JACQUES DIXMIER

Quelques résultats d'Harish-Chandra, I

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 50, p. 7-11

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__7_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1951)

QUELQUES RÉSULTATS D' HARISH-CHANDRA [1], I,

par Jacques DIXMIER.

Tous les espaces vectoriels et toutes les algèbres sont sur le corps complexe.

1. L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

1. - Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, T l'algèbre tensorielle de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$, I l'idéal bilatère de T engendré par les

$$a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 - [a_1 , a_2] , a_1 \in \mathfrak{a} , a_2 \in \mathfrak{a} .$$

Soit S le sous-espace de T formé des tenseurs symétriques. Alors, T est la somme directe de S et I (non trivial). L'application canonique de T sur $A = T/I$ applique biunivoquement S sur A. En particulier, on peut identifier désormais $\mathfrak{a} \in S$ à un sous-espace de A ; A est engendré par $\mathfrak{a}$ et 1. D'autre par toute représentation ν de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ se prolonge de manière unique en une représentation ν' de l'algèbre associative T, qui s'annule sur les $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 - [a_1 , a_2]$, donc sur I ; alors ν' définit par passage au quotient une représentation ν_1 de l'algèbre associative A ; ν_1 est la seule représentation de A prolongeant ν ; réciproquement, toute représentation de l'algèbre associative A fournit, par restriction à $\mathfrak{a}$, une représentation de l'algèbre Lie $\mathfrak{a}$. L'algèbre A s'appelle l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$.

2. - Sur l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$, introduisons l'unique structure d'algèbre de Lie commutative. L'idéal I correspondant dans T est l'idéal engendré par les $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1$; nous le désignerons par I'. Alors, T est la somme directe de S et I'. Identifions S à l'algèbre commutative T/I' : S se trouve muni d'une structure multiplicative qui en fait l'algèbre sysmétrique de $\mathfrak{a}$ (algèbre de polynômes).

Revenons à l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ initiale. Soit γ la restriction à S de l'application canonique de T sur A. On a vu que γ est un isomorphisme de l'espace S sur l'espace A. Mais γ n'est pas un isomorphisme d'algèbre. On va étudier les relations entre l'algèbre S et l'algèbre A.

---

[1] HARISH-CHANDRA. - On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 28-96.

Soit S^r l'ensemble des éléments homogènes de degré r de S. On a : $S^r S^{r'} \subset S^{r+r'}$: S est une algèbre <u>graduée</u>. Soit $A^r = \gamma(S^r)$. Nous dirons que les éléments de A^r sont les éléments symétriques homogènes de degré r de A. L'espace A est la somme directe des A^r ; $A^0 = \{\lambda 1\}$, et $A^1 = \mathfrak{a}$. Soit $A_r = A^0 + A^1 + \dots + A^r$. On voit aisément que A_r est l'ensemble des éléments de A qui peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de produits de r éléments de $\mathfrak{a}$ au plus. Donc $A_r A_{r'} \subset A_{r+r'}$: A est une algèbre <u>filtrée</u> par les A_r (mais <u>non</u> graduée par les A^r). Un élément $a \neq 0$ de A sera dit de degré r si sa composante symétrique homogène non nulle de degré maximum est de degré r. Ainsi, γ conserve le degré.

Soient $s \in S$, $s' \in S$, avec (degré de s) $\leqslant r$, (degré de s') $\leqslant r'$. Alors, $\gamma(s)$, $\gamma(s')$ et $\gamma(ss')$ sont congrus modulo $A_{r+r'-1}$. Autre expression de ce résultat : construisons l'<u>algèbre graduée</u> B <u>associée à l'algèbre filtrée</u> A ; soit B_r l'espace A_r/A_{r-1}, et B la somme directe $B_0 + B_1 + \dots$; le produit dans A définit, par passage au quotient, une application bilinéaire de $B_r \times B_{r'}$ dans $B_{r+r'}$; d'où, par linéarité, une application bilinéaire de $B \times B$ dans B ; autrement dit, B se trouve munie d'une structure d'algèbre, graduée par les B_r. Il y a un isomorphisme canonique évident de l'espace B_r sur l'espace A^r donc sur l'espace S^r ; d'où un isomorphisme canonique de l'espace B sur l'espace S, qui est aussi un isomorphisme <u>d'algèbres</u>.

3. - Soient $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$, G la sous-algèbre de A engendrée par $\mathfrak{g}$. Soit G' l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Il existe un homomorphisme de G' sur G tel que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(g) = g$ pour $g \in \mathfrak{g}$. Soit $(g_1, g_2, \dots, g_m)$ une base de $\mathfrak{a}$ telle que $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ soit une base de $\mathfrak{g}$. Les $g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_r}$ (calculés dans G'), où $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ est une suite croissante (au sens large) d'entiers compris entre 1 et n, forment une base de l'espace G', et leurs images par φ sont linéairement indépendantes ; donc φ est biunivoque. Nous <u>identifierons</u> désormais G' à G par l'isomorphisme φ.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}, \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = 0$. Soit $H \subset A$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$. L'application bilinéaire $(g, h) \rightarrow gh$ de $G \times H$ dans A définit une application linéaire θ de $G \otimes H$ dans A telle que $\theta(g \otimes h) = gh$. On peut supposer que $g_{n+1}, g_{n+2}, \dots, g_m$ forment une base de $\mathfrak{h}$. Les $g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_r} \times g_{j_1} g_{j_2} \cdots g_{j_s}$ (où $(j_1, j_2, \dots, j_s)$ est une suite croissante d'entiers compris entre $n+1$ et m) forment une base de $G \otimes H$;

or les $g_{i_1}\ g_{i_2} \dots g_{i_r}\ g_{j_1}\ g_{j_2} \dots g_{j_s}$ forment une base de A. Donc θ est un <u>isomorphisme</u> de l'espace vectoriel $G \otimes H$ sur l'espace A.

2. Représentation des algèbres de Lie.

1. - Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie, H son algèbre enveloppante. Soit Δ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{h}$. La représentation nulle s'effectuant dans un espace de dimension 1 définit un élément δ_0 de Δ. Soit ν une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un espace V. Pour $\delta \in \Delta$, on désigne par V_δ l'espace engendré par les sous-espaces stables de V dans lesquels ν induit une représentation de classe δ. Les éléments de V_{δ_0} sont les éléments annulés par ν, encore appelés <u>invariants</u>. V_δ est stable pour ν. Si $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ sont des éléments distincts de Δ, il existe $h \in H$ tel que $\nu(h)$ se réduise à 1 dans V_{δ_1}, à 0 dans les V_{δ_i}, $i > 1$; il en résulte que la somme $\sum V_\delta$ est directe.

Si W est un sous-espace stable de V, on a $W_\delta = V_\delta \cap W$. Soient d'autre part $v \to v^*$ l'application canonique de V sur $V^* = V/W$, et ν^* la représentation induite par ν dans V^*. Si $v \in V_\delta$, on a $v^* \in (V^*)_\delta$, donc $(V^*)_\delta \supset (V_\delta)^*$. Si de plus $V = \sum V_\delta$, on a $V^* = \sum (V_\delta)^*$, donc, la somme $\sum (V^*)_\delta$ étant directe, $(V^*)_\delta = (V_\delta)^*$.

Si $V = \sum_{\iota} V^{\iota}$ est une décomposition de V en somme directe de sous-espaces stables pour ν, on a $V_\delta = \sum_{\iota} (V_\delta \cap V^{\iota}) = \sum_{\iota} (V^{\iota})_\delta$.

Si $v \in \sum V_\delta$, le sous-espace $W = \nu(H)v$ est de dimension finie. Réciproquement, si W est de dimension finie, et si $\mathfrak{h}$ est <u>semi-simple</u>, on a $v \in \sum V_\delta$; en effet, W, qui est stable pour ν, est complètement réductible.

2. Soit $\delta \in \Delta$, et ν_δ une représentation de classe δ dans un espace U_δ. La représentation $\nu_{\delta^*} = -{}^t(\nu_\delta)$ qui s'effectue dans l'espace U_{δ^*} dual de U_δ, définit un élément δ^* de Δ. Ceci posé, considérons, dans $W = V \otimes U_{\delta^*}$, la représentation $\nu \otimes 1 + 1 \otimes \nu_{\delta^*}$. Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ une base de U_{δ^*}. Alors, si $w = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i \in W_{\delta_0}$, le sous-espace V' de V engendré par les v_i est stable, et ν induit dans V' une représentation de classe δ, ou bien $V' = 0$. Réciproquement, si ν induit dans un sous-espace stable V' de V une

représentation de classe δ , on peut choisir une base $v_1, v_2, \dots, v_n$ de V' telle que $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i \in W_{\delta_0}$.

3. - Si V est une algèbre, et si $\nu(h)$ est, pour tout $h \in \mathfrak{h}$, une dérivation de V , chaque V_δ est un V_{δ_0}-module (à gauche par exemple). Car soient $h \in \mathfrak{h}$, $v \in V_\delta$, $v_0 \in V_{\delta_0}$; on a : $\nu(h)(v_0 v) = v_0(\nu(h)v)$; donc, si ν induit dans $\nu(H)v$ une représentation de classe δ , on a $\nu(H)(v_0 v) = 0$, ou bien la représentation induite dans $\nu(H)(v_0 v)$ est de classe δ ; donc $v_0 \in V_\delta$. En particulier, V_{δ_0} est une sous-algèbre de V .

Pour $v \in \sum V_\delta$, désignons par $v^\natural$ la composante de v dans V_{δ_0} . L'application $v \to v^\natural$ est un projecteur de $\sum V_\delta$ sur V_{δ_0} . Si $v_0 \in V_{\delta_0}$ et $v \in V_\delta$, on a $v_0 v \in V_\delta$, donc $(v_0 v)^\natural = 0 = v_0 v^\natural$ si $\delta \neq \delta_0$, et $(v_0 v)^\natural = v_0 v = v_0 v^\natural$ si $\delta = \delta_0$; donc, si $v_0 \in V_{\delta_0}$ et $v \in \sum V_\delta$, on a $(v_0 v)^\natural = v_0 v^\natural$. De même, $(v v_0)^\natural = v^\natural . v_0$.

4. - Supposons désormais $\mathfrak{h}$ semi-simple et V de dimension finie. Soit $S \supset V$ l'algèbre symétrique de V . Pour $h \in \mathfrak{h}$, $\nu(h)$ se prolonge d'une manière unique en une dérivation $\tilde{\nu}(h)$ de S , et $\tilde{\nu}$ est encore une représentation de $\mathfrak{h}$: car, si $h_1 \in \mathfrak{h}$, $[\tilde{\nu}(h), \tilde{\nu}(h_1)]$ et $\tilde{\nu}([h, h_1])$ sont deux dérivations de S qui coïncident sur V , donc sont identiques. Soit S^r l'ensemble des éléments homogènes de degré r de S . S^1 est stable pour $\tilde{\nu}$, donc aussi S^r . Comme $S = \sum_1^{\infty} S^r$ et que $\dim S^r < +\infty$, on voit que $S = \sum S_\delta$, et $S_\delta = \sum_r (S_\delta \cap S^r)$.

THÉORÈME des invariants. - L'algèbre S_{δ_0} a un nombre fini de générateurs.

Soit $\bar{S} = S^1 + S^2 + \dots$ Soit $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ une base de l'idéal engendré dans S par l'algèbre $S_{\delta_0} \cap \bar{S}$. On peut supposer les s_i dans $S_{\delta_0} \cap \bar{S}$, et homogènes. Montrons que $S_{\delta_0} \cap \bar{S}$ est l'algèbre engendrée par $s_1, s_2, \dots, s_n$. Soit $s \in S_{\delta_0} \cap \bar{S}$; s est somme de produits $s_i s_i'$, où on peut supposer les $s_i' \in S$ homogènes, avec $\deg s_i' < \deg s$; donc $s = s^\natural$ est somme de produits $(s_i s_i')^\natural = s_i s_i'^\natural$, avec des $s_i'^\natural \in S_{\delta_0}$ homogènes, et $\deg s_i'^\natural < \deg s$. Si les $s_i'^\natural$ sont des scalaires, s est bien dans l'algèbre engendrée par les s_i . Sinon, $s_i'^\natural \in S_{\delta_0} \cap \bar{S}$, et on recommence. Par récurrence sur $\deg s$, le théorème est démontré.

COROLLAIRE. - Chaque S_{δ} est un S_{δ_o} -module de type fini.

Soit T l'algèbre symétrique de U_{δ^*} , $\tilde{\nu}_{\delta^*}$ la représentation (dans T) prolongée de ν_{δ^*} (dans U_{δ^*}) . Soit $\xi = \tilde{\nu} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\nu}_{\delta^*}$ dans $S \otimes T$, algèbre symétrique (bigraduée) de la somme directe $V + U_{\delta^*}$; $\tilde{\xi}(h)$ n'est autre que la dérivation de $S \otimes T$ prolongeant l'endomorphisme $\xi(h)$ de $V + U_{\delta^*}$ qui est défini par $\nu(h)$ dans V , $\nu_{\delta^*}(h)$ dans U_{δ^*} . Considérons un système fini de générateurs de $(S \otimes T)_{\delta_o}$. Comme les projecteurs de la bigraduation sont permutables aux $\tilde{\xi}(h)$, on peut supposer ces générateurs doublement homogènes. Soient $j_1 , j_2 , \dots , j_k$ ceux dont le deuxième degré est 1 ; $w_1 , w_2 , \dots , w_q$ étant une base de U_{δ^*} , on a $j_i = \sum_{k=1}^{q} s_k^i \otimes w_k$, avec $s_k^i \in S$. Alors, $s_k^i \in S_{\delta}$, et on voit facilement que le S_{δ_o}-module engendré par les s_k^i est identique à S_{δ} .