SERGE LANG

L'équivalence homotopique tangentielle

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. nº 222, p. 277-286
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__277_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 222

Mai 1961

L'ÉQUIVALENCE HOMOTOPIQUE TANGENTIELLE

par Serge LANG

Ce qui suit constitue une partie d'un article, en cours de publication, de MAZUR.

1. Énoncé du résultat.

Par "variété", nous entendrons toujours une variété C^∞, qui peut avoir un bord. Le fait que le bord ∂M d'une variété M possède un voisinage (sous-variété) dans M, isomorphe à $\partial M \times I$ (I l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$) fait partie de la définition de variété. Un tel voisinage sera appelé un collier. On peut identifier ∂M avec $\partial M \times 1$.

On note $T(M)$ le fibré tangent.

Si X est un espace topologique, on note $K(X)$ $(= \widetilde{KO}(X))$ le groupe de Grothendieck des classes de fibrés vectoriels. Si $\varphi : X \to Y$ est continue, alors on a un homomorphisme contravariant

$$\varphi^K : K(Y) \longrightarrow K(X)$$

(quelquefois noté $\varphi^!$ par des gens non-fonctorisés). Si X est une variété, on note $\tau(X)$ la classe dans $K(X)$ de $T(X)$.

Les mots "morphismes", "isomorphismes" appliqués à des applications d'espaces voudront toujours dire des applications C^∞. S'il s'agit d'applications simplement continues, on le précisera. Un morphisme de fibré vectoriel est donc un morphisme dans la catégorie de fibrés vectoriels au-dessus d'espaces topologiques, qui en plus est C^∞.

Soient X, Y des variétés, et $\varphi : X \to Y$ une application continue. On dira que φ est une équivalence homotopique tangentielle (stable) si c'est une équivalence homotopique (et donc φ^K est un isomorphisme) telle que

$$\varphi^K \tau(Y) = \tau(X) .$$

Comme on peut approximer une application continue par un morphisme dans la même classe d'homotopie, on supposera à partir de maintenant que φ est différentiable.

Le résultat principal que nous avons en vue est le suivant :

THÉORÈME 1. - Soient M, M_1 deux variétés compactes sans bords. Soient (E, π, M) et (E_1, π_1, M_1) deux k-fibrés vectoriels (différentiables) avec $\dim M = \dim M_1 = n$ et $k \geq n + 2$. Soit $\varphi : E \to E_1$ une équivalence homotopique tangentielle. Alors il existe un isomorphisme de E sur E_1 dans la même classe d'homotopie que φ.

La démonstration est contenue dans les numéros suivants. Nous donnons immédiatement un corollaire frappant.

COROLLAIRE. - Soient M, M_1 des variétés compactes sans bords de dimension n. Soit $f : M \to M_1$ une équivalence homotopique tangentielle, et $k \geq n + 2$. Alors il existe un isomorphisme entre $M \times R^k$ et $M_1 \times R^k$ dans la même classe d'homotopie que $f \times \mathrm{id}$.

En effet, il suffit d'étendre f à une application de $M \times R^k$ dans $M_1 \times R^k$ par l'identité sur R^k, de sorte qu'on peut appliquer le théorème.

Remarquons que la réciproque du corollaire est triviale.

La marche de la démonstration est la suivante. Dans le paragraphe 1, on rappelle quelques propriétés des fibrés vectoriels. Au paragraphe 2, on décrit une méthode montrant que deux variétés sont isomorphes, par un procédé infini. Cette méthode sera ensuite appliquée au fibré de boules associé à un fibré vectoriel (cell bundle). Rappelons que si E est fibré vectoriel au-dessus de M, qu'on donne à E une métrique riemannienne, et que r est réel > 0, alors on note par $E(r)$ les vecteurs de longueur $\leq r$. C'est un fibré de boules (fermées) sur M. Son intérieur (i. e. le complément de son bord) est isomorphe à E par une projection radiale homotopique à l'identité. Pour démontrer que E et E_1 sont isomorphes, il suffira donc de montrer que l'on a un isomorphisme $\varphi(r)$ entre les intérieurs de $E(r)$ et $E_1(r)$ tel que la composition d'applications

$$E \approx \mathrm{Int}\, E(r) \xrightarrow{\varphi(r)} \mathrm{Int}\, E_1(r) \approx E_1$$

soit homotope à φ.

Pour cela nous définissons la notion de plongement intérieur ouvert. C'est un morphisme $f : M \to M'$ de variétés, satisfaisant aux conditions :

a. C'est un plongement fermé.

b. $f(M)$ est contenu dans l'intérieur de M'.

c. f(intérieur de M) est ouvert dans M'.

(Attention : Si le bord de M n'est pas vide, l'identité n'est pas un tel plongement.)

Nous démontrerons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - *Soient $f : E(r) \to E_1(r)$ et $g : E_1(r) \to E(r)$ deux plongements intérieurement ouverts, qui sont des inverses homotopiques. Alors il existe un isomorphisme*

$$f^o : \operatorname{Int} E(r) \to \operatorname{Int} E_1(r)$$

tel que si $i : M \to E(r)$ est la section 0, alors $f^o i$ est dans la même classe d'homotopie que fi.

Le théorème 1 sera démontré quand nous aurons montré l'existence de nos morphismes f, g, qui résulteront du paragraphe 2.

2. L'équivalence homotopique tangentielle.

Nous supposons connu le critère suivant.

PROPOSITION 1. - *Soient X^n une variété, et E, E' deux k-fibrés vectoriels sur X avec $k \geqslant n+2$. Notons $x(E)$ la classe de E dans $K(X)$. Si $x(E)=x(E')$, alors il existe un isomorphisme de fibrés entre E et E'.*

En outre, il résulte pratiquement de la définition du fibré tangent et du foncteur que si E est fibré vectoriel sur X, alors on a un isomorphisme

$$T(E) \simeq \pi^* E \oplus \pi^* T(M)$$

où l'on désigne par π^* le pull-back des fibrés sur M aux fibrés sur E. On a donc

$$\tau(E) = \pi^K x(E) + \pi^K \tau(M) \quad .$$

PROPOSITION 2. - *Soient M, M_1 deux variétés compactes sans bord. Soient (E, π, M) et (E_1, π_1, M_1) deux k-fibrés vectoriels, $\dim M = \dim M_1 = n$ et $k \geqslant n+2$. Soit $\varphi : E \to E_1$ un morphisme qui soit une équivalence homotopique tangentielle. Alors il existe un plongement (différentiable) $f : M \to E_1$ homotopique à φi (i = section 0 du fibré) et le fibré normal $N(f)$ est isomorphe à E.*

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, shift right, "\pi"'] & E_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
M \arrow[u, shift right, "i"'] \arrow[ur, "f"] & M_1
\end{tikzcd}
$$

DÉMONSTRATION. - Dans le groupe $K(E)$ on applique i^K à la relation précédant notre énoncé. Comme $f^K = i^K \varphi^K$, on trouve

$$f^K \tau(E_1) = i^K \varphi^K \tau(E_1) = i^K \tau(E) = i^K \pi^K \varkappa(E) + i^K \pi^K \tau(M)$$

et comme $\pi i = 1$, on voit que

$$f^K \tau(E_1) = \varkappa(E) + \tau(M) \quad .$$

Mais si $\nu(f)$ désigne la classe de $N(f)$ dans $K(M)$, on a

$$\nu(f) + \tau(M) = f^K \tau(E_1) \quad .$$

De là on tire $\nu(f) = \varkappa(E)$, et on applique la proposition 1 pour terminer la démonstration.

COROLLAIRE. - *Les hypothèses étant comme dans la proposition 2, supposons que E ait une métrique riemannienne. Il existe un nombre $r > 0$ et deux plongements intérieurement ouverts $g : E(r) \to E_1(r)$ et $g_1 : E_1(r) \to E(r)$ qui sont des inverses homotopiques tels que gi soit dans la classe d'homotopie de f.*

DÉMONSTRATION. - On a un plongement de $E(r)$ dans E_1 pour r suffisament petit. Comme $E(r)$ est compact, son image est contenue dans un $E_1(r_1)$ pour r_1

petit > 0 , et, en fait dans son intérieur. Mais $E_1(r_1)$ est isomorphe à $E(r)$ par projection radiale. Cela démontre notre assertion.

3. Mobilité.

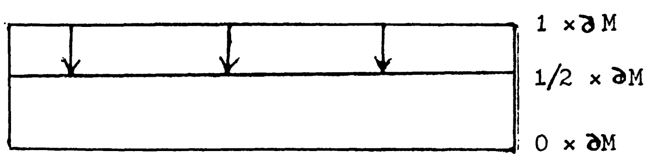
Soient X une variété et $\varphi : X \to X$ un plongement intérieurement ouvert. On dit que X est φ-mobile si, pour tout plongement intérieurement ouvert $\omega : X \to X$ homotope à φ , $(\varphi \sim \omega)$ et tout automorphisme α de X homotope à 1 , il existe un automorphisme β de X homotope à 1 tel que le diagramme soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & X \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\omega"'] & X \end{tikzcd} .$$

On peut aussi introduire une notion d'équivalence entre plongements intérieurement ouverts : $\varphi \equiv \omega$ s'il existe $\beta \sim 1$ tel que $\beta\varphi = \omega$. Si $\alpha \sim 1$, alors $\varphi \equiv \omega$ si et seulement si $\varphi \equiv \omega\alpha$.

On dit que X est mobile, s'il est φ-mobile pour un plongement intérieurement ouvert $\varphi : X \to X$ homotope à l'identité, et donc pour tout φ de cette nature.

REMARQUE. - On peut se servir du collier autour du bord d'une variété M pour trouver de façon évidente un plongement intérieurement ouvert $\sigma : M \to M$ homotope à 1 , qui compresse M en elle-même près du bord Par exemple, soit $\lambda : I \to [0,1/2]$ un isomorphisme monotone décroissant, appliquant 1 sur $1/2$, égal à l'identité sur $[0 , \varepsilon]$ et ayant des dérivées convenables en 1 et $1/2$. On étend λ au collier pour trouver σ . Petit dessin :



Supposons donnée une suite de plongements intérieurement ouverts :

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to \cdots$$

La limite injective M des M_i est un espace topologique sur lequel on peut définir de manière évidente une structure de variété. Si X , Y sont deux variétés, et

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$$

sont deux plongements intérieurement ouverts, on note $L(f , g)$ la limite injective de la suite $(f , g , f , g , \ldots)$, et si $f = g$, on la note $L(f)$. On a trivialement la relation :

$$L(f , g) = L(g , f) = L(g \circ f) \quad .$$

THÉORÈME 3. - Soient X une variété, et $f : X \to X$ un plongement intérieurement ouvert, homotope à l'identité. Supposons que X soit mobile. Alors $L(f)$ est isomorphe à l'intérieur de X , par un isomorphisme homotope à l'identité.

Avant de commencer la démonstration, nous donnons un corollaire.

COROLLAIRE. - Soient X , Y deux variétés, $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux plongements intérieurement ouverts, qui soient des inverses homotopiques. Supposons que X , Y soient mobiles. Alors il existe un isomorphisme de $\mathrm{Int}(X)$ sur $\mathrm{Int}(Y)$ dans la classe d'homotopie de f .

C'est une conséquence immédiate de la relation $L(g \circ f) \approx L(f \circ g)$.

Nous aurons donc atteint notre but principal une fois démontré que le fibré de boules $E(r)$ est mobile, ce qui sera fait au paragraphe 4. Nous passons maintenant à la démonstration du théorème 3.

Nous verrons plus bas que notre assertion est valable pour le cas particulier où $f = \sigma$ (décrit dans la remarque ci-dessus). Ce cas implique le cas général. En effet, si on commence avec l'automorphisme α_1 = identité, on a, par récurrence, une suite d'automorphismes $\alpha_2 , \alpha_3 , \ldots \sim 1$ tels que le diagramme soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"'] & {} \\
X \arrow[r, "\sigma"'] & X \arrow[r, "\sigma"'] & X \arrow[r] & {}
\end{tikzcd} \quad .$$

Il s'en suit que la limite inductive $L(f)$ est isomorphe à $L(\sigma)$ par un isomorphisme homotope à 1 .

Traitons maintenant le cas particulier. Etant donné le collier autour du bord, on a une suite de sous-variétés

$$X_{1-(1/2)} \longrightarrow X_{1-(1/4)} \longrightarrow X_{1-(1/8)} \rightarrow \cdots$$

les flèches étant des inclusions. Notre σ induit un isomorphisme

$$\sigma_1 : X \rightarrow X_{1/2} = X_{1-(1/2)} \quad .$$

Nous allons construire par récurrence des isomorphismes

$$\sigma_n : X \rightarrow X_{1-(1/2^n)}$$

qui rendent le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\sigma_n"'] & X \arrow[d, "\sigma_{n+1}"] \\
X_{1-(1/2^n)} \arrow[r] & X_{1-(1/2^{n+1})}
\end{tikzcd}$$

l'application du bas étant une inclusion. On factorise le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "\sigma_n"'] & X_{1/2} \arrow[r, "\subset"] \arrow[dl] & X \\ X_{1-(1/2^n)} \arrow[rr] & & X_{1-(1/2^{n+1})} \end{tikzcd} .$$

Comme σ_1 est un isomorphisme, on obtient un isomorphisme entre $X_{1/2}$ et $X_{1-(1/2^n)}$. Pour terminer la démonstration, il suffit de compléter le carré :

$$\begin{tikzcd} X_{1/2} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\sigma_n \sigma_1^{-1}"'] & X \\ X_{1-(1/2^n)} \arrow[r] & X_{1-(1/2^{n+1})} \end{tikzcd}$$

ce qui peut être fait par une rétraction convenable.

4. <u>Fibré de boules.</u>

Compte tenu du résultat du dernier numéro, la démonstration du théorème 2 sera achevée si nous démontrons que la mobilité s'applique aux fibrés de boules, autrement dit :

THÉORÈME 4. - *Soit M^n une variété compacte, sans bord. Soit E un k-fibré vectoriel sur M, avec $k \geq n + 2$. Supposons que E ait une métrique riemannienne, et soit $E(r)$, pour $r > 0$, le fibré de boules des vecteurs de longueur $\leq r$. Alors $E(r)$ est mobile.*

DÉMONSTRATION. - Soient φ, ω des plongements intérieurement ouverts de $E(r)$ dans lui-même qui soient homotopes. On doit trouver un automorphisme $\beta \sim 1$ de $E(r)$ rendant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} E(r) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\omega"'] & E(r) \arrow[d, "\beta"] \\ & E(r) \end{tikzcd} .$$

Nous emploierons successivement trois lemmes dus respectivement à WHITNEY et THOM, qui appartiennent aux fondements de la topologie différentielle et qui se trouveront dans n'importe quel fondement quand il en existera.

LEMME 1. - Soient W une variété compacte, V une variété sans bord et $f, g : W \to V$ deux plongements homotopes. Si $\dim V \geq 2.\dim W + 2$, alors ils sont isotopes, c'est-à-dire qu'il existe un chemin $h_t : W \to V$ de plongements $(0 \leq t \leq 1)$ tel que $h_0 = f$ et $h_1 = g$.

LEMME 2. - Soient W, V, f, g comme ci-dessus. Si f, g sont isotopes et h_t une isotopie, alors il existe une isotopie H_t d'automorphismes de V telle que $H_0 = 1$, et $H_t f = h_t$.

Notons $i : M \to E(r)$ la section 0. On peut appliquer les deux lemmes aux plongements φi et ωi car $\dim E(r) \geq 2n + 2$. On trouve en particulier qu'il existe un automorphisme ξ de $E(r)$, homotope à 1, tel que $\xi\varphi i = \omega i$. Il suffit donc de démontrer notre assertion avec $\xi\varphi$ et ω au lieu de φ et ω. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\varphi i = \omega i$.

Nous sommes donc amenés à considérer le diagramme exact :

$$M \xrightarrow{i} E(r) \underset{\omega}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} E(r)$$

avec $\varphi i = \omega i$. Nous employons alors le troisième lemme, à savoir :

LEMME 3. - Soient $\varphi, \omega : E(r) \to E(r)$ deux plongements intérieurement ouverts, tels que $\varphi i = \omega i = i$. Alors il existe un automorphisme β de $E(r)$ homotope à 1, et un autoporphisme de fibré de boules λ tels que le diagramme soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} E(r) & \xrightarrow{\varphi} & E(r) \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \beta \\ E(r) & \xrightarrow[\omega]{} & E(r) \end{array}$$

(C'est ce qu'on appelle l'unicité des voisinages tubulaires).

Dans le cas qui nous occupe, par transitivité, nous aurions pu supposer dès le début que l'une de nos applications, soit φ , est égale à une homothétie, multiplication d'un vecteur par un nombre > 0 , mettons $1/2$. Dans ce cas, λ^{-1} et φ commutent, et de la commutativité $\omega\lambda = \beta\varphi$ on tire $\omega = \beta\varphi\lambda^{-1} = (\beta\lambda^{-1})\varphi$. L'automorphisme $\beta\lambda^{-1}$ est l'automorphisme dont il fallait démontrer l'existence.