant \dim \mathfrak{a}^{\omega} + \dim \text{centre } \mathfrak{a}^{\omega}$ *pour tout* $i \geqslant 0$.

On montre d'abord facilement que si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie, si $\mathfrak{b}_1$ est sous-invariante dans $\mathfrak{a}$, si $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{b}_1$ et si $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{b}_1 = 0$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}_1) = 0$, on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}) = 0$.

Ceci étant, avec les notations du numéro 1, on voit que étant donné i, $(\mathfrak{d}_k)_{0 \leqslant k \leqslant i}$ est une suite de composition joignant $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{d}_i$ et que $\mathfrak{z}(\mathfrak{d}_{k-1}) \cap \mathfrak{d}_k = 0$ si $0 < k \leqslant i$. D'après la remarque précédente on voit (en raisonnant par récurrence sur k) que $\mathfrak{z}(\mathfrak{d}_{i-k}) = 0$, d'où (dans $\mathfrak{d}_i$) $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = 0$ et le théorème est alors conséquence immédiate du théorème 4.

COROLLAIRE. - *Si* i *est assez grand, toutes les dérivations de* $\mathfrak{d}_i(\mathfrak{a})$ *sont intérieures* (résultat annoncé par C. CHEVALLEY dans le cas des algèbres sur un corps de caractéristique 0).

5. Sous-algèbres d'une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0.

Dans le cas des algèbres de Lie sur un corps K de caractéristique 0 (on ne considèrera que de telles algèbres dans la suite), on peut apporter d'importants compléments aux numéros 2 et 3. Si $\mathfrak{a}$ est une *algèbre de Lie résoluble,* $\mathfrak{a}^2$ *est nilpotente* (théorème de Lie). *Si* $\mathfrak{a}$ *est semi-simple,* $\mathfrak{a}$ *est somme directe d'une famille finie d'idéaux simples non commutatifs* (théorème de Cartan). Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie, on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{(\omega)} + R(\mathfrak{a})$
(car $\mathfrak{a}/R(\mathfrak{a}) = [\mathfrak{a}/R(\mathfrak{a})]^{(\omega)} = [\mathfrak{a}^{(\omega)} + R(\mathfrak{a})]/R(\mathfrak{a})$) cf. théorème 2.

Pour toute dérivation D de a, on a

$$D.N(\mathfrak{a}) \subset N(\mathfrak{a}) , \tag{1}$$

$$D.R(\mathfrak{a}) \subset R(\mathfrak{a}) , \tag{2}$$

$$D.R(\mathfrak{a}) \subset N(\mathfrak{a}) \tag{3}$$

((1) résulte du théorème de Lie, (3) du théorème de Cartan, et (2) de (1) et (3)). On en déduit que si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre sous-invariante de $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{b} \subset R(\mathfrak{a})$ si $\mathfrak{b}$ est résoluble, $\mathfrak{b} \subset N(\mathfrak{a})$ si $\mathfrak{b}$ est nilpotente. D'où $R(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cap R(\mathfrak{a})$ et $N(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \cap N(\mathfrak{a})$.

THÉORÈME 5. - *Si* $\mathfrak{b}$ *et* $\mathfrak{c}$ *sont deux sous-algèbres sous-invariantes d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$, $\{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ *est sous-invariante et les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant* $\{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ *à* $\mathfrak{b}$ *sont des quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant* $\mathfrak{c}$ *à* $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$, *abstraction faite de la multiplicité des quotients de dimension* 1.

Pour voir que $\{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ est sous-invariante, on distingue deux cas : si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont nilpotentes, on a $\{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\} \subset N(\mathfrak{a})$ et $\{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ est sous-invariante dans l'idéal $N(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$; dans l'autre cas, on projette sur $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}^{\omega} + \mathfrak{c}^{\omega})$, et on est ramené au cas précédent. Pour voir le reste, si φ est l'application canonique de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}^{(\omega)}$, on remarque que les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant $\{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ à $\mathfrak{b}$ sont les mêmes que ceux d'une suite joignant $\varphi . \{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ à $\varphi . \mathfrak{b}$ et que les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant $\varphi . \mathfrak{c}$ à $\varphi .(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$ sont des quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant $\mathfrak{c}$ à $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ (propositions 4 et 5).

Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre quelconque de $\mathfrak{a}$, la sous-algèbre $\mathfrak{b}_*$ engendrée par toutes les sous-algèbres sous-invariantes de $\mathfrak{a}$ contenues dans $\mathfrak{b}$ est sous-invariante ; $\mathfrak{b}_*$ est un <u>idéal</u> de $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}_* \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}^*$. Si $\mathfrak{c}$ est une sous-algèbre sous-invariante de $\mathfrak{a}$, les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant $\{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}^*$ à $\{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}_*$ sont des quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant $\mathfrak{b}^*$ à $\mathfrak{b}_*$.

Enfin, on peut préciser la structure de $\{x\}^*$ $(x \in \mathfrak{a})$:

THÉORÈME 6. - <u>Soit</u> $\mathfrak{a}$ <u>une algèbre de Lie,</u> $x \in \mathfrak{a}$ <u>et</u> $\mathfrak{i}(x)$ <u>la sous-algèbre engendrée par</u> $\bigcap_k \operatorname{ad}(x)^k . \mathfrak{a}$.

a) <u>si</u> $x \in R(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{i}(x)$ <u>est un idéal de</u> $\mathfrak{a}$ <u>et</u> $\{x\}^* = \mathfrak{i}(x) + Kx$.

b) <u>soient</u> p <u>l'homomorphisme canonique de</u> $\mathfrak{a}$ <u>sur</u> $\mathfrak{a}/R(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{s}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ <u>des algèbres simples non commutatives telles que</u> $\mathfrak{a}/R(\mathfrak{a})$ <u>soit somme directe des</u> $\mathfrak{s}_i$ <u>et soit</u> $\mathfrak{t}_i = p^{-1}(\mathfrak{s}_i)$; <u>l'idéal</u> $\mathfrak{t}_i^{(\omega)}$ <u>de</u> $\mathfrak{a}$ <u>est la plus petite des sous-algèbres sous-invariantes</u> $\mathfrak{t}$ <u>de</u> $\mathfrak{a}$ <u>telles que</u> $p . \mathfrak{t} = \mathfrak{s}_i$.

c) <u>si</u> $x \in \mathfrak{a}$, <u>soit</u> $J(x)$ <u>l'ensemble des</u> i <u>tels que</u> $\operatorname{pr}_{\mathfrak{s}_i} . p . x \neq 0$; <u>il existe</u> $y \in R(\mathfrak{a})$ <u>tel que</u> $x - y \in \sum_{j \in J(x)} \mathfrak{t}_j^{(\omega)}$ <u>et on a</u> $\{x\}^* = \mathfrak{i}(y) + Ky + \sum_{j \in J(x)} \mathfrak{t}_j^{(\omega)}$.

a) On a $\operatorname{ad}(x) . \mathfrak{i}(x) \subset \mathfrak{i}(x)$, donc $\mathfrak{i}(x)+Kx$ est une sous-algèbre. On a $\mathfrak{i}(x) \subset N(\mathfrak{a})$, et $\mathfrak{i}(x)+Kx$ est sous-invariante dans l'idéal $\mathfrak{i}(x)+Kx+N(\mathfrak{a})$ de $R(\mathfrak{a})$, donc dans $\mathfrak{a}$. On a $(\mathfrak{i}(x)+Kx)^{\omega} = \mathfrak{i}(x)$ ce qui prouve (proposition 3) que $\mathfrak{i}(x)$ est un idéal. Le reste est immédiat.

b) est immédiat.

c) résulte de a) et b).

BIBLIOGRAPHIE

[1] SCHENKMAN (Eugène). - A theory of subvariant Lie algebras, Amer. J. of Math., t.78, 1951, p. 453-474.