BERNARD MALGRANGE

Théorème de Frobenius complexe

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 166, p. 395-401

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__395_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1958)

THÉORÈME DE FROBENIUS COMPLEXE

par Bernard MALGRANGE

(d'après A. NEWLANDER et L. NIRENBERG, [1] et [2])

On se propose de généraliser aux modules de formes différentielles sur les fonctions à valeurs complexes le théorème de Frobenius (voir, pour l'énoncé précis, le théorème 3). Pour cela, on traitera d'abord un cas particulier: l'intégrabilité des structures presque-complexes [1] on ramènera ensuite facilement le cas général à ce cas particulier [2]. L'exposé suit de près les mémoires cités (y compris pour certaines notations).

1. L'opérateur T.

On considère dans la suite un polydisque ouvert P_r : $|z^j| < r$ dans l'espace C^n ; nous allons provisoirement donner les définitions des opérateurs et des normes qui interviennent, sur l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions différentiables au voisinage de $\overline{P}_r$ (nous verrons ensuite où il faut les prolonger).

Etant donné un système F de n fonctions f_j, on lui associe une fonction $T(F)$ différentiable dans P_r, possédant les propriétés suivantes :

a. $T(F)$ dépend linéairement de F.

b. Si $d''(\sum f_j \, dz^j) = 0$, on a : $d''T(F) = \sum f_j \, dz^j$.

Un tel opérateur peut s'obtenir en explicitant la méthode employée par GROTHENDIECK pour démontrer la trivialité locale de la d''-cohomologie (Séminaire H. CARTAN, t. 6, 1953/54, exposé 18) ; on trouve, après symétrisation :

$$T(F) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s}{(s+1)!} \sum{}' \, T^{j_1} \overline{D}_{j_1} T^{j_2} \overline{D}_{j_2} \ldots T^{j_s} \overline{D}_{j_s} T^k f_k$$

où

$$T^j f = \frac{1}{2\pi i} \iint_{|\tau| < r} f(z^1, \ldots, z^{j-1}, \tau, z^{j+1}, \ldots, z^n) \frac{1}{z^j - \tau} \, d\bar{\tau} \, d\tau$$

$$D_j = \frac{\partial}{\partial z^j}, \quad \overline{D}_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$$

et où $\sum'$ désigne la somme étendue aux systèmes de $s + 1$ entiers (compris entre 1 et n) distincts.

On a alors :

$$\overline{D}_j\, T(F) - f_j = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s}{(s+1)!} \sum^j T^{j_1}\, \overline{D}_{j_1} \dots T^{j_s}\, \overline{D}_{j_s}\, T^k(\overline{D}_j f_k - \overline{D}_k f_j)$$

$\sum^j$ désignant la somme étendue aux systèmes de $s+1$ entiers distincts et tous différents de j.

2. Majorations.

L'opérateur T possède malheureusement d'assez mauvaises propriétés de régularité, du moins si l'on opère avec les espaces habituels de la théorie des équations elliptiques (par exemple : espaces de fonctions localement de carré sommable ainsi que leur p premières dérivées ; espaces de fonctions p fois continuement différentiables, les dérivées d'ordre p vérifiant des conditions de Hölder d'ordre α, $0<\alpha<1$). Cela explique que l'on doive travailler avec d'autres espaces fonctionnels, dans lesquels, par exemple, on imposera des conditions de régularité aux dérivées du type $D_{j_1}, \dots, D_{j_s}, \overline{D}_{k_1}, \dots, \overline{D}_{k_t}$, $j_1, \dots, j_s$, $k_1, \dots, k_t$ étant tous distincts. Par ailleurs, le recours à des équations non linéaires (imposé aussi, semble-t-il, par les propriétés de régularité de T ?) nous oblige à recourir aux majorations höldériennes plutôt qu'aux majorations L^2.

NOTATIONS. – $z = (z^1, \dots, z^n)$, $h = (h^1, \dots, h^n)$

$J = (j_1, \dots, j_p)$, $M = (j_1, \dots, j_p ; k_1, \dots, k_q)$; $|J| = p$, $|M| = p+q$

les j et k étant des entiers compris entre 1 et n, tous distincts.

$$D^M = D_{j_1} \dots D_{j_p}\, \overline{D}_{k_1} \dots \overline{D}_{k_q}.$$

Dans toute la suite, α est un nombre fixé, $0 < \alpha < 1$.

Pour $f \in \mathcal{E}$, on pose :

$$\delta_j(h^j) f = |h^j|^{-\alpha} [f(z^1, \dots, z^j + h^j, \dots, z^n) - f(z^1, \dots, z^j, \dots, z^n)]$$

et l'on note le produit des opérateurs $\delta_{j_1}(h^{j_1}) \dots \delta_{j_p}(h^{j_p})$ par $\delta^J(h)$.

On considère alors les normes suivantes :

$$H_\alpha[f] = \sum_{|J|=0}^{n} \frac{r^{|J|\alpha}}{|J|!} \sup_{\substack{z \in P_r \\ z+h \in P_r}} |\delta^J(h) f|$$

$$\|f\|_{n+\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} \sup_{|M|=k} H_\alpha[D^M f]$$

$$\|f\|^j_{n-1+\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^k}{k!} \sup_{\substack{j \notin M \\ k=|M|}} H_\alpha[D^M f]$$

Enfin, si F est un système de n fonctions f_j , on pose :

$$\|F\|_{n-1+\alpha} = \max_j \|f_j\|^j_{n-1+\alpha} \quad ; \quad \|F\|_{n+\alpha} = \max_j \|f_j\|_{n+\alpha}$$

$\mathcal{H}^{n+\alpha}$ désignera le complété de $\mathcal{E}$ pour la norme $\| \ \|_{n+\alpha}$

$\mathcal{H}^{n-1+\alpha, j}$ désignera le complété de $\mathcal{E}$ pour la norme $\| \ \|^j_{n-1+\alpha}$

$\mathcal{H}^{n+\alpha}$ désignera le complété de $\mathcal{E}^{[n]}$ pour la norme $\| \ \|_{n+\alpha}$

$\mathcal{H}^{n-1+\alpha}$ désignera le complété de $\mathcal{E}^{[n]}$ pour la norme $\| \ \|_{n-1+\alpha}$

On vérifie facilement que ces normes possèdent de bonnes propriétés relativement :

a. Au produit des fonctions.

$$\|f\,g\|_{n+\alpha} \leqslant \|f\|_{n+\alpha} \, \|g\|_{n+\alpha}$$

$$\|f\,g\|^j_{n-1+\alpha} \leqslant \|f\|^j_{n-1+\alpha} \, \|g\|^j_{n-1+\alpha}$$

(en particulier, $\mathcal{H}^{n+\alpha}$ et $\mathcal{H}^{n-1+\alpha, j}$ seront donc des algèbres de Banach).

b. Aux fonctions composées.

Il existe une constante c (dépendant de α et n , mais non de r) telle que pour tout $F \in \mathcal{H}^{n+\alpha}$ vérifiant $\|F\|_{n+\alpha} \leqslant 1$ et tout $a(z)$, $2n-1$ fois continuement dérivable, les dérivées jusqu'à cet ordre étant bornées par K (resp. et en outre $a(0) = 0$), on ait :

$$\|a(F)\|^j_{n-1+\alpha} \leqslant c\,K \qquad \text{(resp.} \quad \|a(F)\|^j_{n-1+\alpha} \leqslant c\,K\,\|F\|_{n+\alpha}$$

On a enfin la majoration fondamentale suivante, qui s'établit facilement à partir du cas particulier classique (mais pas trivial !) $n = 1$:

THÉORÈME 1. – Il existe une constante c' (indépendante de r) telle que, pour tout $F \in \mathcal{H}^{n+\alpha}$, on ait : $\|T[F]\|_{n+\alpha} \leqslant c'\, r\, \|F\|_{n+\alpha}$.

3. Intégrabilité des structures presque-complexes.

Etant donnée une variété V une fois continuement différentiable de dimension $2n$, une structure presque complexe sur V est définie par la donnée d'un champ de tenseurs J, continu, une fois covariant et une fois contravariant, tel que l'application de l'espace des champs de vecteurs dans lui-même, qu'il définit (noté encore J), vérifie $J^2 = -$ identité.

Comme on sait (ECKMANN-FRÖLICHER), une structure complexe définit une structure presque-complexe vérifiant, pour tout couple de champs de vecteurs X, Y, la "condition d'intégrabilité" :

$$[X , Y] + J[JX , Y] + J[X , JY] - [JX , JY] = 0 .$$

On veut démontrer que réciproquement (sous des conditions de différentiabilité convenables) toute structure presque complexe vérifiant la condition d'intégrabilité provient d'une structure complexe (l'unicité est évidente). Le problème revient, à trouver, au voisinage de tout point $a \in V$, un système de n fonctions z^j qui vérifient les propriétés suivantes :

a. Les z^j sont des "coordonnées locales complexes", i.e. leurs parties réelles et imaginaires forment un système de coordonnées locales.

b. Les z^j sont holomorphes pour la structure presque complexe J, i.e. pour tout champ de vecteur X, on a : $(JX - iX)\, z^j = 0$.

Choisissons alors au voisinage de 0 un système de n coordonnées locales complexes $\zeta = (\zeta^j)$ (avec, par exemple, $\zeta(0) = 0$), telles que le tenseur de la structure complexe défini par les ζ^j coïncide avec J en a : en explicitant la condition b., on trouve

$$\text{(E)} \qquad X_j\, f \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}^j} - \Sigma_k\, a_j^k(\zeta)\, \frac{\partial f}{\partial \zeta^k} = 0$$

(f désigne l'un quelconque des z^j), avec $a_j^k(0) = 0$.

La condition d'intégrabilité s'écrit ici simplement : $[X_j , X_k] = 0 \quad \forall (j , k)$.

Une première idée consiste à faire ceci : posons

$$\Sigma\, a_j^k\, D_k = \alpha_j \,, \quad A = (\alpha_j)$$

et considérons l'équation intégrale suivante :

$$z^j = \zeta^j + T\, A[z^j] \qquad \text{(opérateur } T \text{, par rapport aux variables } \zeta)$$

On peut chercher à la résoudre par approximations successives ; cette méthode marche classiquement pour $n = 1$ (KORN, LICHTENSTEIN), et a été étendue par BERS aux équations elliptiques d'ordre > 1 ; cependant, ici les propriétés de régularité de T ne sont pas suffisantes, si $n \geqslant 2$, pour assurer la convergence.

On s'en tire par l'astuce suivante : donnons-nous, a priori, une structure complexe, de coordonnées $z^1 , \dots , z^n$, et cherchons des fonctions ζ^j des z^j telles que, par rapport aux ζ^j , le tenseur de la structure complexe donnée ait la forme cherchée : on trouve que les ζ^j doivent être des coordonnées locales complexes en 0 , et doivent vérifier le système suivant :

$$\text{(E')} \qquad \overline{D}_j \zeta^k + \sum_m a_m^k(\zeta) \overline{D}_j \overline{\zeta}^m = 0 \qquad j , k = 1 , \dots , n$$

Ce système possède les propriétés suivantes :

a. Il est non-linéaire (les a_m^k dépendent des ζ et non des z !) mais :

b. Dans chaque équation, il intervient seulement une dérivation (ce qui n'a rien d'étonnant, les équations où intervient $\overline{D}_j$ exprimant seulement que toute f vérifiant (E) vérifie $\overline{D}_j f = 0$).

On ramène la résolution de ce système à la résolution d'un système d'équations intégrales suivant :

$$\zeta^k = z^k + T(B^k[\zeta])$$

où

$$\beta_j^k(\zeta) = \sum a_m^k(\zeta) \overline{D}_j \overline{\zeta}^m \quad ; \quad B^k(\zeta) = (\beta_1^k , \dots , \beta_n^k)$$

système qu'on écrira aussi :

$$\text{(E'')} \qquad \zeta = z + T(B[\zeta]) \ .$$

Les majorations du numéro 2 permettent de résoudre ce système par approximations successives, dès que r est assez petit, et ceci dès que les a_m^k sont $2n$ fois continuement différentiables ; plus précisément, on démontre :

Pour r assez petit, il existe une constante K (indépendante de r) telle que les hypothèses

$$||\zeta||_{n+\alpha} \leqslant K r \quad ; \quad ||\zeta'||_{n+\alpha} \leqslant K r$$

entraînent

$$||z + T B[\zeta]||_{n+\alpha} \leqslant K_r$$

et même

$$||T B[\zeta]||_{n+\alpha} \leqslant K' r^2$$

et

$$\|T\, B[\zeta] - T\, B[\zeta']\|_{n+\alpha} \leq \frac{1}{2} \|\zeta - \zeta'\|_{n+\alpha}$$

Reste à démontrer que les ζ trouvés vérifient les conditions voulues ; tout d'abord, il est clair qu'ils sont une fois continuement différentiables, et que $\zeta(0) = 0$; d'autre part, de l'inégalité $\|T\, B[\zeta]\|_{n+\alpha} \leq K' r^2$, on déduit immédiatement que le jacobien $\frac{D(\zeta)}{D(z)}$ ne s'annule pas au voisinage de 0 ; reste donc à démontrer que ζ vérifie (E').

Pour cela, on dérive (E") par rapport aux z^j, $\bar{z}^j$; en utilisant les formules du numéro 1 et la condition d'intégrabilité (qui n'est pas encore intervenue !), on trouve que les

$$g_j^k = \bar{D}_j \zeta^k + \sum_m a_m^k \bar{D}_j \bar{\zeta}^m$$

vérifient le système d'équations intégrales linéaire et homogène suivant :

$$g_j^i = \sum_{s=0}^{n-2} \frac{(-1)^s}{(s+2)!} \sum^j T^{j_1} \bar{D}_{j_1} \dots T^{j_s} \bar{D}_{j_s} T^k \Big[\sum_{p,m} \frac{\partial a_m^i}{\partial \zeta^p} (\bar{D}_j \bar{\zeta}^m . g_k^p - \bar{D}_k \bar{\zeta}^m . g_j^p)\Big]$$

Les majorations déjà utilisées, jointes à d'autres évidentes entraînent alors que ce système n'a que la solution triviale ; on a donc finalement :

THÉORÈME 2. - Une structure presque-complexe (2n fois continuement différentiable) sur une variété de dimension 2n (et 2n + 1 fois continuement différentiable) qui vérifie la condition d'intégrabilité, provient d'une structure complexe.

Il serait évidemment souhaitable de démontrer ce théorème sous des hypothèses de différentiabilité moins restrictives. Par ailleurs, les propriétés de différentiabilité du changement de variables $z \longrightarrow \zeta$ s'obtiennent immédiatement en remarquant que le système (E) est elliptique.

4. Théorème de Frobenius complexe.

On se place dans un ouvert $\mathcal{O} \subset R^n$, contenant 0 ; on considère dans $\mathcal{O}$ un sous-module $\mathfrak{M}$ du module des formes différentielles (à coefficients indéfiniment différentiables) sur l'anneau des fonctions (indéfiniment différentiables) à valeurs complexes $\mathcal{E}$; on fait les hypothèses suivantes :

a. En tout point, $\mathfrak{M}$ est de rang p (sur le corps C), et $\mathfrak{M}$ possède une base (à p éléments) sur $\mathcal{E}$.

b. En tout point, $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \cap \bar{\mathfrak{M}}$ est de rang q, et $\mathfrak{N}$ possède une base sur $\mathcal{E}$.

Alors :

THÉORÈME 3. - Pour que, au voisinage de $\mathcal{O}$, il existe des fonctions différentiables $f_1, \dots, f_{p-q}$; $g_1, \dots, g_q$ (les f à valeurs complexes, les g à valeurs réelles) telles que les df et dg engendrent $\mathfrak{M}$ sur $\mathcal{E}$, il faut et il suffit que les "conditions d'intégrabilité" suivantes soient vérifiées au voisinage de 0 :

(C_1) $d\mathfrak{M}$ est dans l'idéal engendré par $\mathfrak{M}$ (dans l'anneau des formes différentielles).

(C_2) $d\mathfrak{N}$ est dans l'idéal engendré par $\mathfrak{N}$.

DÉMONSTRATION. - On ne s'occupera que de la suffisance, la nécessité étant immédiate.

a. Cas où $q = 0$. - Observons d'abord que, si $2p = n$; le problème est équivalent à celui qui a été traité au n° 3. Dans le cas général, on s'y ramène de la façon suivante :

On a certainement $\ell = n - 2p \geqslant 0$; choisissons alors un système de coordonnées x^j dans $\mathcal{O}$ de manière à ce que les dx^{2p+k} forment une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{M} + \overline{\mathfrak{M}}$; dans $\tilde{\mathcal{O}}$, obtenu en ajoutant aux x^j les nouvelles variables $x^{n+1}, \dots, x^{n+\ell}$, on considère le module $\tilde{\mathfrak{M}}$ engendré par $\mathfrak{M}$, et le module $\mathcal{P}$ obtenu en adjoignant à $\tilde{\mathfrak{M}}$ les $dx^{2p+k} + i\, dx^{n+k}$ $(1 \leq k \leq \ell)$. D'après la remarque précédente, $\mathcal{P}$ définit une structure complexe dans $\tilde{\mathcal{O}}$; la condition (C_1) entraîne alors que $\tilde{\mathfrak{M}}$ admet une base formée de formes holomorphes pour cette structure complexe ; le résultat cherché pour $\tilde{\mathfrak{M}}$ (et donc pour $\mathfrak{M}$) s'obtient alors en utilisant le théorème de Frobenius (dans le cas analytique).

b. Cas général. On commence par choisir un système de coordonnées x^j dans $\mathcal{O}$ tel que, au voisinage de 0 , $dx^1, \dots, dx^q$ forment une base de $\mathfrak{N}$ (théorème de Frobenius), et on prend $g_j = x^j$; on considère ensuite le sous-module $\mathcal{L} \subset \mathfrak{M}$ composé des formes qui ne contiennent pas $dx^1, \dots, dx^q$; la restriction de $\mathcal{L}$ à la sous-variété $x^1 = Cte, \dots, x^q = Cte$ vérifie les conditions d'application de a. On est donc ramené à démontrer ceci : dans le cas a. (c'est-à-dire finalement, dans le théorème 2), si les données dépendent différentiablement de certains paramètres, la solution en dépend aussi différentiablement, ce point ne présente pas de difficulté.

BIBLIOGRAPHIE

[1] NEWLANDER (A.) and NIRENBERG (L.). - Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 391-304.

[2] NIRENBERG (L.). - A complex Frobenius theorem. - New York University, Institute of mathematical Sciences, Janvier 1958 (multigraphié).