ARNOLD SHAPIRO

Algèbres de Clifford et périodicité des groupes $\pi_k(BO)$

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. nº 215, p. 141-148

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__141_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 215

Février 1961

ALGÈBRES DE CLIFFORD ET PÉRIODICITÉ DES GROUPES $\pi_k(BO)$

par Arnold SHAPIRO

(d'après BOTT (R.) et SHAPIRO (A.) [3])

I. Modules de Clifford gradués

1. Notations.

Soient A un anneau commutatif, Q une forme quadratique sur le A-module E, $C(Q)$ l'algèbre de Clifford de Q, et ρ_Q l'application canonique de E dans $C(Q)$, (cf. BOURBAKI, [4], § 9). Rappelons que $C(Q)$ est caractérisée par la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Soit F une application linéaire de E dans une A-algèbre, D, telle que, pour tout $x \in E$, on ait $f(x)^2 = Q(x)$. Il existe un homomorphisme $\bar{f}$ et un seul de $C(Q)$ dans D, tel que $f = \bar{f} \circ \rho_Q$.

Soit α l'automorphisme principal de $C(Q)$, à savoir le seul qui satisfasse $\alpha\rho_Q(x) = \rho_Q(-x)$ pour tout $x \in E$.

Soient

$$C^0(Q) = C^0 = \{a \in C(Q) \mid \alpha(a) = a\}$$
$$C^1(Q) = C^1 = \{a \in C(Q) \mid \alpha(a) = -a\} \quad .$$

On a $C(Q) = C^0(Q) \oplus C^1(Q)$. (Somme directe de A-modules) et, pour p, $q \in Z_2$,

$$C^p . C^q \subset C^{p+q} \quad .$$

Un module M, (à gauche), sur $C(Q)$, muni d'une décomposition $M = M^0 \oplus M^1$ sur A, est appelé un module gradué sur $C(Q)$ si l'on a $C^p . M^q \subset M^{p+q}$ pour tout p, $q \in Z_2$.

2. Le produit tensoriel gradué.

Scient $C = C^0 \oplus C^1$, $D = D^0 \oplus D^1$, deux A-algèbres graduées sur Z_2. Il existe dans $C \otimes_A D$ une structure d'algèbre donnée, comme on sait, par la formule de multiplication :

$$(x \otimes y^p)(z^q \otimes w) = (-1)^{pq} (x z^q \otimes y^p w)$$

pour $x \in C$, $z^q \in C^q$, $y^p \in D^p$, $w \in D$. On notera cette algèbre par $C \hat{\ } D$.

Si on met, $(C \hat{\otimes} D)^0 = C^0 \otimes D^0 \oplus C^1 \otimes D^1$, et $(C \hat{\otimes} D)^1 = C^1 \otimes D^0 \oplus C^0 \otimes D^1$, l'algèbre $C \hat{\otimes} D$ devient une algèbre graduée sur Z_2.

PROPOSITION 2.1. - Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces supplémentaires et orthogonaux de E pour la forme Q, et si Q_i est la restriction de Q à E_i, $i = 1, 2$, alors l'application $\rho_{Q_1} \otimes 1 + 1 \otimes \rho_{Q_2}$ induit un isomorphisme de A-algèbres graduées de $C(Q)$ sur $C(Q_1) \hat{\otimes} C(Q_2)$.

Cela résulte de la proposition 1.

Si M est un module gradué sur C, et N un module gradué sur D, on a une structure de $(C \hat{\otimes} D)$-module gradué sur $M \otimes N$ (noté $M \hat{\otimes} N$), donnée par

$$(M \hat{\otimes} N)^0 = M^0 \otimes N^0 \oplus M^1 \otimes N^1$$

$$(M \hat{\otimes} N)^1 = M^1 \otimes N^0 \oplus M^0 \otimes N^1$$

$$(c \hat{\otimes} d^p)(m^q \hat{\otimes} n) = (-1)^{pq}\, cm^q \hat{\otimes} d^p n ,$$

pour $c \in C$, $d^p \in D^p$, $m^q \in M^q$, $n \in N$.

3. La forme négative.

Soit $E_1 = A$. La forme Q_1 sur E_1, définie par $Q_1(a) = -a^2$ pour tout $a \in A$, est appelée la forme négative sur E_1. Si Q est une forme sur E, on note par $Q + Q_1$ la forme "somme directe externe" sur $E + E_1$.

PROPOSITION 3.1. - Si $x_1 = \rho_{Q_1}(1)$, $1 \in E_1$, l'application

$$\varphi : E \to C(Q_1) \hat{\otimes} C(Q) \approx C(Q_1 + Q)$$

donnée par $\varphi(y) = x_1 \hat{\otimes} \rho_Q(y)$ induit un isomorphisme $\bar{\varphi}$ de l'algèbre (non graduée) $C(Q)$ sur l'algèbre $C^0_{Q_1+Q}$.

On applique encore une fois la proposition 1 pour faire la démonstration.

Si $M = M^0 \oplus M^1$ est un $C(Q_1 + Q)$-module gradué, on a une structure de $C(Q)$-module sur M^0 grâce à l'application φ. Cette correspondance entre le $C(Q_1 + Q)$-module gradué M et le $C(Q)$-module M^0 est évidemment fonctorielle. On note ce foncteur F_Q, et l'on a $F_Q(M) = M^0$. On va voir que ce foncteur est une équivalence. A cette fin, nous construisons le foncteur, F^1_Q, qui sera l'inverse du foncteur F_Q.

Pour chaque $C(Q)$-module M^0, soient $M = M^0 \oplus M^1$ où $M^1 = M^0$. On donne à M une structure de $(C_{Q_1} \hat{\otimes} C_Q)$-module gradué de la façon suivante :

$$(1 \otimes y)(m_1, m_2) = (-ym_2 - ym_1)$$
$$(x_1 \otimes 1)(m_1, m_2) = (-m_2, m_1)$$

pour $y \in \rho_Q(E)$, $x_1 = 1 \in E_1$. On vérifie que :

$$(1 \otimes y)^2 (m_1, m_2) = Q(y)(m_1, m_2)$$

$$[(1 \otimes y)(x_1 \otimes 1) + (x_1 \otimes 1)(1 \otimes y)] (m_1, m_2) = 0 \quad .$$

Alors ces formules nous donnent une structure de $C(Q_1 + Q)$-module sur M, et on vérifie facilement que c'est une structure de $C(Q_1 + Q)$-module gradué.

La correspondance $M^0 \to M = F_Q^1(M^0)$ est fonctorielle, et on voit que $F_Q\, F_Q^1(M^0)$ est isomorphe à M^0 et que $F_Q^1\, F_Q(M)$ est isomorphe à M. On a alors :

PROPOSITION 3.2. - <u>Il existe une correspondance biunivoque et fonctorielle entre les $C(Q)$-modules et les $C(Q + Q_1)$-modules gradués.</u>

Soients maintenant $E_n = E_1 \oplus \dots \oplus E_1$ (n fois), $Q_n = Q_1 + \dots + Q_1$ (n fois), et $C_n = C(Q_n)$. Il existe une base $x_1 \dots x_n$ évidente de E_n, tel que $Q_n(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = -\sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $a_i \in A$.

PROPOSITION 3.3. - $C(Q) \hat{\otimes} C_{4n} \approx C(Q) \otimes C_{4n}$.

L'application engendrée par

$$y \hat{\otimes} 1 \to y \otimes (x_1 \dots x_{4n})$$
$$1 \hat{\otimes} x_i \to 1 \otimes x_i$$

de $C(Q) \hat{\otimes} C_{4n}$ dans $C(Q) \otimes C_{4n}$ est l'isomorphisme cherché.

4. <u>Classification des algèbres</u> C_n.

Dès maintenant on suppose que A soit un corps de caractéristique $\neq 2$, et on distingue les trois cas suivants :

a. $\exists \ a \in A , \ a^2 = -1$.

b. La condition (a) n'est pas satisfaite, mais

$$\exists \ a, b, c \in A , \quad a^2 + b^2 + c^2 = -1 \quad .$$

c. Dans A , -1 n'est pas une somme de trois carrés.

Dans les cas (b) et (c), on pose $\underset{\sim}{C} = A(\sqrt{-1})$. Dans le cas (c) on appelle H le corps de quaternions sur A . Si K est un corps, soit $K(n)$ l'algèbre d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n sur K .

PROPOSITION 4.1. - <u>Dans tous les cas</u> $C_8 \approx A(16)$.

La forme Q_4 étant non-dégénérée, C_4 est une algèbre centrale simple ([4], § 9, n° 4). Comme algèbre de Clifford C_4 est isomorphe à son algèbre opposée, $\overline{C_4}$. La proposition 3.3 implique que $C_8 \approx C_4 \otimes C_4 \approx C_4 \otimes \overline{C_4}$. Mais le produit tensoriel d'une algèbre centrale simple avec l'algèbre opposée est toujours l'algèbre d'endomorphismes d'un espace vectoriel. Après avoir compté les dimensions, on a bien $C_8 \approx A(16)$.

Après avoir déterminé les algèbres C_k pour $k \leqslant 8$, la proposition 3.3 donnera les structures pour $k > 8$. On trouve assez de détails sur ce procédé dans BOURBAKI [4] ou CHEVALLEY [5]. Je ne les répète pas, mais je donne les résultats dans un tableau :

	a	b	c
C_1	$A(1) + A(1)$	$\underset{\sim}{C}(1)$	$\underset{\sim}{C}(1)$
C_2	$A(2)$	$A(2)$	$H(1)$
C_3	$A(2) + A(2)$	$A(2) + A(2)$	$H(1) + H(1)$
C_4	$A(4)$	$A(4)$	$H(2)$
C_5	$A(4) + A(4)$	$\underset{\sim}{C}(4)$	$\underset{\sim}{C}(4)$
C_6	$A(8)$	$A(8)$	$A(8)$
C_7	$A(8) + A(8)$	$A(8) + A(8)$	$A(8) + A(8)$
C_8	$A(16)$	$A(16)$	$A(16)$

En général, si $C_k = X(m)$, alors $C_{k+8} = X(16m)$

5. L'anneau des classes de modules.

Soit G_k le groupe des modules gradués sur C_k, c'est-à-dire que les générateurs de G_k sont les C_k-modules gradués de dimension finie, et les relations sont toutes les relations de la forme $A + B - (A \oplus B)$, où $(A \oplus B)$ est un module isomorphe à la somme directe de A et B, (les algèbres C_k étant semi-simples, on peut remplacer une suite exacte par une somme directe).

Le produit tensoriel gradué du paragraphe 2 induit un homomorphisme de $G_k \otimes G_\ell$ dans $G_{k+\ell}$.

Soit $G = \sum_{i=0}^{\infty} G_k$. Alors G est un anneau commutatif gradué. Les injections de E_k dans E_{k+1} induisent des homomorphismes (gradués) de C_k dans C_{k+1}, d'où on déduit, pour chaque k, une application de G_{k+1} dans G_k. Soit I_k l'image de cette application, et soit I la somme directe des I_k. On vérifie que I est un idéal de G. Le calcul de G_k/I_k est facile. Les résultats sont dans les trois cas :

	a	b	c
$k = 1$	0	Z_2	Z_2
$k = 2$	Z	0	Z_2
$k = 3$	0	0	0
$k = 4$	Z	Z	Z
$k = 5$	0	Z_2	0
$k = 6$	Z	0	0
$k = 7$	0	0	0
$k = 8$	Z	Z	Z

et

$$G_{k+8}/I_{k+8} \approx G_k/I_k \quad .$$

II. Les groupes d'homotopie de BO

Dans le cas des nombres réels (cas (c)), et dans le cas des nombres complexes (cas (a)), la liste des algèbres C_k montre une étroite liaison avec la liste des espaces utilisés par BOTT [2] pour le calcul des groupes d'homotopie de BU et de BO. Ces groupes d'homotopie sont exactement ce que l'on trouve dans la table du paragraphe 5. Ce n'est pas un accident. Pour cette partie on se bornera au cas où A est le corps des nombres réels. On va trouver un foncteur qui fait correspondre à chaque C_k-module gradué un élément de $\pi_k(BO)$, d'où on aura un homomorphisme d'anneaux de G sur $\pi_k(BO)$; (on se souvient que BO est muni d'une structure d'anneau à homotopie près) dont le noyau est I.

6. Construction d'un isomorphisme.

On identifiera E_n avec $\rho_{Q_n}(E_n)$ dans C_n. Il est évident que pour $x \in E_n$, $1 + x$ est inversible dans C_n^n. Pour tout élément inversible y de C_k et pour tout C_k-module gradué $M = M^0 \oplus M^1$, la variété linéaire yM^0 a même dimension que M^0 dans M. Si $\dim(M) = 2n$, on a donc une application φ des éléments inversibles de C_k dans la grassmannienne, $G_{2n,n}$, des n-plans d'un 2n-plan. En particulier, l'application $\psi(x) = \varphi(1 + x)$ qui envoie E_k dans $G_{2n,n}$ peut être étendue, comme il est facile de le voir, au point à l'infini ∞ par $\psi(\infty) = M^1$. On a alors une application de S^k dans $G_{2n,n}$ d'où un élément de $\pi_k(G_{2n,n})$.

L'injection de $G_{2n,n}$ dans BO donne finalement, pour chaque C_k-module gradué M, un élément $\gamma(M)$ de $\pi_k(BO)$.

On a les faits suivants à démontrer :

A. γ induit un homomorphisme de groupes additifs, Γ, de G dans $\pi_k(BO)$.

B. L'idéal I est dans le noyau de Γ.

C. Γ respecte les structures multiplicatives.

D. $\Gamma_k : G_k/I_k \to \pi_k(BO)$ est un isomorphisme pour $k \leq 8$.

On aura alors démontré que Γ envoie G sur $\pi_k(BO)$ avec noyau I puisque d'après BOTT [1], la multiplication par le générateur de $\pi_8(BO)$ est un isomorphisme de $\pi_k(BO)$ sur $\pi_{k+8}(BO)$, et que la même chose vaut pour G/I.

L'énoncé A est une conséquence du fait que l'addition dans $\pi_k(BO)$ provient de l'application

$$\mu : G_{2n,n} \times G_{2n,n} \to G_{4n,2n}$$

définie comme ceci :

Si $V_i \subset E_i$, $i = 1 , 2$, dimension $(V_i) = n$, dimension $(E_i) = 2n$

$$\mu(V_1 , V_2) = V_1 \oplus V_2 \text{ dans } E_1 \oplus E_2 \quad .$$

On vérifie alors que

$$\gamma(M_1) + \gamma(M_2) = \gamma(M_1 \oplus M_2) \quad .$$

L'énoncé B est encore plus simple. Un élément de I est représenté par un C_k-module gradué M qui admet une structure de (C_{k+1})-module gradué, compatible avec l'inclusion de C_k dans C_{k+1} (induit par l'inclusion de E_k dans E_{k+1}). Si M' est le module M muni d'une structure de (C_{k+1})-module gradué, on peut représenter $\gamma(M')$ par une sphère dont l'équateur représente $\gamma(M)$. Donc $\gamma(M)$ est nomotope à zéro.

Pour l'énoncé C je ne donne pas de détails. On utilise une déformation tout à fait analogue à celle de BOTT [1, § 5] pour démontrer que les applications $(x , y) \to \psi(x) \hat{\otimes} \psi(y)$ et $(x , y) \to \psi(x , y)$ sont homotopes.

Pour D , on n'a rien à démontrer sauf si $k = 1 , 2 , 4 , 8$. Pour ces valeurs de k les générateurs de $\pi_{k-1}(O) \approx \pi_k(BO)$ proviennent des sections de O_k sur S^{k-1} qui montrent que ces sphères sont parallélisables. Dans le prochain paragraphe on va voir comment ces sections entrent en jeu. Après cela, il est facile de vérifier l'énoncé D .

7. Champs de repères sur les sphères.

Soient $\overline{E_k}$ le sous-espace vectoriel de C_{k-1} engendré par 1 et E_{k-1} , M un espace euclidien, et m une application linéaire $m : \overline{E_k} \otimes M \to M$ telle que $m(1 \otimes x) = x$ pour tout $x \in M$. Le lemme suivant est un exercice.

LEMME 7.1. - <u>L'application</u> m <u>peut être étendue à</u> $C_{k-1} \otimes M$ <u>de telle facon que</u> M <u>devienne un</u> (C_{k-1})-<u>module si et seulement si</u> (1) $\|m(x \otimes y)\| = \|x\| \cdot \|y\|$, <u>pour tout</u> $x \in \overline{E_k}$, $y \in M$. <u>Dans ce cas, pour tout</u> $y \in M$ <u>tel que</u> $\|y\| = 1$, <u>et pour toute base</u> $x_1 , \dots , x_{k-1}$ <u>orthonormale de</u> E_{k-1} , <u>les vecteurs</u> $m(x_i \otimes y)$ <u>forment un</u> $k - 1$ <u>repère normal à</u> y .

En d'autres termes la sphère S^{n-1} admet un $(k - 1)$-champ tangent si E_n admet une structure de (C_{k-1})-module. Supposons que ce soit le cas et que

(1) Pour $x = \alpha + y$, $x \in \overline{E_k}$, $y \in E_{k-1}$, on pose $\|x\| = (\alpha^2 - Q_{k-1}(y))^{1/2}$

$V_{n,k}$ soit la variété de Stiefel des k-repères dans E_n. A partir de l'application $m : \overline{E_k} \otimes E_n \to E_n$ on obtient d'une part un élément a de $\pi_{n-1}(V_{n,k})$ qui représente le $(k-1)$-champ sur S^{n-1} et d'autre part, en renversant les rôles de $\overline{E_k}$ et E_n dans le produit tensoriel, un élément, b, de $\pi_{k-1}(O_n)$ (O_n est le groupe orthogonal de F_n). On trouve les relations suivantes, entre a et b :

Si E_n est somme directe de r sous-(C_{k-1})-modules irréductibles, alors b est r fois un générateur.

Soient $J : \pi_{k-1}(O_n) \to \pi_{n+k-1}(S^n)$ l'homomorphisme de Hopf, $\sigma : \pi_{n-2}(S^{n-k-1}) \to \pi_{n+k-1}(S^n)$ la suspension itérée et $\partial : \pi_{n-1}(V_{n,k}) \to \pi_{n-2}(S^{n-k-1})$ le bord pour la fibration évidente.

Après avoir regardé quelques espaces fibrés, on voit que $\sigma\partial(a) = J(b)$. L'intérêt de cette formule se trouve dans le fait que $\partial(a)$ est l'obstruction à étendre le $k-1$-champ donné en un k-champ, et que σ est un isomorphisme pour $n \geqslant 2k$ (ce qui se produit si $k > 8$ et si m existe).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOTT (Raoul). - Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 293-310.

[2] BOTT (Raoul). - The stable homotopy of the classical groups, Annals of Math., Series 2, t. 70, 1959, p. 313-337.

[3] BOTT (Raoul), et SHAPIRO (A.). - Travaux secrets.

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chapitre 9. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1272 ; Eléments de Mathématique, 24).

[5] CHEVALLEY (Claude). - The algebraic theory of spinors. - New York, Columbia University Press, 1954 (Columbia bicentennial Editions and Studies).