ROGER GODEMENT

Les travaux de Hecke, II

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 59, p. 83-90

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__83_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1952)

LES TRAVAUX DE HECKE, II,

par Roger GODEMENT

1. Définition des séries L .

Soient k un corps de nombres algébriques, $\mathfrak{f}$ un idéal entier de k , χ un caractère modulo $\mathfrak{f}$ (voir exposé I, n° 2). On pose

$$(1) \qquad L(s\,;\chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}$$

où la série est étendue aux idéaux entiers de k (et ne fait du reste intervenir que ceux qui sont premiers à $\mathfrak{f}$). Pour des raisons évidentes, la convergence absolue de la série (1) est équivalente à celle du produit infini

$$(2) \qquad L(s\,;\chi)^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}} \left[1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right]$$

étendu aux idéaux premiers de k . On démontre facilement que (1) et (2) convergent absolument dans le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 1$ et y représentent des fonctions homolomorphes de s .

On va montrer que la fonction (1) se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe (seuls pôles : $s = 0$, 1 , qui disparaissent même lorsque $\chi(0) \neq 1$) et vérifie une équation fonctionnelle simple.

2. Passage aux séries thêta.

On rappelle (exposé I, n° 1) qu'une grande classe est l'ensemble des idéaux de la forme $x\,\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ donné, $x \in k$ non nul ; et qu'une classe modulo $\mathfrak{f}$ est l'ensemble des $\frac{x}{y}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ donné, x , y entiers tels que $x \equiv y(\mathfrak{f})$.

La série (1) se décompose en séries partielles associées aux grandes classes. Soit C une telle classe, et choisissons dans C^{-1} un idéal $\mathfrak{m}$; il est clair que $\mathfrak{a} \in C$ équivaut à $\mathfrak{a}.\mathfrak{m} = (x)$ avec $x \in \mathfrak{m}$ si $\mathfrak{a}$ entier ; donc la série partielle associée à C dans (1) est donnée par

$$\sum_{\mathfrak{a} \in C} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \sum_{\substack{x \in \mathfrak{m} \\ (x) \neq 0}} \frac{\chi(\frac{x}{\mathfrak{m}})}{N(\frac{x}{\mathfrak{m}})^s} = N(\mathfrak{m})^s \sum_{\substack{x \in \mathfrak{m} \\ (x) \neq 0}} \frac{\chi(\frac{x}{\mathfrak{m}})}{|N(x)|^s} \;;$$

le $\sum_{(x)\neq 0}$ désigne qu'on somme sur les idéaux (x) et non sur les <u>nombres</u> (x).
On est donc conduit à introduire

$$L(s\,;\,\chi,\mathfrak{m}) = \sum_{\substack{x\in\mathfrak{m}\\(x)\neq 0}} \frac{\chi\left(\frac{x}{\mathfrak{m}}\right)}{|N(x)|^s}\,, \tag{3}$$

d'où

$$L(s\,;\,\chi) = \sum_{\mathfrak{m}} N(\mathfrak{m})^s . L(s\,;\,\chi,\mathfrak{m}) \tag{4}$$

où $\sum_{\mathfrak{m}}$ est une somme étendue aux grandes classes.

Ceci dit, considérons les n isomorphismes $x \rightarrow \sigma(x)$ de k dans le corps complexe (n = degré de k). Parmi eux, r_1 envoient k dans R ; les autres se répartissent en couples d'isomorphismes imaginaires conjugués σ, $\bar{\sigma}$, donc sont en nombre pair $2r_2$; on a $r_1 + 2r_2 = n$. On va associer à chaque isomorphisme σ une variable t_σ, avec $t_\sigma > 0$, et ceci de telle sorte que

$$\tau = \bar{\sigma} \quad \text{implique} \quad t_\tau = t_\sigma\,; \tag{5}$$

il y a donc $r_1 + r_2$ variables indépendantes, qu'on peut regarder comme étant les coordonnées d'un point t du groupe multiplicatif $(R_+^*)^{r_1+r_2}$. On pose

$$N(t) = \prod_{\sigma\in\Gamma} t_\sigma \tag{6}$$

(Γ groupe de Galois de k sur Q) et on note $d\mu(t)$ la mesure de Haar de $(R_+^*)^{r_1+r_2}$: c'est le produit des différentielles $\frac{dt_\sigma}{t_\sigma}$ indépendantes (tenir compte de (5)).

Désignons par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$ les r_1 isomorphismes réels, et par $\tau_1, \ldots, \tau_{r_2}$, r_2 isomorphismes imaginaires deux à deux non conjugués.
Pour $x\in k$ on a

$$\frac{1}{|N(x)|^s} = \prod_i \frac{1}{(|\sigma_i(x)|^2)^{s/2}} \cdot \prod_j \frac{1}{(|\tau_j(x)|^2)^s}\;;$$

utilisant la formule générale et évidente

$$\frac{\pi^{-u}\,\Gamma(u)}{(|\sigma(x)|^2)^u} = \int_0^\infty e^{-\pi t_\sigma . |\sigma(x)|^2}\, t_\sigma^u\, \frac{dt_\sigma}{t_\sigma}$$

il vient immédiatement par multiplication

$$(7) \qquad \frac{\pi^{-(r_1+2r_2)s/2}\cdot 2^{-r_2 s}\,\Gamma(\frac{s}{2})^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}}{|N(x)|^s} = \int e^{-\pi\sum_{\sigma} t_\sigma\cdot|\sigma(x)|^2}\cdot N(t)^{s/2}\,d\mu(t)$$

de sorte que (3) conduit à

$$(8) \qquad \begin{aligned} \xi(s\,;\chi,\mathfrak{m}) &\equiv \pi^{-nsk}\,2^{-r_2 s}\,\Gamma(\tfrac{s}{2})^{r_1}\,\Gamma(s)^{r_2}\,L(s\,;\chi,\mathfrak{m}) = \\ &= \sum_{\substack{x\in\mathfrak{m}\\(x)\neq 0}} \int \chi(\tfrac{x}{\mathfrak{m}})\, e^{-\pi\sum_{\sigma\in\Gamma} t_\sigma|\sigma(x)|^2}\cdot N(t)^{s/2}\,d\mu(t)\,. \end{aligned}$$

Maintenant, soit ε une unité de k. On a $N(\varepsilon) = 1$; si donc l'on désigne par εt le point de $(R_+^*)^{r_1+r_2}$ dont les coordonnées sont les $|\sigma(\varepsilon)|^2 t_\sigma$, on voit que l'intégrale figurant au 2e membre de (8) porte sur une fonction de t qui est invariante par les transformations $t \to \varepsilon t$; noter que cette transformation revient à remplacer x par εx, ce qui ne change pas $\chi(\frac{x}{\mathfrak{m}})$; si donc on désigne par E le groupe des unités de k, et par D un domaine fondamental de $(R_+^*)^{r_1+r_2}$ relativement aux applications $t \to \varepsilon t$, on peut écrire

$$\begin{aligned} &\int \chi(\tfrac{x}{\mathfrak{m}})\, e^{-\pi\sum_{\sigma\in\Gamma} t_\sigma|\sigma(x)|^2}\, N(t)^{s/2}\,d\mu(t) = \\ &\qquad = \sum_{\varepsilon\in E}\int_D \chi(\tfrac{\varepsilon x}{\mathfrak{m}})\, e^{-\pi\sum_{\sigma\in\Gamma} t_\sigma|\sigma(\varepsilon x)|^2}\, N(t)^{s/2}\,d\mu(t)\ ; \end{aligned}$$

la relation $(x) = (y)$ étant équivalente à $y = \varepsilon x$ pour un ε, on déduit de là que (8) s'écrit

$$(9) \qquad \xi(s\,;\chi,\mathfrak{m}) = \sum_{\substack{x\in\mathfrak{m}\\x\neq 0}}\int_D \chi(\tfrac{x}{\mathfrak{m}})\, e^{-\pi\sum_{\sigma\in\Gamma} t_\sigma|\sigma(x)|^2}\, N(t)^{s/2}\,d\mu(t)$$

(où cette fois le $\sum_{x\neq 0}$ est étendu aux nombres non nuls de $\mathfrak{m}$). En posant

$$(10) \qquad \theta(t\,;\chi,\mathfrak{m}) = \sum_{x\in\mathfrak{m}} \chi(\tfrac{x}{\mathfrak{m}})\, e^{-\pi\sum_{\sigma\in\Gamma} t_\sigma|\sigma(x)|^2}$$

on a donc

$$(11) \qquad \xi(s\,;\chi,\mathfrak{m}) = \int_D [\theta(t\,;\chi,\mathfrak{m}) - \chi(0)]\,N(t)^{s/2}\,d\mu(t)\,.$$

3. Transformation des séries thêta.

Puisque $\chi(\frac{x}{\mathfrak{m}})$ ne dépend que de la classe modulo $\mathfrak{f}$ de l'idéal $\frac{x}{\mathfrak{m}}$, il est clair que $x \equiv y(\mathfrak{f})$ implique $\chi(\frac{x}{\mathfrak{m}}) = \chi(\frac{y}{\mathfrak{m}})$; mais $\mathfrak{m}$ étant premier à $\mathfrak{f}$, $x \equiv y(\mathfrak{f})$ implique (pour x, $y \in \mathfrak{m}$) $x \equiv y(\mathfrak{m}\mathfrak{f})$, i.e. $y = x + z$ où $z \in \mathfrak{m}\mathfrak{f}$, et réciproquement. Donc on est conduit à introduire les séries partielles

$$\theta(t\ ;\ x\ ,\ \mathfrak{a}) = \sum_{z \in \mathfrak{a}} e^{-\pi \sum_{\sigma \in \Gamma} t_\sigma |\sigma(x+z)|^2} \tag{12}$$

grâce à quoi

$$\theta(t\ ;\ \chi, \mathfrak{m}) = \sum_{\substack{x \in \mathfrak{m} \\ x \bmod \mathfrak{f}}} \chi(\tfrac{x}{\mathfrak{m}})\ \theta(t\ ;\ x\ ,\ \mathfrak{m}\mathfrak{f}) \tag{13}$$

On va appliquer la formule de Poisson à (12). Soit (a_q) $(1 \leq q \leq n)$ une base de $\mathfrak{a}$; posons

$$x = \sum \xi_q\, a_q\ ,\quad z = \sum n_q\, a_q \tag{14}$$

($\xi_q \in Q$, car on ne suppose pas x dans $\mathfrak{a}$, et $n_q \in Z$) et

$$Q_t(n) = \sum_{\sigma \in \Gamma} t_\sigma \Big|\sum_q \sigma(a_q) n_q\Big|^2\ ; \tag{15}$$

on a alors

$$\theta(t\ ;\ x\ ,\ \mathfrak{a}) = \sum_{(n)} e^{-\pi Q_t(\xi + n)}$$

d'où (exposé I, paragraphe 2, n° 5)

$$\theta(t\ ;\ x\ ,\ \mathfrak{a}) = \det(Q_t)^{-\frac{1}{2}} \sum_{(n)} e^{-\pi Q_t'(n) + 2\pi i (n, \xi)}$$

où Q_t' est la forme inverse de Q_t et où $(n\ ,\ \xi) = \sum n_q\, \xi_q$. Pour calculer Q_t' on remarque que la matrice de Q_t est $A_t^* A_t$, où A_t est la matrice de terme général $t_\sigma^{\frac{1}{2}}\ \sigma(a_q)$; donc la matrice de Q_t' est $A_t^{-1}\ A_t^{*-1}$. Or soient $b_q \in k$ déterminés par

$$\mathrm{Tr}(a_p\, b_q) = \sum_\sigma \sigma(a_p)\, \sigma(b_q) = \delta_{pq} \tag{16}$$

("base complémentaire de k") ; ils engendrent l'idéal $b = \frac{1}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}}$, $\mathfrak{d}$ différente de k, et en posant $u = \sum_q n_q\, b_q$ on voit donc que

$$Q_t'(n) = \sum \frac{1}{t_\sigma} \, |\sigma(u)|^2 \; ; \tag{17}$$

d'autre part, de (14) et (16) résulte immédiatement que

$$(n \, , \, \xi) = \mathrm{Tr}(ux) \; ; \tag{18}$$

enfin, il est clair que

$$\det(Q_t) = |\det(A_t)|^2 = N(t).|\det(\sigma(a_q))|^2 = N(t).|d|.N(\alpha)^2 \tag{19}$$

où d est le discriminant de k . Comparant (15), (17), (18), (19) on voit que

$$\theta(t \; ; \; x \, , \, \alpha) = \frac{N(t)^{-\frac{1}{2}}}{N(\alpha)\sqrt{|d|}} \sum_{u \in \frac{1}{\alpha \mathfrak{d}}} e^{-\pi \sum \frac{1}{t_\sigma} |\sigma(u)|^2 + 2\pi i \, \mathrm{Tr}(ux)} \tag{20}$$

Revenant à (13) on trouve donc

$$\theta(t \; ; \chi, \mathfrak{m}) = \frac{N(t)^{-\frac{1}{2}}}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{f})\sqrt{|d|}} \sum_{\substack{u \in \frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}\mathfrak{d}} \\ x \in \mathfrak{m} \\ x \bmod \mathfrak{f}}} \chi\left(\frac{x}{\mathfrak{m}}\right) e^{-\pi \sum \frac{1}{t_\sigma} |\sigma(u)|^2 + 2\pi i \mathrm{Tr}(ux)}$$

$$= \frac{N(t)^{\frac{1}{2}}}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{f})\sqrt{|d|}} \sum_{u \in \frac{1}{\mathfrak{m}.\mathfrak{f}.\mathfrak{d}}} e^{-\pi \sum \frac{1}{t_\sigma} |\sigma(x)|^2} \sum_{\substack{x \in \mathfrak{m} \\ x \bmod \mathfrak{f}}} \chi\left(\frac{x}{\mathfrak{m}}\right) e^{2\pi i \mathrm{Tr}\,(ux)}$$

Or si χ est un caractère <u>propre</u> modulo $\mathfrak{m}$ on a (exposé I, paragraphe 1, n° 3)

$$\sum_{\substack{x \in \mathfrak{m} \\ x \bmod \mathfrak{f}}} \chi(x) \, e^{2\pi i . \mathrm{Tr}(ux)} = C(\chi) . \, \overline{\chi}(u . \mathfrak{f} . \mathfrak{d}) \; ;$$

donc il vient dans cette hypothèse

$$\theta(t \; ; \chi, \mathfrak{m}) = C(\chi) \frac{N(t)^{-\frac{1}{2}}}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{f})\sqrt{|d|}} \sum_{u \in \frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}\mathfrak{d}}} \overline{\chi}(u . \mathfrak{m} . \mathfrak{f} . \mathfrak{d}) e^{-\pi \sum \frac{1}{t_\sigma} |\sigma(x)|^2}$$

d'où la formule finale de transformation :

$$\theta(t \; ; \chi, \mathfrak{m}) = C(\chi) \frac{N(t)^{-\frac{1}{2}}}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{f})\sqrt{|d|}} \theta\left(t^{-1} \; ; \overline{\chi} \, , \frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}\mathfrak{d}}\right) . \tag{21}$$

REMARQUE. - En itérant (21) on trouve

$$\theta(t\ ;\chi,\mathfrak{m}) = C(\chi)\,\frac{N(t)^{-\frac{1}{2}}}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{f})\sqrt{|d|}}\cdot C(\overline{\chi})\,\frac{N(t)^{\frac{1}{2}}}{N(\frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{d}})\sqrt{|d|}}\,\theta(t\ ;\chi,\mathfrak{m})$$

d'où

$$C(\chi)C(\overline{\chi}) = |d|\ N\left(\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{d}}\right)\ ;$$

vu que la relation $C(\overline{\chi}) = \overline{C(\chi)}$ est évidente, on trouve donc

$$|C(\chi)| = \sqrt{N(\mathfrak{f})} \tag{22}$$

en tenant compte du fait que $N(\mathfrak{d}) = |d|$.

4. Equation fonctionnelle des fonctions L .

On reprend la relation

$$\xi(s\ ;\chi,\mathfrak{m}) = \int_D [\theta(t\ ;\chi,\mathfrak{m}) - \chi(0)]\,N(t)^{s/2}\,d\mu(t)\ . \tag{11}$$

Désignons par G le groupe multiplicatif $(R_+^*)^{r_1+r_2}$ et identifions le groupe E des unités de k au sous-groupe U des $u \in G$ dont les coordonnées sont de la forme

$$u_\sigma = |\sigma(\varepsilon)|^2\ , \qquad \varepsilon \in E\ ;$$

D n'est autre que le groupe quotient G/U . Considérons en outre le groupe G_0 des $t \in G$ tels que $N(t) = 1$; il est clair que $U \subset G_0 \subset G$ et que G/G_0 est isomorphe (par $t \to N(t)$) à R_+^* . D'autre part, d'après le théorème de Dirichlet sur les unités, le groupe G_0/U est compact.

Désignons par D_+ l'ensemble des $t \in D$ tels que $N(t) \geqslant 1$. On a évidemment d'après (11)

$$\begin{aligned}\xi(s\ ;\chi,\mathfrak{m}) = &\int_{D^+} [\theta(t\ ;\chi,\mathfrak{m}) - \chi(0)]\,N(t)^{s/2}\,d\mu(t) \\ &+ \int_{D^+} [\theta(t^{-1}\ ;\chi,\mathfrak{m}) - \chi(0)]\,N(t)^{-s/2}\,d\mu(t)\ .\end{aligned} \tag{23}$$

En utilisant le fait que G_0/U est compact, on voit facilement que l'intégrale

$$\varphi(s\ ;\chi,\mathfrak{m}) = \int_{D^+} [\theta(t\ ;\chi,\mathfrak{m}) - \chi(0)]\,N(t)^{s/2}\,d\mu(t)$$

représente une fonction <u>entière</u> de s. D'autre part, (21) donne pour $\mathcal{R}(s) > 1$

$$\int_{D^+} [\theta(t^{-1} ; \chi, \mathfrak{m}) - \chi(0)] N(t)^{-s/2} \, d\mu(t) = \frac{C(\chi)}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{f})\sqrt{|d|}} \varphi(1 - s ; \overline{\chi}, \frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}\mathfrak{d}})$$

$$+ \frac{\chi(0) C(\chi)}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{f})\sqrt{|d|}} \int_{D^+} N(t)^{\frac{1-s}{2}} \, d\mu(t) - \chi(0) \int_{D^+} N(t)^{-\frac{s}{2}} \, d\mu(t)$$

$$= \frac{C(\chi)}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{f})\sqrt{|d|}} \varphi(1 - s ; \overline{\chi}, \frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}\mathfrak{d}}) + A\chi(0) [\frac{C(\chi)}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{f})\sqrt{|d|}} \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s}]$$

où A est une constante absolue liée de façon simple au volume de D. Donc $\xi(s ; \chi, \mathfrak{m})$ se prolonge en une fonction méromorphe ayant (si $\chi(0) \neq 0$) des pôles simples pour $s = 0$, $s = 1$. En outre en posant

$$\Psi(s ; \chi, \mathfrak{m}) = \varphi(s ; \chi ; \mathfrak{m}) + \frac{A . \chi(0)}{s}$$

il vient

$$\xi(s ; \chi, \mathfrak{m}) = \Psi(s ; \chi, \mathfrak{m}) + \frac{C(\chi)}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{f})\sqrt{d}} \Psi(1 - s ; \overline{\chi}, \frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}\mathfrak{d}}) \tag{24}$$

Posant

$$\xi(s ; \chi) = \sum_{\mathfrak{m}} N(\mathfrak{m})^s \xi(s ; \chi, \mathfrak{m}) = \pi^{-ns/2} 2^{-r_2 s} \Gamma(\tfrac{s}{2})^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} L(s ; \chi)$$

(le $\sum_{\mathfrak{m}}$ est étendu aux grandes classes) et de même

$$\Psi(s ; \chi) = \sum_{\mathfrak{m}} N(\mathfrak{m})^s \Psi(s ; \chi, \mathfrak{m})$$

il vient

$$\frac{1}{N(\mathfrak{m})} \sum_{\mathfrak{m}} N(\mathfrak{m})^s \Psi(1 - s ; \overline{\chi}, \frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}\mathfrak{d}}) = \sum_{\mathfrak{m}} N(\tfrac{1}{\mathfrak{m}})^{1-s} \Psi(1 - s ; \overline{\chi}, \frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}\mathfrak{d}})$$

$$= N(\mathfrak{f}\mathfrak{d})^{1-s} \Psi(1 - s ; \overline{\chi}) = |d|^{1-s} N(\mathfrak{f})^{1-s} \Psi(1 - s ; \overline{\chi})$$

d'où

$$\xi(s ; \chi) = \Psi(s ; \chi) + \frac{C(\chi)}{\sqrt{N(\mathfrak{f})}} (|d| N(\mathfrak{f}))^{\frac{1}{2} - s} \Psi(1 - s ; \overline{\chi}) .$$

Comme $W(x) = \dfrac{C(\chi)}{\sqrt{N(\mathfrak{f})}}$ vérifie $W(\chi)W(\overline{\chi}) = 1$, on déduit de là l'équation fonctionnelle des séries L , à savoir que la *fonction*

$$\Lambda(s\,;\chi) = 2^{-r_2 s}\,|d|^{\frac{s}{2}}\,N(\mathfrak{f})^{\frac{s}{2}}\,\pi^{-n\frac{s}{2}}\,\Gamma(\tfrac{s}{2})^{r_1}\,\Gamma(s)^{r_2}\,L(s\,;\chi)$$

vérifie

$$\Lambda(1-s\,;\chi) = W(\chi)\,\Lambda(s\,;\overline{\chi}) ,$$

si χ *est un caractère propre modulo*

BIBLIOGRAPHIE

HECKE (Erich). - Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper, Nach. königl. Gesellschaft Wiss. Göttingen, Math. phys. Klasse, 1917, p. 299-318.