Bernard Malgrange

Équations différentielles sans solutions

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. nº 213, p. 119-125
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__119_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 213

Février 1961

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SANS SOLUTIONS

par Bernard MALGRANGE

[d'après Lars HÖRMANDER]

I. Notations.

$x = (x_1, \dots, x_n)$ [resp. $= (\xi_1, \dots, \xi_n)$] désigne le point courant de $\underset{\sim}{R}^n$; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ désigne un système d'entiers compris entre 1 et n ; on note ξ_α le polynôme $\xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_n}$, et $|\alpha| (= n)$ son degré.

Au polynôme ξ_α, on associe l'opérateur différentiel D_α obtenu en remplaçant ξ_j par $-i \frac{\partial}{\partial x_j}$. Plus généralement, à une fonction de x à valeurs dans les polynômes de degré $\leqslant n$ en ξ :

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_\alpha(x) \xi_\alpha ,$$

on associe l'opérateur différentiel

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_\alpha(x) D_\alpha .$$

On pose encore :

$$\overline{P}(x, \xi) = \Sigma \overline{a_\alpha}(x) \xi_\alpha$$

$$P^\alpha(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha_n}} P(x, \xi)$$

$$P_\alpha(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_n}} P(x, \xi) .$$

Dans toute la suite, nous supposerons les a_α définis et indéfiniment dérivables dans un ouvert $\Omega \subset \underset{\sim}{R}^n$.

II. Résultats positifs.

Désignons par $p(x, \xi)$ la "partie principale" $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi_\alpha$ de $P(x, \xi)$.
Dans sa thèse [1] (voir aussi [6]), HÖRMANDER avait établi le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Supposons que p vérifie les conditions suivantes :

1° $\forall\ x \in \Omega$, les polynômes $p^j(x, \xi)$ ($|j| = 1$) n'ont pas de zéro réel commun $\neq 0$.

2° $p = \overline{p}$.

Alors tout $x \in \Omega$ possède un voisinage ouvert Ω_x tel que, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x)$, on ait :

$$\| {}^tP(x, D)\, \varphi \| \geqslant C \sum_{|k| \leqslant m-1} \| D^k \varphi \|$$

(où C désigne un nombre > 0, $\| \ \|$ la norme dans L^2, et ${}^tP$ le transposé de Lagrange de P).

De là résulte (HAHN-BANACH) que, $\forall\ f \in L^2(\Omega)$, $\forall\ x \in \Omega$, il existe $g \in L^2(\Omega)$ tel que, dans Ω_x, on ait $P(x, D)\, g = f$; il suffit même de supposer que f est somme de dérivées d'ordre $\leqslant m - 1$ de fonctions $\in L^2(\Omega)$; un procédé de régularisation donné dans [2] permet d'établir ceci (en restreignant au besoin Ω_x d'une manière qui dépendra de k) : si f est choisi dans $L^2(\Omega)$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre k ($k \in \underset{\sim}{N}$), on peut choisir g dans $L^2(\Omega)$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $k + m - 1$.

Par la même méthode, HÖRMANDER [2] montre que les résultats précédents subsistent lorsque la condition 2° est remplacée par la condition plus générale 2° bis ci-dessous.

Avant d'énoncer cette condition, donnons encore une notation : soit $C(x, D)$ la partie principale (d'ordre $2m - 1$) de l'opérateur différentiel $[p(x, D), \overline{p}(x, D)]$; la condition 2° bis est alors la suivante :

2° bis. Il existe un polynôme en ξ de degré $m - 1$, $q(x, \xi)$ à coefficients indéfiniment dérivables tel qu'on ait :

$$C(x, \xi) = \overline{q}(x, \xi)\, p(x, \xi) + q(x, \xi)\, \overline{p}(x, \xi) \quad .$$

III. Opérateurs différentiels sans solutions.

Dans [2] et [3] (les résultats de [2], partiels, sont complétés dans [3], et repris dans [4] avec une rédaction plus simple : je suivrai de près [4] dans cet exposé), HÖRMANDER établit une réciproque partielle des résultats précédents :

THÉORÈME 2. - Supposons que, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant $P(x, D)\, f = \varphi$. Alors la condition suivante est vérifiée :

(C) $\forall\ x \in \Omega$, les conditions " $\xi \in \underset{\sim}{R}^n$, $p(x, \xi) = 0$ " entraînent $C(x, \xi) = 0$.

Supposons que la condition précédente ne soit pas vérifiée en un point x_0 ; alors, dans tout voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de x_0, il y aura des $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ qui ne seront pas de la forme $P(x, D) f$, $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

COROLLAIRE. - Supposons que, pour un ensemble de points dense dans Ω, la condition (C) ne soit pas vérifiée : alors il existe $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ tel que, dans tout ouvert $\mathcal{O} \subset \Omega$, on ait $f_{\mathcal{O}} \notin P(x, D) \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ ($f_{\mathcal{O}}$ = restriction de f à $\mathcal{O}$).

Soient en effet $\mathcal{O}$ un ouvert $\subset \Omega$, et m un entier $\geqslant 0$; considérons l'espace $V_{m,\mathcal{O}}$ des $g \in \mathcal{D}'^m(\mathcal{O})$ tel que $P(x, D) g$ soit dans la restriction $\mathcal{E}(\Omega)_{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{E}(\Omega)$ à $\mathcal{O}$; muni de la topologie évidente, c'est un espace de Fréchet : d'après le théorème précédent, et un théorème classique de Banach, son image par P dans $\mathcal{E}(\Omega)_{\mathcal{O}}$ est maigre : donc l'ensemble des $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ tels qu'on ait : $f_{\mathcal{O}} \in P(x, D) \mathcal{D}'^m(\mathcal{O})$ est maigre.

Soit alors $\mathcal{O}_p$, $p \in \mathbb{N}$, une base des ouverts $\subset \Omega$; l'ensemble des $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ tels qu'on ait pour un p et un m : $f_{\mathcal{O}_p} \in P(x, D) \mathcal{D}'^m(\mathcal{O}_p)$ est maigre, donc $\neq \mathcal{E}(\Omega)$ d'après le théorème de Baire.

EXEMPLES.

1. Le premier exemple de ce genre, antérieur au travail de HÖRMANDER, est dû à H. LEWY [5] :

$$P(x, D) = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} - 2i(x_1 + ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3} \quad , \qquad \text{avec } \Omega = \mathbb{R}^3 .$$

On a en effet : $p(x, \xi) = i\xi_1 - \xi_2 + 2(x_1 + ix_2)\xi_3$, et $C(x, \xi) = -8\xi_3$; la condition (C) n'est vérifiée en aucun point (prendre $\xi_1 = -2x_2$, $\xi_2 = 2x_1$, $\xi_3 = 1$).

Soit alors $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ tel que l'équation $P(x, D) g = f$ n'ait de solution au voisinage d'aucun point : alors l'équation homogène $P(x, D)u = fu$ n'a, au voisinage d'aucun point, de solution C^1 et $\neq 0$ (prendre $v = \log u$) : la question de savoir si l'on peut choisir f de manière qu'il n'y ait aucune solution distribution est ouverte, à ma connaissance.

2. Plus généralement, soit $P(x, D) = \sum_{|j|=1} a_j(x) D_j$ un "champ de vecteurs complèxes" dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et supposons que le système $P(x, \xi)$, $\overline{P}(x, \xi)$ soit, $\forall x$, de rang constant r ($r = 1$ ou 2) sur $\mathbb{C}$. Alors la condition (C), qui équivaut ici à la condition 2° bis, équivaut encore à la suivante (théorème de

Frobenius complexe) : au voisinage de tout point, on peut **faire un changement** C^∞ de coordonnées tel que $P(x , D)$ soit ramené à l'une des formes suivantes

$$a(x) \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad (\text{si } r = 1) \quad ,$$

$$a(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \qquad (\text{si } r = 2) \quad .$$

Même si l'on trouve cette histoire immorale (ce n'est pas l'avis du conférencier), on conviendra qu'il s'imposerait d'étudier de ce même point de vue les sytèmes "**surdéterminés**", au moins lorsqu'ils sont d'ordre 1 .

3. Soit $P(D)$ un opérateur à coefficients constants de type principal (i. e. les $\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(\xi)$ n'ont pas de zéro réel commun $\neq 0$), mais non elliptique ; on voit facilement qu'il existe un $P(x , D)$ vérifiant $P(0 , D) = P(D)$, mais ne vérifiant pas (C) à l'origine.

IV. Démonstration du théorème 2.

1. Supposons qu'on ait $P(x , D) \mathcal{D}'(\Omega) \supset \mathcal{D}(\Omega)$, et soit $\mathcal{O}$ un ouvert relativement compact dans Ω .

Munissons $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ de sa topologie habituelle d'espace de Fréchet, et soit V l'espace $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ muni de la topologie induite par l'application ${}^tP(x , D) : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \to \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$: V est un espace métrisable.

Sur $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}) \times V$, on considère la forme **bilinéaire** : $(f , v) \to \int fv\, dx$; elle est séparément continue puisque, par hypothèse, il existe $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $P(x , D)\, g = f$: elle est donc continue.

Par conséquent, il existe $k , \ell \in \underset{\sim}{N}$ et $C > 0$ tel qu'on ait, $\forall\ f , v \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$:

$$\left| \int fv\, dx \right| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \operatorname{Max}|D_\alpha f| \sum_{|\beta| \leqslant \ell} \operatorname{Max}|D_\beta\, {}^tPv|$$

(le maximum est pris sur x).

Pour démontrer ce théorème 2, il nous suffira donc d'établir ceci :

Si (C) n'est pas vérifiée en 0 (on suppose $0 \subset \Omega$), il existe, $\forall\ k , \ell \in \underset{\sim}{N}$ une famille v_τ ($\tau > 0$) de fonctions $\in \mathcal{D}(\Omega)$, à support dans un compact fixe, telle que

1° Pour $t \to \infty$, v_τ ne converge pas vers 0 dans $\mathcal{D}'^k(\Omega)$;

2° Pour $t \to \infty$, ${}^tP\, v_\tau$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}^\ell(\Omega)$.

On va fabriquer v_τ par un développement asymptotique analogue à ceux que l'on rencontre dans la théorie des paquets d'onde, et qui avaient déjà servi à HADAMARD et à LAX à donner des conditions nécessaires pour qu'une équation soit hyperbolique (mais ici, la situation est plus subtile).

2. Supposons donc que (C) ne soit pas vérifiée en 0, et soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel qu'on ait $p(0\,,\,\xi) = 0$, $C(0\,,\,\xi) \neq 0$; désignons par m le degré de P ; on a (vérification facile)

$$C(0\,,\,\xi) = \sum_{j=1}^{n} i[p^j(0\,,\,\xi)\,\overline{p}_j(0\,,\,\xi) - p_j(0\,,\,\xi)\,\overline{p}^j(0\,,\,\xi)] \quad .$$

C étant réel et de degré impair, on peut supposer $C(0\,,\,\xi) < 0$.

LEMME 1. - Il existe une série formelle w en $(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)$, qui possède les propriétés suivantes :

1° $p(x\,,\,\mathrm{grad}\, w) = 0$,

2° $w(x) = i\langle x\,,\,\xi\rangle + \frac{1}{2}\Sigma a_{jk}\, x_j\, x_k$ + termes d'ordre $\geqslant 3$, la matrice (a_{jk}) étant symétrique et de partie réelle définie négative.

(dans 1°, p a été, évidemment, identifié à sa série formelle en 0).

Prenons d'abord $w_1 = i\langle x\,,\,\xi\rangle$; alors $p(x\,,\,\mathrm{grad}\, w_1)$ s'annule en 0 ; soit $w_2 = \Sigma\, a_{jk}\, x_j\, x_k$, et écrivons que $p(x\,,\,\mathrm{grad}(w_1 + w_2))$ a ses dérivées nulles en 0 : on trouve que les a_{jk} doivent vérifier

$$\forall\, j\,, \qquad ip_j(0\,,\,\xi) + \sum_k p^k(0\,,\,\xi)\, a_{jk} = 0 \quad .$$

Une fois obtenus les a_{jk}, on déterminera de proche en proche les termes homogènes successifs, par exemple par Cauchy-Kovalevski formel. Reste à montrer que l'on peut choisir les a_{jk} avec les propriétés de l'énoncé ; or cela résulte aussitôt du lemme suivant :

LEMME 2. - Étant donnés deux vecteurs $(z_1\,,\,\ldots\,,\,z_n)$ et $(\zeta_1\,,\,\ldots\,,\,\zeta_n) \in \mathbb{C}^n$, pour qu'il existe une matrice symétrique (a_{jk}) à partie réelle définie négative vérifiant $\Sigma a_{jk} z_j = \zeta_k$, il faut et il suffit qu'on ait $\mathcal{R}\Sigma\, \zeta_k\, \bar{z}_k < 0$.

3. Une fois w obtenu, on construit par récurrence des séries formelles $\varphi_0\,,\,\varphi_1\,,\,\ldots\,,\,\varphi_r\,,\,\ldots$ possédant la propriété suivante, $\forall\; r \in \mathbb{N}$:

Soit $u_{\tau,\,r} = e^{\tau w} \sum_0^r \varphi_\mu\, \tau^{-\mu}$; alors ${}^tP(x\,,\,D)\, u_{\tau,\,r} = \tau^m\, e^{\tau w} \sum_{r+1}^{r+m} \psi_\mu \tau^{-\mu}$.

Pour déterminer φ_μ, supposant $\varphi_0, \dots, \varphi_{\mu-1}$ déterminés, on écrit l'équation qu'elle doit satisfaire pour que le terme en $\tau^{m-\mu-1}$ s'annule ; elle est du type suivant :

$$\sum_1^n A_j D_j \varphi_\mu + B\varphi_\mu + C_\mu = 0 \quad ,$$

où $A_j = - p^j(x, i \operatorname{grad} w)$, B est une série fixe, et C_μ une série dépendant de $\varphi_0, \dots, \varphi_{\mu-1}$: comme les A_j ne sont pas tous nuls en 0, Cauchy-Kovalevski formel montre l'existence de φ_μ. En outre, (pour la suite), on choisit $\varphi_0(0) = 1$.

Soient alors $\bar{w}, \bar{\varphi}_0, \dots, \bar{\varphi}_r, \dots$ des fonctions $\in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ ($\mathcal{O}$ ouvert relativement compact $\subset \Omega$) ayant respectivement $w, \varphi_0, \dots, \varphi_r, \dots$ pour séries formelles en 0 ; on peut supposer qu'il existe $A > 0$ tel que $\mathcal{R}w \leqslant - A|x|^2$.

Prenons $r = n + m + k + \ell + 1$, et posons

$$v_\tau = \tau^{k+n} e^{\tau\bar{w}} \sum_0^r \bar{\varphi}_\mu \tau^{-\mu} \quad .$$

Comme $|e^{\tau w}| \leqslant e^{-A|x|^2}$, on voit immédiatement que ${}^tPv_\tau$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}^{\ell}(\Omega)$. Reste à montrer que v_τ ne converge pas vers 0 dans $\mathcal{D}'^k(\Omega)$. Or, soit $f \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$, et posons $f_\tau(x) = \tau^{-k} f(\tau x)$; il est clair que les f_τ forment un ensemble borné dans $\mathcal{D}^k(\underset{\sim}{R}^n)$ (et aussi dans $\mathcal{D}^k(\Omega)$), dès que $\tau \geqslant \tau_0$. Or

$$\int f_\tau v_\tau \, dx = \int f(x) \, e^{\tau\bar{w}(x/\tau)} \sum_0^r \bar{\varphi}_\mu\left(\frac{x}{\tau}\right) \tau^{-\mu} \, dx \to \mathcal{F}f(-\xi)$$

(puisque $\varphi_0(0) = 1$).

V. Autres résultats.

Par les mêmes méthodes, HÖRMANDER démontre entre autres les résultats suivants [4] :

THÉORÈME 3. - Soit $P(x, D)$ un opérateur du premier ordre, à coefficients analytiques, dans un ouvert $\Omega \ni 0$; soit $\xi \in \underset{\sim}{R}^n$ tel que $p(0, \xi) = 0$, et $C(0, \xi) \neq 0$. Il existe un nombre $c > 0$ et une fonction f holomorphe dans $\mathcal{I}\langle z, \xi \rangle < c$ tel que la restriction de f à Ω n'appartienne pas à $P(x, D)\mathcal{D}'(\Omega)$.

THÉORÈME 4. - Soient $P(x, D)$ et $Q(x, D)$ deux opérateurs du premier ordre tels que, pour un ensemble dense dans Ω, (C) ne soit pas vérifiée ; supposons que $p(x, D)$ ne s'annule en aucun point, et qu'on ait $P\mathcal{D}'(\Omega) \supset Q\mathcal{D}(\Omega)$. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ tel que $Q(x, D) f = P(x, D)(\varphi f)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 161-248 (Thèse).

[2] HÖRMANDER (Lars). - Differential operators of principal type, Math. Annalen, t. 140, 1960, p. 124-146.

[3] HÖRMANDER (Lars). - Differential equations, without solutions, Math. Annalen, t. 140, 1960, p. 169-173.

[4] HÖRMANDER .(Lars). - Traité sur les équations différentielles (en préparation).

[5] LEWY(Hans). - An exemple of a smooth linear partial differential equation without solution, Annals of Math., Series 2, t. 66, 1957, p. 155-158.

[6] TREVES (François). - Thèse d'Hörmander, I , II , Séminaire Bourbaki, 2e éd., t. 8, 1955/56, n° 130 et 135, 10 et 7 p.