ANDRÉ MARTINEAU

Les hyperfonctions de M. Sato

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. nº 214, p. 127-139
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__127_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 214

Février 1961

LES HYPERFONCTIONS DE M. SATO

par André MARTINEAU

Soient M une variété analytique réelle dénombrable à l'infini et X un complexifié de M. Dans [7], Mikio SATO définit les hyperfonctions sur M comme éléments d'un n-ième groupe de cohomologie relative de X modulo $X - M$ à valeurs dans le faisceau des n-formes holomorphes sur X. Nous allons commencer par une définition très élémentaire des hyperfonctions qui permet sur elles toutes les constructions de la théorie de Sato, et même plus, puis nous montrerons comment, à partir de cette définition, la conception de SATO généralise la notion d'indicatrice de la théorie "classique" [4] des fonctionnelles analytiques.

1. Fonctionnelles analytiques à support compact.

a. Soient K un compact d'une variété de Stein V, $H(K)$ l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de K muni de la topologie localement convexe de la limite inductive des $H(V)$ où V parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de K.

Par définition, une fonctionnelle analytique sur K est un élément de $H'(K)$ le dual topologique de $H(K)$. $H(K)$ est un dual de Fréchet, réflexif, $H'(K)$ est un Fréchet.

On peut identifier sous certaines conditions les fonctionnelles analytiques définies sur des compacts distincts. Si K_1 et K_2 sont deux compacts convexes par rapport à la famille $H(V)$ des fonctions holomorphes sur V, $H(V)$ est dense dans $H(K_i)$ $(i = 1,2)$: $\psi_1 \in H'(K_1)$ et $\psi_2 \in H'(K_2)$ seront identifiées si $\underset{H(V)}{\operatorname{rest}} \psi_1 = \underset{H(V)}{\operatorname{rest}} \psi_2$ (1).

b. Fonctionnelles analytiques à support réel. - Si M est une variété analytique réelle dénombrable à l'infini, elle admet des complexifiés, et ceux-ci coïncident localement. On peut donc, si K est un compact de M, définir la topologie de $H(K)$ qui ne dépendra pas du choix du complexifié.

(1) $\underset{H(V)}{\operatorname{rest}} \psi_1$ désigne la forme linéaire sur $H(V)$ obtenue par restriction de ψ_1 à $H(V)$.

Par définition une fonctionnelle analytique réelle est un élément d'un $H'(K)$.

On sait par le théorème de plongement [3] que les fonctions d'un complexifié fixe de M sont denses dans tout $H(K)$ (tout compact réel est même convexe par rapport à la famille des fonctions holomorphes dans un complexifié fixe de M).

$\psi_1 \in H'(K_1)$ et $\psi_2 \in H'(K_2)$ seront identifiées si

$$\operatorname*{rest}_{H(M)} \psi_1 = \operatorname*{rest}_{H(M)} \psi_2 .$$

Si $\psi \in H'(K)$ on dira que K porte ψ.

PROPOSITION 1. - Si ψ est une fonctionnelle analytique réelle différente de zéro, il existe un plus petit compact réel différent de $\emptyset$, soit $\sigma(\psi)$, qui porte ψ.

Nous appellerons $\sigma(\psi)$ le support de ψ.

DÉMONSTRATION. - Si K_1 et K_2 sont deux compacts réels qui portent ψ, $K_1 \cup K_2$ étant holomorphiquement convexe, on a : $H^1(K_1 \cup K_2 ; \mathcal{O}) = 0$. Donc toute $f \in H(K_1 \cap K_2)$ est de la forme $f_1 - f_2$ où $f_i \in H(K_i)$, $i = 1,2$. L'application $(f_1 , f_2) \to (f_1 - f_2)$ de $H(K_1) \times H(K_2) \to H(K_1 \cap K_2)$ est surjective. C'est donc un homomorphisme.

On pose $\psi(f) = \psi_1(f_1) - \psi_2(f_2)$. On aura défini une fonctionnelle analytique sur $H(K_1 \cap K_2)$ si on montre que $\psi(f) = 0$ si $f_1 - f_2 = 0$ dans $H(K_1 \cap K_2)$. Mais, sous cette condition, f_1 et f_2 sont les restrictions à K_1 et K_2 d'une fonction g de $H(K_1 \cup K_2)$, et g est limite dans $H(K_1 \cup K_2)$ de fonctions de M. D'où $\psi_1(f_1) = \psi_1(g) = \psi_2(g) = \psi_2(f_2)$.

On vérifie facilement que ψ est dans la classe de ψ_1 et de ψ_2 et que, si 0 est dans la classe de ψ, alors $\psi = 0$.

PROPOSITION 2. - Si $\sigma(\psi) = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, il existe ψ_i de support inclus dans K_i telle que $\sum_{i=1}^{n} \psi_i = \psi$.

DÉMONSTRATION. - Nous considérons l'application $(\psi_1 , \dots , \psi_n) \to \sum_{i=1}^{n} \psi_i$ de $\prod_{i=1}^{n} H'(K_i)$ dans $H'(K)$, $K = \sigma(\psi)$.

Sa transposée est $f_K \to (f_{K_1}, \dots, f_{K_n})$ de $H(K)$ dans $\prod_{i=1}^{n} H(K_i)$. Il est clair que l'image est fermée, donc l'application initiale est surjective.

c. Fonctionnelles analytiques réelles à support quelconque. - On a $\sigma(\psi_1 + \psi_2) \subset \sigma(\psi_1) \cup \sigma(\psi_2)$, $\sigma(\lambda\psi) \subset \sigma(\psi)$. Soit ψ_i une suite de fonctionnelles analytiques telles que les $\sigma(\psi_i)$ forment un recouvrement localement fini de M. Nous dirons qu'elle définit une série localement nulle $\sum_i \psi_i$, si pour tout $x \in M$,

$$x \notin \sigma\Big(\sum_{j, x \in \sigma(\psi_j)} \psi_j\Big) \quad .$$

On introduit entre les séries la relation d'équivalence $(\sum_i \psi_i) \equiv (\sum_j \theta_j)$ si $\sum_i (\psi_i - \theta_i)$ est localement nulle. La classe d'équivalence d'une telle série $\sum_i \psi_i$ sera dite sa somme.

Par définition, une fonctionelle analytique sur M est la somme d'une série localement finie de fonctionnelles analytiques à support compact.

Il est évident que la somme d'une série localement finie de fonctionnelles analytiques est indépendante de l'ordre de ses termes.

Cette définition peut-être étendue à toute partie localement fermée de M.

PROPOSITION 3. - Soient U un ouvert relativement compact dans M et ψ une fonctionnelle analytique définie sur U. Il existe une fonctionnelle analytique θ à support inclus dans $\overline{U}$ qui coïncide dans U avec ψ.

Si K est un compact de U, nous désignerons par enveloppe, soit $\widetilde{K}$, de K relativement à U, la réunion de K et des composantes connexes relativement compactes (relativement à U) de $U - K$. $\widetilde{K}$ est encore un compact de U [6].

LEMME 1. - Soient U un ouvert borné dans R^n, K un compact de U égal à son enveloppe. $H'(\overline{U} - U)$ est dense dans $H'(\overline{\complement K \cap U})$.

Démonstration du lemme. - Il suffit de voir que l'application de $H(\overline{\complement K \cap U})$ dans $H(\overline{U} - U)$ est injective, donc que $\overline{\complement K \cap U}$ n'a pas de composante ouverte et fermée, disjointe de $\overline{U} - U$. Soit ω une telle composante : ω est ouvert dans $\overline{U - K}$ donc $\omega = \Omega \cap \overline{U - K}$ où Ω est un ouvert de M. Par définition de l'adhérence $\Omega \cap (U - K) \neq \emptyset$. Donc $\omega \cap (U - K)$ est un ouvert de $U - K$, et comme ω

est fermé dans $\overline{U - K}$, $\omega \cap (U - K)$ est fermé dans $U - K$. Si $\omega \cap (\overline{U} - u) = \emptyset$, nous avons ainsi obtenu une composante ouverte fermée relativement compacte dans $U - K$, ce qui est une contradiction.

Démonstration de la proposition. - Il existe dans U une suite K_n de compacts tels que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, tels que $K_i = \tilde{K}_i$ pour tout i, et tels enfin que $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Soit ψ une fonctionnelle analytique sur M. On peut, grâce à la proposition 2, supposer que ψ est une somme de fonctionnelles ψ_i à supports compacts où ψ_{i+1} a son support dans $\overline{K_{i+1} - K_i}$.

Soit d_n une distance définissant la topologie de $H'(\overline{U - K_n})$. L'injection de $H'(\overline{U - K_n})$ dans $H'(\overline{U - K_i})$ est continue si $n \geq i$.

Donc on peut trouver φ_n à support dans $\overline{U} - U$ telle que $d_i(\varphi_n - \psi_n) \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $i \leq n$.

Considérons la série (non localement finie)

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\psi_i - \varphi_i) \quad .$$

Elle converge vers un élément Θ de $H'(\overline{U})$ et pour tout n on a :

$$\Theta = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \psi_j\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k\right) + \sum_{\ell=n}^{\infty} (\psi_\ell - \varphi_\ell)$$

et la dernière série converge dans $H'(\overline{U - K_n})$ donc Θ coïncide avec ψ sur l'intérieur de chaque K_i, donc avec ψ dans U.

C. Q. F. D.

d. Nouvelle définition. Le faisceau des germes de fonctionnelles analytiques.

L'ensemble des fonctionnelles analytiques à support compact sur M forme un espace vectoriel noté $H'(M)$.

Nous dirons que deux fonctionnelles ψ_1 et ψ_2 coïncident au voisinage d'un point x, si $\sigma(\psi_1 - \psi_2) \not\ni x$. L'ensemble $N(x)$ des ψ telles que $x \notin \sigma(\psi)$ est un espace vectoriel. On pose $H'_x = H'(M)/N(x)$ et $p_x : H'(M) \to H'_x$. On introduit dans l'ensemble $\bigcup_{x \in M} H'_x$ la topologie suivante : si $\psi \in H'(M)$, ψ définit une application s_ψ de M dans $\bigcup_x H'_x$ par $s_\psi(x) = p_x(\psi)$. Les ouverts de $\bigcup_x H'_x$

sont les réunions des images d'ouverts de M par les $s_\psi(x)$. Le faisceau ainsi construit sera noté $\mathcal{A}(M)$.

En bref, nous avons fait le quotient du faisceau constant H'(M) par le sous-faisceau $\mathfrak{F}$ de H'(M) défini par :

$$x \in \mathfrak{F}(U) \Longleftrightarrow \sigma(x) \cap U = \emptyset \quad .$$

Par définition, une fonctionnelle analytique définie sur M sera une section de $\mathcal{A}(M)$.

Grâce à la proposition 3, on déduit.

THÉORÈME 1. -

a. H'(M) s'identifie à l'ensemble des sections à support compact de $\mathcal{A}(M)$.

b. $\Gamma(M\ ;\ \mathcal{A}(M))$ s'identifie à l'ensemble des fonctionnelles analytiques au sens de (c) .

c. $\mathcal{A}(M)$ est un faisceau flasque.

On peut étendre facilement les propositions 2 et 3 au cas non compact.

e. Distributions et fonctionnelles analytiques. - Soit T une distribution de support K compact dans M . Elle définit une fonctionnelle analytique par restriction à l'espace des fonctions analytiques au voisinage de K . Si $\overline{T}$ désigne cette fonctionnelle analytique, il est clair que $T \neq 0 \Rightarrow \overline{T} \neq 0$, et que $\sigma(\overline{T}) \subset K$. On a en fait $\sigma(\overline{T}) = \sigma(T)$: pour résoudre cette question, il suffit de montrer que si, au voisinage d'un point, T est nulle en tant que fonctionnelle analytique, elle est nulle en tant que distribution. On est donc ramené à un problème dans R^n qu'on résoud en exprimant T comme bord de fonctions analytiques dans C^n .

Ceci étant fait, il est clair qu'on obtient alors un plongement de $\mathcal{D}'$ dans H'(M) , car toute distribution de $\mathcal{D}'$ est somme localement finie de distributions à support compact.

2. Cohomologie relative.

Nous serons le plus bref possible, le seul outil dont nous aurons besoin étant la suite exacte de cohomologie relative d'un sous-espace fermé.

a. Soient X un espace topologique, Z une partie localement fermée de X, $\mathfrak{F}$ un faisceau de modules sur X. Soit U un ouvert de X dans lequel Z est fermé. On désigne par $\Gamma_Z(U; \mathfrak{F})$ l'ensemble des sections de $\mathfrak{F}$ sur U de support dans Z fermé par rapport à U. $\Gamma_Z(U ; \mathfrak{F})$ est indépendant de U. Soit en effet V un ouvert de X, qu'on peut supposer inclus dans U, tel que Z soit fermé relativement à V.

On a un homomorphisme surjectif naturel de restriction

$$\Gamma_Z(U ; \mathfrak{F}) \to \Gamma_Z(V ; \mathfrak{F}) \to 0 \quad .$$

Le noyau de cet homomorphisme est formé des sections de $\mathfrak{F}$ sur U à support dans Z, et de restriction nulles sur V, donc de sections nulles sur V et sur $U - \complement Z$, donc nulles sur U. L'homomorphisme $\Gamma_Z(U ; \mathfrak{F}) \to \Gamma_Z(V ; \mathfrak{F})$ est donc bijectif. On identifie tous les groupes $\Gamma_Z(U ; \mathfrak{F})$, et on définit ainsi un facteur covariant exact à gauche $\Gamma_Z(X ; \mathfrak{F})$.

DÉFINITION 4. - Le n-ième groupe de cohomologie relative de X modulo $X - Z$, à valeurs dans un faisceau $\mathfrak{F}$ est le n-ième foncteur dérivé du foncteur $\Gamma_Z(X ; \mathfrak{F})$. On le note $H^n_Z(X ; \mathfrak{F})$.

b. Calcul de $H^n_Z(X ; \mathfrak{F})$. - On prendra une résolution flasque F

$$F : 0 \to \mathfrak{F} \xrightarrow{i} \mathfrak{F}_1 \xrightarrow{d} \cdots$$

de $\mathfrak{F}$, et $H^n_Z(X ; \mathfrak{F})$ sera naturellement isomorphe au n-ième groupe de l'homologie du complexe $\Gamma_Z(X ; F)$.

Soit Z fermé dans X, $\mathfrak{U} = \{U_\alpha | \alpha \in N\}$ un recouvrement ouvert de X tel que, pour tout simplexe S du nerf du recouvrement, on ait $H^n(U_S ; \mathfrak{F}) = 0$ pour $n \geq 1$. Soit $\mathfrak{U}' = \{U_\alpha | \alpha \in N'\}$, où $N' \subset N$. Alors le n-ième module de cohomologie du complexe de chaînes

$$C^0(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}' , \mathfrak{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}' ; \mathfrak{F}) \longrightarrow \quad ,$$

où $C^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}' ; \mathfrak{F})$ $(n = 0, 1 \ldots)$ désigne le module des cochaînes relatives de Čech pour le recouvrement $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$, est canoniquement isomorphe à $H^n_Z(X ; \mathfrak{F})$.

c. La suite exacte de cohomologie relative. - Si Z est fermé dans X, et si Φ est flasque, toute section au-dessus de $X - Z$ se prolonge en une section au-dessus de X, et le noyau de l'homomorphisme de restriction est $\Gamma_Z(X ; \Phi)$. D'où la suite exacte :

$$0 \to \Gamma_Z(X\,;\Phi) \to \Gamma(X\,;\Phi) \to \Gamma(X - Z\,;\,\Phi) \to 0 \quad .$$

Appliquant ceci à une résolution flasque d'un faisceau $\mathfrak{F}$, on obtient une suite exacte de cohomologie relative :

$$0 \to H^0_Z(X\,;\,\mathfrak{F}) \to H^0(X\,;\,\mathfrak{F}) \to H^0(X - Z\,;\,\mathfrak{F}) \xrightarrow{\partial} H^1_Z(X\,;\,\mathfrak{F}) \to \dots$$

d. Localisation de la cohomologie relative. - On a remarqué que $\Gamma_Z(X\,;\,\mathfrak{F})$ ne dépend pas en fait de X. On va construire un faisceau concentré sur Z, si Z est fermé dans X, qui permet de calculer la cohomologie relative de Z.

Soit U un ouvert de X. On définit sur X le préfaisceau $U \to H^0_{Z\cap U}(U\,;\,\mathfrak{F})$. Le faisceau associé sera noté $\underline{H}^0_Z(\mathfrak{F})$. Les $\underline{H}^i_Z(\mathfrak{F})$ sont les foncteurs dérivés du foncteur $H^0_Z(\mathfrak{F})$, ou, encore, $\underline{H}^i_Z(\mathfrak{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \to H^i_{Z\cap U}(U\,;\,\mathfrak{F})$. M. SATO désigne ce faisceau sous le nom de i-distributions du type $\mathfrak{F}$.

Il existe une suite spectrale de termes $E_2^{p,q} = H^p(X\,;\,\underline{H}^q_Z(\mathfrak{F}))$ et aboutissant à $H_Z(X\,;\,\mathfrak{F})$ (cf. [2] théorème 4. 17. 1).

En particulier, si les préfaisceaux $U \to H^q_{Z\cap U}(U\,;\,\mathfrak{F})$ sont nuls pour $q = 0\,,\,1\,,\,\dots\,,\,n-1$, le préfaisceau $U \to H^i_{Z\cap U}(U\,;\,\mathfrak{F})$ est en fait un faisceau, et son module des sections est égal à $H^n_Z(X\,;\mathfrak{F})$.

DÉFINITION de SATO. - Soit M une variété analytique réelle de dimension n. Par définition $\underline{H}^n_Z(M\,,\,\Omega^n)$ est le faisceau des hyperfonctions sur M.

3. Identification de $\underline{H}^n_Z(M\,,\,\Omega^n)$ avec $\mathcal{Q}(M)$.

a. La dualité de CARTAN - SCHWARTZ - SERRE [8]. - Soit X une variété analytique complexe de dimension complexe n, donc réelle égale à $2n$, dénombrable à l'infini.

$A^{p,q}$ désigne le faisceau des germes de formes différentielles de type $(p\,,\,q)$ (p en dz_i, q en $d\bar{z}_j$) à coefficients indéfiniment différentiables ; $A^{p,q}(X)$ désigne l'espace de ses sections sur X muni de sa topologie naturelle qui en fait un espace de Fréchet-Schwartz [5] (même nucléaire), $K^{p,q}$ désigne le faisceau des germes de formes différentielles de type $(p\,,\,q)$ à coefficients distributions, $K^{p,q}_*(X)$ l'espace des sections à support compact de ce faisceau. Muni de sa topologie naturelle, c'est un dual de Fréchet-Schwartz (nucléaire). Si $\omega \in A^{p,q}(X)$ $T \in K^{n-p,n-q}(X)$, $(\omega\,,\,T) \to \int_X \omega \wedge T$ définit une dualité entre $A^{p,q}(X)$ et $K_*^{(n-p),(n-q)}(X)$. Cette dualité identifie $K_*^{n-p,n-q}(X)$ au dual topologique fort de $A^{p,q}(X)$.

Le lemme 1 de SERRE peut s'écrire [8] :

LEMME 2. - Soit L, M, N trois Fréchets Schwartz (resp. trois duals de Fréchet-Schwartz), et $u : L \to M$, $v : M \to N$ deux homomorphismes linéaires tels que $v \circ u = 0$, L^*, M^*, N^* les duals topologiques forts de L, M, N, et ${}^t u$, ${}^t v$ les homomorphismes transposés. Posant $C = v^{-1}(0)$, $B = u(L)$, $H = C/B$ avec la topologie quotient et $C' = {}^t u^{-1}(0)$, $B' = {}^t v(N^*)$, $H' = C'/B'$ avec sa topologie quotient, H est un Fréchet-Schwartz (resp. un dual de Fréchet-Schwartz) dont le dual topologique fort est H'.

On a les deux d'' résolutions de Ω^p suivantes :

$$0 \to \Omega^p \to A^{p,0} \xrightarrow{d''} A^{p,1} \xrightarrow{d''} \cdots \to A^{p,n} \to 0$$

$$0 \to \Omega^p \to K^{p,0} \xrightarrow{d''} K^{p,1} \longrightarrow \cdots \to K^{p,n} \to 0 \quad .$$

Par les isomorphismes de Dolbeault, $H^q(X, \Omega^p)$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel d'homologie de la suite

$$A^{p,q-1}(X) \xrightarrow{d''} A^{p,q}(X) \xrightarrow{d''} A^{p,q+1}(X) \quad .$$

Lorsque l'application $A^{p,q-1}(X) \xrightarrow{d''} A^{p,q}(X)$ est d'image fermée, donc est un homomorphisme, on peut alors munir $H^q(X, \Omega^p)$ d'une topologie d'espace de Fréchet-Schwartz.

De même, $H_*^{n-q}(X, \Omega^{n-p})$ est canoniquement isomorphe à l'homologie de la suite

$$K_*^{n-p,n-q-1}(X) \xrightarrow{d''} K_*^{n-p,n-q}(X) \xrightarrow{d''} K_*^{n-p,n-q+1}(X)$$

lorsque l'application $K_*^{n-p,n-q}(X) \xrightarrow{d''} K_*^{n-p,n-q}(X)$ est d'image fermée donc lorsque d'' est un homomorphisme, on peut munir $H_*^{n-q}(X, \Omega^{n-p})$ d'une topologie d'espace du type dual de Fréchet-Schwartz.

Le théorème 2 de [8] donne :

PROPOSITION 4. - Soit X une variété analytique complexe dénombrable à l'infini, et de dimension complexe n. Supposons que les deux applications linéaires

$$A^{p,q-1}(X) \xrightarrow{d''} A^{p,q}(X) \xrightarrow{d''} A^{p,q+1}(X)$$

(respectivement $K_*^{n-p,n-q-1}(X) \xrightarrow{d''} K_*^{n-p,n-q}(X) \xrightarrow{d''} K_*^{n-p,n-q+1}(X)$)

soient des homomorphismes. Alors le dual fort de l'espace totalement réflexif $H^q(X\ ,\ \Omega^p)$ est canoniquement isomorphe à $H_*^{n-q}(X\ ,\ \Omega^{n-p})$.

Le lemme 2 de [8] se généralise en le lemme suivant.

LEMME 3. - Soit u une application linéaire continue d'un $(\mathcal{LF})L$ dans un Fréchet ou dual de Fréchet réflexif M . Si $u(L)$ est un sous-espace de codimension finie de M , l'application u est un homomorphisme.

Ce lemme s'applique en particulier lorsque L et M sont des duals de Fréchet-Schwartz.

LEMME 4. - Si la dimension de $H^q(X\ ,\ \Omega^p)$, (respectivement de $H_*^q(X\ ,\ \Omega^p)$)., est finie alors l'application

$$d'' : A^{p,q-1}(X) \to A^{p,q}(X) \quad \text{(respectivement} \quad d'' : K_*^{p,q-1}(X) \to K_*^{p,q}(X))$$

est un homomorphisme.

DÉMONSTRATION. - Il suffit, vu [8], de montrer la seconde partie. Soit $C_*^{p,q}(X)$, le noyau de $d'' : K_*^{p,q}(X) \to K_*^{p,q+1}(X)$. d'' étant continue, $C_*^{p,q}(X)$ est fermé, donc est un dual de Fréchet-Schwartz ; $d''(K_*^{p,q-1}(X))$ est de codimension finie dans $C_*^{p,q}(X)$ et on applique le lemme 3.

b. Calcul de la cohomologie du complémentaire d'un compact dans une variété de Stein. - $\mathcal{O}$ désigne le faisceau des germes de fonctions holomorphes. Si Y est une variété analytique complexe, un compact K de Y sera dit presque convexe si $H^i(K\ ;\ \mathcal{O}) = 0$ pour tout $i > 0$, et s'il admet un voisinage de Stein. Il en sera en particulier ainsi si K admet un système fondamental de voisinages de Stein.

Soit V un voisinage de Stein de K .

On a la suite exacte de cohomologie [2], théorème 4. 10. 1.

$$H_*^k(V - K\ ;\ \mathcal{O}) \to H_*^k(V\ ;\ \mathcal{O}) \to H_*^k(K\ ;\ \mathcal{O}) \to H_*^{k+1}(V - K\ ;\ \mathcal{O}) \qquad .$$

Par le théorème de dualité, on a

$$H^k_*(V\ ;\ \mathcal{O}) = 0 \qquad \text{si}\quad k \neq n \quad .$$

D'autre part, $H^k_*(K\ ;\ \mathcal{O}) = H^k(K\ ;\ \mathcal{O})$, donc $H^k_*(K\ ;\ \mathcal{O}) = 0$ si $k \neq 0$; $H^o(K\ ;\ \mathcal{O}) = H(K)$ où $H(K)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de K , espace qu'on munit de la topologie de la limite inductive des topologies usuelles des $H(W)$ où W parcourt la famille des voisinages de K . Finalement il vient, si $k \neq 1,n$,

$$0 \to H^k_*(V - K\ ;\ \mathcal{O}) \to 0 \qquad \text{d'où} \qquad H^k_*(V - K\ ;\ \mathcal{O}) = 0$$

puis, pour $k = 1$,

$$0 \to H(K) \to H^1_*(V - K\ ;\ \mathcal{O}) \to 0$$

et pour $k = n$

$$0 \to H^n_*(V - K\ ;\ \mathcal{O}) \to H^n_*(V\ ;\ \mathcal{O}) \to 0 \quad .$$

Il reste à vérifier que ces isomorphismes sont des isomorphismes vectoriels topologiques, donc d'abord qu'on peut mettre des topologies sur ces espaces.

Nous allons vérifier que $H^1_*(X - A\ ;\ \mathcal{O})$ et $H^{n-1}(X - A\ ,\ \Omega^n)$ sont deux espaces en dualité.

Examinons donc la suite :

$$K^{o,o}_*(X) \xrightarrow{d''_1} K^{o,1}_*(X) \xrightarrow{d''_2} K^{o,2}_*(X)$$

et sa transposée :

$$A^{n,n}(X) \xleftarrow{d''_1} A^{n,n-1}(X) \xleftarrow{d''_2} A^{n,n-2}(X) \quad ;$$

$d''_1 : A^{n,n-1}(X) \to A^{n,n}(X)$ est un homomorphisme, car $d''_1 = d$ (plus généralement $d'' : A^{p,n-1}(X) \to A^{p,n}(X)$ est surjectif d'après la théorie des équations elliptiques de MALGRANGE [6], donc est un homomorphisme).

$d''_2 : K^{o,1}_*(X) \to K^{o,2}_*(X)$ est un homomorphisme en vertu du lemme 4 puisque $H^2_*(V - K\ ;\ \mathcal{O})$ est nul.

En conséquence, on peut munir $H^1_*(X - A\ ;\ \mathcal{O})$ et $H^{n-1}(X - A\ ,\ \Omega^n)$ de topologies respectivement du type dual de Fréchet-Schwartz, et Fréchet-Schwartz et ces deux espaces sont duaux l'un de l'autre.

On vérifie aisément que $H^n_*(V - K ; \mathcal{O})$ admet une topologie et que l'application $H^n_*(V - K ; \mathcal{O}) \to H^n_*(V ; \mathcal{O})$ est continue. Donc ces deux derniers espaces sont isomorphes. En plus $H^n_*(V - K ; \mathcal{O})$ est naturellement en dualité avec $H^o(V - K ; \Omega^n)$.

Montrons que l'application $H(K) \xrightarrow{\partial} H^1_*(V - K ; \mathcal{O})$ est continue. Il suffit de vérifier la continuité pour les suites. Mais soient f l'élément de K, et W un voisinage de K dans V à frontière régulière sur l'adhérence duquel f est holomorphe. Soit f_W la distribution égale à f sur W, à zéro à l'extérieur. $d'' f_W$ est un élément de $K^{o,1}(V)$ dont le support est ∂W.

Son image dans $K^{o,1}_*(V - K)$ est un certain élément $\delta f \in K^{o,1}_*(V - k)$, δf est un courant d'' fermé, de support δW. La classe de cohomologie de δf est ∂f. Il est immédiat sur cette représentation que ∂ est continu de $H(K)$ dans $H^1_*(V - K ; \mathcal{O})$, et par le graphe fermé est donc un isomorphisme vectoriel topologique. La suite exacte de cohomologie relative s'écrit

$$0 = H^{n-1}(V , \Omega^n) \to H^{n-1}(V - K , \Omega^n) \to H^n_K(V , \Omega^n) \to H^n(V , \Omega^n) = 0 \quad ;$$

$H^n_K(V , \Omega^n)$ est donc isomorphe à $H^{n-1}(V - K , \Omega^n)$. On peut le munir de la topologie induite par cet isomorphisme, et alors il s'identifie au dual topologique de $H(K)$.

La suite exacte de cohomologie relative apparaît donc comme la suite duale de la suite exacte d'homologie entre V, $V - K$, K à supports compacts.

Ceci s'étend immédiatement au cas de Y compacte et X presque convexe dans Y.

Si ψ est une fonctionnelle analytique de support A, l'élément de $H^n_A(V , \Omega^n)$ associé sera dit <u>indicatrice de Sato</u> de la fonctionnelle, et l'élément de $H^{n-1}(X - A , \Omega^n)$ associé sera dit <u>indicatrice de Fantappié de</u> ψ. La raison de cette deuxième terminologie est la suivante : si A est un polycylindre $A = A_1 \times \dots \times A_n$ et si ψ est une fonctionnelle analytique à support dans A,

$$\langle \psi_z , \frac{1}{z_1 - u_1} , \frac{1}{z_2 - u_2} , \dots , \frac{1}{z_n - u_n} \rangle = \mathfrak{J}(\psi)\,(u_1 , \dots , u_2)$$

est une fonction holomorphe sur $CA_1 \times \dots \times CA_n$, nulle à l'infini, qu'on appelle habituellement indicatrice de Fantappié de ψ. Et justement, on peut identifier $H^{n-1}(X - A\ ;\ \mathcal{O})$ de façon naturelle à l'ensemble de ces fonctions ; (cf. FRENKEL, [1]).

THÉORÈME 2. - $H^n_M(\Omega^n)$ <u>est isomorphe au faisceau</u> $\mathcal{A}(M)$. La question se pose dans R^n. Il suffit de voir que les sections à support dans un compact A du faisceau $H^n_{R^n}(C^n, \Omega^n)$ sont juste les éléments de $H^n_A(C^n, \Omega^n)$. Mais, pour cela, il suffit de voir que pour tout ouvert U de C^n, $H^q_{R^n \cap U}(U\ ;\ \mathfrak{F}) = 0$ si $0 \leqslant q \leqslant n-1$ en vertu de (d), paragraphe 2, et ceci résulte des calculs de dualité précédents.

4. Image directe d'une fonctionnelle analytique et produit de composition.

Soient M et N, deux variétés analytiques réelles et $f : M \to N$ une application analytique de M dans N. Si K est un compact de M, f induit une application linéaire continue $f^* : H(f(K)) \to H(K)$. L'image d'un élément ψ de $H'(f(K))$ par la transposée de f^*, que nous noterons encore f, sera une fonctionnelle analytique de support inclus dans $f(K)$ que nous noterons $f(\psi)$. Plus généralement, si P est un fermé de M, et si la restriction de f à P est propre, si ψ est une fonctionnelle analytique à support dans M, on peut définir $f(\psi)$.

Soit σ_i un système localement fini de compacts de $f(P)$ recouvrant $f(P)$. $P \cap f^{-1}(\sigma_i)$ est un système localement fini de compacts recouvrant P. Il existe une décomposition de ψ sous la forme $\sum_i \psi_i$ où $\sigma(\psi_i) \subset P \cap f^{-1}(\sigma_i)$. On définira $f(\psi)$ par $\sum_i f(\psi_i)$ et il est clair que $f(\psi)$ ne dépend pas de la décomposition choisie.

Ceci permet de définir la produit de composition, par exemple sur R^n, de deux fonctionnelles analytiques dont les supports M_1 et M_2 sont tels que l'application diagonale

$$A : (x, y) \to (x + y)$$

soit propre sur $M_1 \times M_2$ (la définition du produit tensoriel est évidente).

BIBLIOGRAPHIE

[1] FRENKEL (Jean). - Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 135-220.

[2] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasb., 13).

[3] GRAUERT (H.). - On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 68, 1958, p. 460-472.

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur certains espaces de fonctions holomorphes, I, J. für reine und angew. Math., t. 192, 1953, p. 34-64.

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$, Summa brasil. Math., t. 3, 1954, p. 57-123.

[6] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955, p. 271-356.

[7] SATO (Mikio). - Theory of hyperfunctions, I et II, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, t. 8, 1959-1960, p. 139-193 et 387-437.

[8] SERRE (Jean-Pierre). - Un théorème de dualité, Comment. Math. Helvet., t. 29, 1955, p. 9-26.