SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES DIXMIER

Travaux de Kadison sur les invariants unitaires

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 140, p. 49-56
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__49_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1956)

TRAVAUX DE KADISON SUR LES INVARIANTS UNITAIRES. ([1])

par Jacques DIXMIER

1. Préliminaires.

1. - $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, ... désignant des espaces hilbertiens, $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ l'algèbre à involution des opérateurs linéaires continus dans $\mathfrak{H}$.

Une algèbre de Gelfand-Neumark est une algèbre normée complète à involution, avec unité, vérifiant l'axiome $\|x^* x\| = \|x\|^2$ (d'où $\|x^*\| = \|x\|$). Par exemple, $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ est une algèbre de Gelfand-Neumark, et toute sous-algèbre à involution A de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ contenant I, et fermée pour la norme (i.e. pour la topologie uniforme), est une algèbre de Gelfand-Neumark appelée C^*-algèbre. Si A est de plus fermée pour la topologie faible (ou, ce qui revient au même, égale à son bicommutant A"), on dit que A est une algèbre de von Neumann. Si A est une C^*-algèbre A" est égal à l'adhérence faible de A, et est l'algèbre de von Neumann engendrée par A. Si $x \in \mathfrak{H}$, $\overline{Ax} = V$ est stable pour A, donc le projecteur P_V appartient au commutant A' de A ; on dit que c'est un projecteur cyclique de A'. Toute algèbre de Gelfand-Neumark est isomorphe à une C^*-algèbre.

Soit A une algèbre de Gelfand-Neumark. Considérant comme positifs les éléments de la forme $x^* x$, on définit dans A (ou plutôt dans l'ensemble de ses éléments hermitiens) une structure d'espace vectoriel ordonné. Les formes linéaires positives continues φ sur A telles que $\varphi(I) = I$ s'appellent les états de A.

Dans une algèbre de von Neumann, A, toute famille filtrante croissante majorée (T_ι) admet une borne supérieure T. Un état φ sur A est dit normal si $\varphi(T) = \sup \varphi(T_\iota)$. Un état d'une C^*-algèbre B est dit normal s'il est induit par un état normal de l'adhérence faible de B.

Soit T un élément hermitien de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Les polynômes en T forment une algèbre à involution dont l'adhérence uniforme $\mathcal{G}(T)$ est la C^*-algèbre engendrée

([1]) Unitary invariants for representations of operator algebras, Mémoire d'une centaine de pages à paraître aux Annals of Math.

par T ; il est clair que $\mathcal{G}(T)$ est abélienne.

Soient A_1 et A_2 deux C^*-algèbres dans des espaces $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$. Un isomorphisme φ de A_1 sur A_2 est dit spatial s'il existe un isomorphisme U de $\mathfrak{H}_1$ sur $\mathfrak{H}_2$ tel que $\varphi(T) = UTU^{-1}$ pour tout $T \in A_1$.

2. - Le problème initial des invariants unitaires est le suivant : soient T_1 et T_2 deux opérateurs hermitiens continus dans $\mathfrak{H}$. A quelle condition sont-ils unitairement équivalents, i.e. existe-t-il un opérateur unitaire U dans $\mathfrak{H}$ tel que $T_2 = UT_1U^{-1}$?

(On laissera de côté les extensions, relativement faciles, aux opérateurs non bornés et aux opérateurs normaux).

Ce problème est évidemment équivalent à la combinaison des problèmes 2 et 4 ci-dessous.

PROBLÈME 1. - Soient A_1 et A_2 deux algèbres de Gelfand-Neumark abéliennes. A quelles conditions sont-elles isomorphes ?

PROBLÈME 2. - Soient T_1, T_2 deux opérateurs hermitiens de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. A quelles conditions existe-t-il un isomorphisme de $\mathcal{G}(T_1)$ sur $\mathcal{G}(T_2)$ qui transforme T_1 en T_2 ?

PROBLÈME 3. - Soient A_1 et A_2 deux C^*-algèbres abéliennes, φ un isomorphisme de A_1 sur A_2. A quelles conditions φ est-il spatial ?

PROBLÈME 4. - Soient T_1, T_2 deux opérateurs hermitiens de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, φ un isomorphisme de $\mathcal{G}(T_1)$ sur $\mathcal{G}(T_2)$ qui transforme T_1 en T_2. A quelles conditions φ est-il spatial ?

Il sera commode de généraliser le problème 3 sous la forme suivante :

PROBLÈME 5. - Soient A une algèbre de Gelfand-Neumark abélienne, φ_1 et φ_2 deux homomorphismes de A sur des C^*-algèbres abéliennes A_1, A_2 dans les espaces $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$. A quelles conditions existe-t-il un isomorphisme U de $\mathfrak{H}_1$ sur $\mathfrak{H}_2$ tel que $\varphi_2(x) = U\,\varphi_1(x)\,U^{-1}$ pour tout $x \in A$?

3. - <u>Solution des problèmes</u> 1 <u>et</u> 2. Soit A une algèbre de Gelfand-Neumark commutative. Un caractère de A est un homomorphisme non nul de A dans l'algèbre à involution C (nombres complexes). L'ensemble des caractères de A, muni de la topologie faible du dual de A, est un espace compact $\mathcal{S}$ appelé spectre de A. A tout

$x \in A$ est associée une fonction f_x sur $\mathcal{S}$, à savoir la fonction $\chi \to \chi(x)$. L'application $x \to f_x$, appelée transformation de Gelfand, est un isomorphisme de A sur l'algèbre de Gelfand-Neumark $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ formée des fonctions continues sur $\mathcal{S}$. Donc deux algèbres de Gelfand-Neumark abéliennes sont isomorphes si et seulement si leurs spectres sont homéomorphes.

Supposons qu'on se donne dans A un élément hermitien x_o tel que les polynômes en x_o soient partout denses dans A. Alors l'application $\chi \to \chi(x_o)$ est un homéomorphisme de $\mathcal{S}$ sur une partie compacte S de l'axe réel (qui n'est autre que le "spectre" de l'élément x_o de A, au sens : ensemble des nombres λ tels que $x_o - \lambda$ ne soit pas inversible). Identifiant $\mathcal{S}$ à S par cet isomorphisme, la transformation de Gelfand devient un isomorphisme de A sur $\mathcal{C}(S)$, et l'élément correspondant à x_o, n'est autre que la fonction $\lambda \to \lambda$ sur S. Donc, étant données deux algèbres de Gelfand-Neumark abéliennes A_1, A_2, munies de générateurs hermitiens x_o^1, x_o^2 il existe un isomorphisme de A_1 sur A_2 transformant x_o^1 en x_o^2 si et seulement si leurs spectres réels sont identiques. Ceci s'applique en particulier à deux C^*-algèbres $\mathcal{G}(T_1)$, $\mathcal{G}(T_2)$: on notera alors que le spectre de T dans $\mathcal{G}(T)$ est identique au spectre de T dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$; c'est donc le spectre de T au sens classique.

Explicitons dans le cas où $\mathfrak{H}$ est de dimension finie. Une C^*-algèbre abélienne A dans $\mathfrak{H}$ est alors de la forme suivante : on considère des projecteurs E_1, ..., E_n deux à deux orthogonaux de $\mathfrak{H}$, de somme I, et on prend tous les opérateurs de la forme $T = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n$ $(\lambda_i \in C)$. Les caractères de A sont les applications $T \to \lambda_i$. Donc le spectre $\mathcal{S}$ de A est un espace à n éléments ; deux C^*-algèbres abéliennes de ce type sont isomorphes si le nombre n est le même.

Soit maintenant T_o un élément hermitien de A engendrant A. Il est de la forme $\lambda_1^o E_1 + \dots + \lambda_n^o E_n$, où les λ_i^o sont réels et deux à deux distincts. Ici, S est l'ensemble des nombres $\lambda_1^o, \dots, \lambda_n^o$; c'est bien le spectre de T_o au sens élémentaire, c'est-à-dire ici l'ensemble des valeurs propres de T_o. Etant données deux C^*-algèbres A_1, A_2 munies de générateurs T_o^1, T_o^2. Il existe un isomorphisme de A_1 sur A_2 transformant T_o^1 en T_o^2 si et seulement si T_o^1 et T_o^2 ont mêmes valeurs propres.

Naturellement, ceci ne suffit pas pour que A_1 et A_2 (ou T_o^1 et T_o^2) soient unitairement équivalents. Il faut encore, pour cela, que les valeurs propres aient les mêmes multiplicités pour T_o^1 et T_o^2, en entendant par multiplicités les dimensions des $E_i(\mathfrak{H})$. Ceci nous conduit à aborder les problèmes 3 et 4.

4. Solution des problèmes 3 et 4. - Soit toujours A l'algèbre des opérateurs $\lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n$ envisagée à la fin du n° 3. Pour tout $d \geqslant 0$, soit E_d la somme des E_i dont le rang est $\geqslant d$. La fonction sur $\mathcal{S}$ correspondant à E_d est idempotente, donc est la fonction caractéristique d'un certain ensemble $\mathcal{S}_d$. La connaissance des $\mathcal{S}_d$ permet de reconstituer les dimensions des $E_i(\mathfrak{H})$, donc résout le problème de l'équivalence unitaire. Pour pouvoir généraliser ceci, donnons une autre définition, plus compliquée, des E_d. Il est facile de voir que les projecteurs cycliques de A' s'obtiennent de la façon suivante : on prend dans chaque $E_i(\mathfrak{H})$ un sous-espace $\mathfrak{k}_i$ de dimension 0 ou 1, et on fait la somme E' des $P_{\mathfrak{k}_i}$; le plus petit projecteur de A majorant E' est la somme des E_i pour lesquels $\mathfrak{k}_i \neq 0$; appelons-le le support central de E'. Alors, E_d est le plus grand projecteur de A possédant la propriété suivante : il existe d projecteurs cycliques de A', deux à deux orthogonaux, de support central E_d.

Soit maintenant, $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien quelconque. (On se limitera cependant, dans toute la suite, aux espaces hilbertiens séparables, pour éviter des complications techniques parfois sérieuses). Soient A une C^*-algèbre abélienne dans $\mathfrak{H}$, $\mathcal{S}$ son spectre. Pour tout $d \geqslant 0$ (éventuellement, d sera infini), on peut définir les E_d comme précédemment (mais ce sont en général des projecteurs de A''), et leur associer des sous-ensembles $\mathcal{S}_d$ de $\mathcal{S}$. On a ainsi une notion de multiplicité sur le spectre, Mais cette fois, la connaissance des $\mathcal{S}_d$ ne fournit pas suffisamment d'invariants unitaires de A (sauf si $A = A''$, i.e. si A est une algèbre de von Neumann abélienne). Une seconde étape est donc nécessaire.

Les notions que nous introduisons maintenant sont déjà tirées du mémoire de KADISON. Envisageons la situation générale du problème 5. Soient A une algèbre de Gelfand-Neumark abélienne, $\mathcal{S}$ son spectre, φ un homomorphisme de A sur une C^*-algèbre abélienne. Toute forme linéaire continue sur $\varphi(A)$, transportée par φ^{-1} puis par l'isomorphisme de Gelfand, devient une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, i.e. une mesure sur $\mathcal{S}$. Considérons en particulier les états normaux sur $\varphi(A)$. Il leur correspond certaines mesures positives sur $\mathcal{S}$. Un ensemble borélien dans $\mathcal{S}$ est dit φ-négligeable s'il est négligeable pour toutes ces mesures. Les ensembles boréliens φ-négligeables forment une famille stable par passage aux sous-ensembles et par réunion dénombrable : on dira qu'ils forment un idéal qu'on désignera par $\mathfrak{N}_\varphi$. Pour tout $d \geqslant 0$, considérons le projecteur E_d associé à $\varphi(A)$, et soit φ^d l'homomorphisme "tronqué" de A obtenu en restreignant à $E_d(\mathfrak{H})$ les opérateurs de $\varphi(A)$. Quand d augmente, $E_d(\mathfrak{H})$ diminue, le noyau de φ^d augmente, les mesures sur $\mathcal{S}$ associées à φ^d diminuent, donc $\mathfrak{N}_{\varphi^d}$ augmente : on a une fonction $d \to \mathfrak{N}_{\varphi^d}$

définie pour $d \geqslant 0$ et dont les valeurs sont des idéaux d'ensembles boréliens dans $\mathcal{S}$. Alors cette fonction est un système complet d'invariants unitaires de φ. (Dans le cas, envisagé plus haut, où $\mathfrak{H}$ est de dimension finie, $\mathfrak{N}_{\varphi d}$ est formé des sous-ensembles de $\mathcal{S} - \mathcal{S}_d$; leur connaissance ne fournit rien de plus que celle des $\mathcal{S}_d$; mais dans le cas général, il est plus précis de connaître les $\mathfrak{N}_{\varphi d}$ que de connaître les $\mathcal{S}_d$).

Résumons. Soient A_1, A_2 deux C^*-algèbres abéliennes, de spectres $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$. Pour voir si elles sont isomorphes, on regarde si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont homéomorphes. Supposons cette condition remplie ; il y a isomorphismes spatial si de plus il existe un homéomorphisme de $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_2$ compatible avec la donnée de certains idéaux d'ensembles boréliens sur $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. Le problème 4 est alors bien facile : la donnée de générateurs hermitiens de A_1 et A_2 s'identifie, on l'a vu, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ à des ensembles compacts de nombres réels S_1, S_2 ; les idéaux d'ensembles boréliens se transportent sur S_1 et S_2 ; pour qu'il existe un isomorphisme (resp. un isomorphisme spatial) de A_1 sur A_2 échangeant les générateurs, il faut et il suffit que $S_1 = S_2$ (resp. que $S_1 = S_2$ et que les idéaux d'ensembles boréliens portés par S_1 et S_2 soient identiques). On voit donc que les problèmes 2 et 4 sont de simples annexes des problèmes 1 et 3, ou 5, et on les abandonnera complètement dans la suite.

Mais les problèmes 1 et 5 admettent des généralisations évidentes :

PROBLÈME 6. – Soient A_1 et A_2 deux algèbres de Gelfand-Neumark. A quelles conditions sont-elles isomorphes ?

PROBLÈME 7. – Soient A une algèbre de Gelfand-Neumark, φ_1 et φ_2 deux homomorphismes de A sur des C^*-algèbres A_1, A_2 dans des espaces $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$. A quelles conditions existe-t-il un isomorphisme U de $\mathfrak{H}_1$ sur $\mathfrak{H}_2$ tel que $\varphi_2(x) = U\varphi_1(x)U^{-1}$ pour tout $x \in A$?

Le problème 6 n'est résolu que partiellement, mais il faut indiquer sa solution partielle pour pouvoir expliquer la solution du problème 7. Soit A une algèbre de Gelfand-Neumark. L'ensemble des états de A forme, dans le dual de A muni de la topologie faible, un ensemble convexe compact X. L'ensemble des points extrémaux de X est, lorsque A est abélienne, le spectre de A. Dans le cas général, il n'est pas fermé, et c'est son adhérence faible $\mathcal{S}$ qu'on appelle le spectre de A. Tout élément $x \in A$ définit une fonction f_x sur $\mathcal{S}$, et $x \to f_x$

est une injection de A dans $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, compatible avec la structure vectorielle ordonnée, l'involution et la norme des éléments hermitiens, mais, bien entendu, pas avec la structure d'algèbre. Pour que deux C^*-algèbres A_1 , A_2 soient isomorphes, il faut (mais il ne suffit pas) que leurs spectres soient homéomorphes.

La suite est consacrée au problème 7.

2. Quelques résultats de KADISON

1. - Comme les problèmes 3 et 4, le problème 7 se résout en deux étapes.

1) définition d'une notion de multiplicité ;

2) définition de certaines fonctions dont les valeurs sont des idéaux d'ensembles boréliens.

Dans la définition de la notion de multiplicité, on remplace toutes les C^*-algèbres considérées par leur adhérence faible. Il s'agit donc en réalité d'établir une notion de multiplicité pour les algèbres de von Neumann. Nous ne développerons pas beaucoup ce point, parce qu'il est très technique et que d'ailleurs ce n'est pas la partie la plus originale du mémoire de KADISON. Soit A une algèbre de von Neumann. En utilisant principalement, comme pour les problèmes 3 , 4 , 5 , des projecteurs cycliques de A , on peut définir une famille décroissante $(E_d(A))_{d \geqslant 0}$ de projecteurs du centre de A possédant la propriété suivante : soit φ un isomorphisme d'une algèbre de von Neumann A sur une algèbre de von Neumann B ; pour que φ soit spatial, il faut et il suffit que $\varphi(E_d(A)) = E_d(B)$ pour tout d . (En fait, malheureusement, il y a un cas d'exception ; celui où A est "infini" et de commutant "fini" au sens de la théorie des algèbres de von Neumann ; nous laisserons ce cas de côté). L'outil essentiel est le théorème suivant : soient A et B deux algèbres de von Neumann telles que le projecteur I soit cyclique pour A , A' , B , B' ; alors, tout isomorphisme de A sur B est spatial.

Ces projecteurs E pourraient donc servir à résoudre le problème 7 s'il s'agissait d'algèbres de von Neumann. Mais, comme dans le cas commutatif, une deuxième étape est nécessaire s'il s'agit de C^*-algèbres.

2. - Définition. Soient A une algèbre de Gelfand-Neumark, φ un homomorphisme de A sur une C^*-algèbre dans un espace $\mathfrak{H}$, $\mathcal{S}$ le spectre de A , L l'image de A par l'injection canonique de A dans $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, B l'algèbre de von Neumann engendrée par $\varphi(A)$. Pour tout état normal φ de B , restreignons φ à $\varphi(A)$, transportons-le à L , et prolongeons-le de toutes les manières possibles en une

mesure ≥ 0 sur S. On désigne par $\mathfrak{N}_\varphi$ l'idéal des ensembles boréliens négligeables pour toutes les mesures ainsi obtenues. Considérons les projecteurs $E_d = E_d(B)$, Soit φ^d la représentation tronquée de A dans l'espace $E_d(\mathfrak{H})$. Soit $\mathfrak{N}_{\varphi^d}$ l'idéal correspondant. On a ainsi défini une fonction $d \to \mathfrak{N}_{\varphi^d}$ comme dans le cas commutatif. (La définition est en fait plus compliquée quand B est infinie de commutant fini).

THÉORÈME 1. - Deux représentations φ_1, φ_2 d'une algèbre de Gelfand-Neumark sur des C^*-algèbres sont unitairement équivalentes si et seulement si les fonctions $d \to \mathfrak{N}_{\varphi_1^d}$ et $d \to \mathfrak{N}_{\varphi_2^d}$ sont identiques.

La nécessité est évidente. Prouvons la suffisance. Soient B_1 et B_2 les algèbres de von Neumann engendrées par $\varphi_1(A)$ et $\varphi_2(A)$, $E_d^1 = E_d(B_1)$, $E_d^2 = E_d(B_2)$. Admettons que les hypothèses permettent de construire un isomorphisme φ de B_1 sur B_2 tel que $\varphi_2 = \varphi \circ \varphi_1$. On pourra de même, construire les isomorphismes φ^d de $B_1 E_d(B_1)$ sur $B_2 E_d(B_2)$ tels que les homomorphismes φ_1^d, φ_2^d tronqués de A dans $E_d^1(\mathfrak{H}_1)$, $E_d^2(\mathfrak{H}_2)$ vérifiant $\varphi_2^d = \varphi^d \circ \varphi_1^d$. Il est facile de voir que les φ^d se raccordent entre eux, et, d'après le n° 1, φ est spatial. Donc, φ_1 et φ_2 sont unitairement équivalentes. On voit donc que le point essentiel est le théorème suivant, qui est la partie la plus importante du mémoire :

THÉORÈME 2. - Soient A une algèbre de Gelfand-Neumark, φ_1 et φ_2 des homomorphismes de A sur des C^*-algèbres A_1, A_2 dans $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$; soient B_1, B_2 les algèbres de von Neumann engendrées par A_1 et A_2. Si $\mathfrak{N}_{\varphi_1} = \mathfrak{N}_{\varphi_2}$, il existe un isomorphisme (unique) φ de B_1 sur B_2 tel que $\varphi_2 = \varphi \circ \varphi_1$.

En fait, de l'hypothèse $\mathfrak{N}_{\varphi_1} \subset \mathfrak{N}_{\varphi_2}$, on va déduire l'existence d'un homomorphisme $\varphi : B_1 \to B_2$, possédant certaines propriétés de continuité et tel que $\varphi \circ \varphi_1 = \varphi_2$. Le théorème résulte facilement de là. L'hypothèse $\mathfrak{N}_{\varphi_1} \subset \mathfrak{N}_{\varphi_2}$ entraîne que le noyau de φ_1 est contenu dans le noyau de φ_2, d'où l'existence d'un homomorphisme $\varphi : A_1 \to A_2$ avec $\varphi \circ \varphi_1 = \varphi_2$. Il s'agit de le prolonger par continuité (faible, ou à peu près) à B_1, et pour cela de prouver ceci : soient $z \in \mathfrak{H}_2$, et φ' l'état de $\varphi_1(A)$ défini par $T \to (\varphi(T)z \mid z)$; restreint à la partie positive de la boule unité de A_1, φ' est faiblement continu en 0. La démonstration sera esquissée au n° 4.

3. - Quelques résultats auxiliaires. Soient A une C^*-algèbre, A^o sa partie hermitienne, B son adhérence faible, $\mathcal{S}$ le spectre de A , L l'espace de fonctions sur $\mathcal{S}$ associé à A , θ la bijection canonique de L sur A .

En considérant les suites monotones bornées d'opérateurs de A^o et en prenant leurs limites fortes, on agrandit A^o par un procédé d'induction transfinie : on obtient, pour chaque ordinal β , un espace $A^\beta \subset B$ d'opérateurs hermitiens.

On procède de même à partir de l'ensemble L^o des fonctions réelles de L . Plus précisément, la représentation identique de A définit un idéal $\mathfrak{N}$ d'ensembles boréliens dans $\mathcal{S}$, et on identifie deux fonctions de L^o égales sauf sur un ensemble de $\mathfrak{N}$. D'où un ensemble quotient $\tilde{L}^o$ qu'on agrandit transfiniment en ensembles $\tilde{L}^\beta$.

On peut alors prolonger transfiniment θ (par passages à la limite successifs) en un isomorphisme θ^β : $L^\beta \to A^\beta$ d'espaces vectoriels ordonnés, avec la propriété suivante ; si ρ' est un état normal de S et ρ une mesure $\geqslant 0$ correspondante sur $\mathcal{S}$, alors $\rho(f) = \rho'(\theta^\beta(\tilde{f}))$ pour toute $\tilde{f} \in L^\beta$.

Soit A' la réunion des A^β . Il est clair que A' est stable pour les passages à la limite monotones. Un résultat essentiel est que A' est stable pour le produit de Jordan : $(S , T) \to ST + TS$. Etendant les raisonnements d'un mémoire antérieur on prouve alors que A' est la partie hermitienne de B .

4. - Revenons à la situation de la fin du n° 2 . Identifions A à un espace de fonctions sur son spectre $\mathcal{S}$; on est à peu près dans la situation du n° 3 , le rôle de θ étant joué par φ_1 (qui n'est plus une bijection). On a $\omega'(\varphi_1(f)) = (\varphi(\varphi_1(f))z|z) = (\varphi_2(f)z|z)$; de sorte que, d'après $\mathfrak{N}_{\varphi_1} \subset \mathfrak{N}_{\varphi_2}$, toute mesure ω'' prolongeant $\omega' \circ \omega_1$ admet les ensembles de $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$ pour ensembles négligeables. On peut donc intégrer les fonctions de L^β par rapport à ω'' , d'où une forme linéaire positive normale ω sur A' dont la restriction à A est ω' . La théorie des algèbres de von Neumann montre alors que ω , donc ω' , possède la propriété de continuité voulue.