MICHEL A. KERVAIRE

Le problème de Poincaré en dimensions élevées

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. n° 208, p. 41-51

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__41_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 208

Décembre 1960

LE PROBLÈME DE POINCARÉ EN DIMENSIONS ÉLEVÉES

par Michel A. KERVAIRE

(d'après J. STALLINGS)

On sait que le problème de Poincaré est celui de décider si une variété fermée M^3, simplement connexe, de dimension 3, est ou non homéomorphe à la sphère S^3. Le "problème de Poincaré" mentionné dans le titre est la généralisation de ce problème aux variétés de dimensions arbitraires : toute variété fermée M^n ayant le type d'homotopie de la sphère S^n est-elle ou non homéomorphe à S^n ? (En dimension 3, une variété fermée M^3 a le type d'homotopie de S^3 si et seulement si elle est simplement connexe).

J. STALLINGS [8] démontre le théorème suivant :

THÉORÈME. - <u>Si</u> M^n, <u>fermée, du type d'homotopie de</u> S^n, <u>admet une structure de variété combinatoire, et si</u> n <u>est assez grand, alors</u> M^n <u>est homéomorphe à</u> S^n.

Cet exposé est consacré à une esquisse de la démonstration de J. STALLINGS pour $n = 9$ et $n \geq 11$, avec quelques indications sur les modifications à apporter lorsque $n = 7$ et $n = 10$ (On verra que les cas $n = 2r - 1$ et $n = 2(r + 1)$ présentent le "même ordre" de difficulté). J. STALLINGS a affirmé que sa méthode pouvait être utilisée pour démontrer l'homéomorphisme $M^n \approx S^n$ dès que $n \geq 5$, mais j'ignore le procédé employé en dimensions 5, 6 et 8 (Dans les "Notices" de l'American mathematical Society, tome 7, 1960, n° 7, p. 725, abstract 573-11, M. L. CURTIS attribue à E. C. ZEEMAN le résultat pour $n = 5, 6$).

REMARQUE. - Comme toute variété différentiable peut être munie d'une structure combinatoire (cf. J. H. C. WHITEHEAD [10], theorem 7), le théorème ci-dessus est encore valable sous l'hypothèse que M^n soit une variété différentiable. Sous cette forme, le théorème a également été démontré par S. SMALE (l'article [7] ne contient pas de démonstrations, mais S. SMALE a fait paraître récemment des notes miméographiées contenant le détail de ses raisonnements).

1. <u>Préliminaires</u>.

Soient K_1 et K_2 des complexes simpliciaux. (A l'exception de la triangulation de $\underset{\sim}{R}^{n+1}$ introduite dans la démonstration du corollaire 2, tous les complexes simpliciaux considérés seront finis). Une application $f : K_1 \to K_2$ sera dite rectilinéaire si f envoie tout simplexe de K_1 linéairement dans un simplexe de K_2. Si les espaces de K' et K sont identiques, et si l'identité $i : K' \to K$ est une application rectilinéaire, on dit que K' est une subdivision (rectilinéaire) de K. On démontre que deux subdivisions K' et K'' d'un même complexe K ont des subdivisions égales (Cf. J. W. ALEXANDER [1], theorem [15 : 1]).

Une application $f : K_1 \to K_2$ sera dite semi-linéaire s'il existe une subdivision K_1' de K_1 telle que l'application induite $f' : K_1' \to K_2$ soit rectilinéaire. La composition de deux applications semi-linéaires est semi-linéaire en vertu de la remarque qui précède. D'autre part, l'inverse d'un homéomorphisme semi-linéaire est semi-linéaire. On obtient ainsi une relation d'équivalence : deux complexes K_1 et K_2 sont dits combinatoirement équivalents s'il existe un homéomorphisme semi-linéaire de K_1 sur K_2. Un complexe combinatoirement équivalent au n-simplexe sera appelé un n-élément. Un complexe combinatoirement équivalent au bord S^{n-1} du n-simplexe Δ^n sera appelé une $(n - 1)$-sphère combinatoire (le bord de Δ^n est le complexe formé de toutes les faces de Δ^n sauf Δ^n lui-même).

Soient K un complexe et A un simplexe de K. L'étoile de A dans K, notée $St(A , K)$, est le sous-complexe de K formé des simplexes (de K) contenant A et de leurs faces. L'ensemble des simplexes de $St(A , K)$ qui ne rencontrent pas A est un sous-complexe de $St(A , K)$, noté K_A ou $Lk(A , K)$, appelé le complément de A dans K.

Un complexe M est une variété combinatoire de dimension n, si pour tout sommet $a \in M$, le complément M_a de a dans M est un $(n - 1)$-élément ou une $(n - 1)$-sphère combinatoire. La variété M est fermée si, pour tout sommet a de M, le complément M_a est combinatoirement équivalent à S^{n-1}.

THÉORÈME de J. Stallings. - Si M^n est une variété combinatoire fermée du type d'homotopie de S^n, il existe une subdivision M' de M et deux sous-complexes $E , E^* \subset M'$ tels que E et E^* soient des n-éléments et

$$M = \operatorname{int} E \cup \operatorname{int} E^* ,$$

pourvu que n soit assez grand ($n = 9$ ou $n \geq 11$ dans la démonstration ci-dessous, le théorème restant valable pour $n \geq 5$ d'après les affirmations de J. STALLINGS).

Comme E et E^* sont homéomorphes au disque de dimension n , l'homéomorphie $M^n \approx S^n$ découle alors du théorème de M. Brown (Cf. [2] et l'exposé de A. DOUADY [3] à ce même séminaire).

COROLLAIRE 1. - <u>Sous les mêmes hypothèses sur</u> n <u>que dans le théorème de Stallings, toute variété combinatoire fermée</u> M^n <u>du type d'homotopie de</u> S^n <u>peut être semi-linéairement plongée dans</u> R^{n+1} .

Pour n pair, ce résultat était connu (cf. [6], theorem (1.6)).

En effet, E peut être semi-linéairement plongé sur $\Delta^n \subset R^n \subset R^{n+1}$. Soit $Q \subset \Delta^n$ l'image de l'adhérence (combinatoire) de $M' - E^*$ par ce plongement. Soit $Q^\bullet$ le bord de Q . La réunion $Q \cup C(Q^\bullet)$ de Q et du cône sur son bord est un complexe combinatoirement équivalent à M . Si l'on réalise ce cône dans R^{n+1} avec pour sommet un point $c \in R^{n+1} - R^n$, on obtient le plongement désiré.

Si M_1^n et M_2^n sont deux variétés combinatoires fermées du type d'homotopie de S^n , leur <u>somme connexe</u> est définie comme suit : on prend deux éléments plongés $E_1^n \subset M_1^n$ et $E_2^n \subset M_2^n$, de bord S_1^n et S_2^n respectivement. On obtient $M_1^n + M_2^n$ à partir de la réunion disjointe de $C\ell(M_1 - E_1)$ et $C\ell(M_2 - E_2)$ en identifiant S_1^n et S_2^n par une équivalence combinatoire. ($C\ell(M_i - E_i)$ est l'adhérence combinatoire de $M_i - E_i$. Ici, $C\ell(M_i - E_i) = (M_i - E_i) \cup S_i)$. On voit facilement que la classe d'équivalence combinatoire de $M_1 + M_2$ ne dépend que des classes d'équivalence combinatoire de M_1 et M_2 .

Muni de cette opération, l'ensemble Σ^n des classes d'équivalence de variétés combinatoires fermées du type d'homotopie de S^n forme un monoïde abélien (associatif). L'élément neutre est représenté par S^n , le bord du $(n + 1)$-simplexe.

COROLLAIRE 2. - Σ^n <u>est un groupe</u>.

Il suffit de montrer l'existence d'un inverse. Soit M^n une variété combinatoire représentant un élément de Σ^n . On a vu (corollaire 1) que M^n est combinatoirement équivalente à $Q \cup C(Q^\bullet)$ plongée dans R^{n+1} (notations du corollaire 1). Soit R_T^{n+1} une subdivision de R^{n+1} telle que $Q \cup C(Q^\bullet)$ soit un sous-complexe de R_T^{n+1} . Soit c le sommet du cône $C(Q^\bullet)$. Le complément $Lk(c , R_T^{n+1})$ est une n-sphère combinatoire (la projection radiale de centre c établit un homéomorphisme semi-linéaire de $Lk(c , R_T^{n+1})$ sur le bord d'un $(n + 1)$-simplexe de R^{n+1} de barycentre c) . On a $Q \subset Lk(c , R_T^{n+1})$. Soit Q' l'adhérence combinatoire de

$Lk(c, R_T^{n+1}) - Q$. Puisque $Q^\bullet = (Q')^\bullet$ est une $(n-1)$-sphère combinatoire, $M' = Q' \cup C((Q')^\bullet)$ est une n-variété combinatoire fermée, et $Lk(c, R_T^{n+1})$ est combinatoirement équivalente à $M + M'$. Donc M' représente un inverse du représentant de M dans Σ^n .

D'autres conséquences (sur le plongement rectilinéaire de variétés combinatoires) sont discutées dans [6].

2. Le théorème de Whitehead.

La démonstration du théorème de Stallings est basée sur un théorème auxiliaire dû à J. H. C. WHITEHEAD que nous discutons tout d'abord.

Soient L un complexe et E^r un r-élément. Supposons que $L \cap E^r$ soit un $(r-1)$-élément. Le passage de $K = L \cup E^r$ à L s'appelle alors une réduction élémentaire. Si l'on passe d'un complexe K à un sous-complexe L par une suite finie de réductions élémentaires, on dit que K est réductible à L . Un complexe K est (complètement) réductible s'il est réductible à l'un de ses sommets. Comme toute subdivision d'un r-élément est un r-élément, la réductibilité d'un complexe est invariante par subdivisions.

Le voisinage canonique $N(K, M)$ d'un sous-complexe K de M est le complexe formé des simplexes de M qui rencontrent K et de leurs faces.

Rappelons que la subdivision barycentrique de M modulo un sous-complexe K , notée $s_K(M)$, est le complexe, ensemble de tous les simplexes de la forme

$$(a_0, \dots, a_p, s_1, \dots, s_q) ,$$

où $a_0, \dots, a_p$ sont les sommets d'un simplexe $A \in K$ et $s_1, \dots, s_q$ sont les barycentres de simplexes $B_1, \dots, B_q$ de $M - K$, tels que $A \subset B_1 \subset \dots \subset B_q$ $(p \geq -1, q \geq 0$; la notation $A \subset B$ signifie que A est une face de $B)$. Comme K est encore un sous-complexe de $s_K(M)$, on peut itérer la construction. On écrit $s_K^2(M)$ pour $s_K(s_K(M))$.

THÉORÈME de J. H. C. Whitehead. - Si K est un sous-complexe réductible d'une variété combinatoire M^n , le complexe $N(K, s_K^2(M))$, qui contient K en son intérieur, est un n-élément.

Une démonstration très détaillée est donnée dans [9]. Elle est trop longue pour être reproduite ici (cf. théorèmes 2, 22_n et 23_n de [9]).

3. Quelques lemmes.

LEMME 1. - *Si M^n est une variété combinatoire, toute subdivision (rectilinéaire) de M jouit de la même propriété.*

DÉFINITION. - A étant un simplexe d'un complexe K, le *bord* de l'étoile $St(A, K)$, noté $B(A, K)$, est le sous-complexe de $St(A, K)$ formé des simplexes qui ne contiennent pas A (comme face). On voit sans difficulté que

$$B(A, K) = A^{\bullet} \star K_A ,$$

où $\star$ désigne le joint et $A^{\bullet}$ le bord de A.

Soient alors a un sommet d'une subdivision (rectilinéaire arbitraire) M' de M et A^r le simplexe de M de dimension minimale r contenant a. La projection radiale (de centre a) fournit un homéomorphisme semi-linéaire de $B(A, M)$ sur M'_a. Donc M'_a et $A^{\bullet} \star M_A$ sont combinatoirement équivalents. On sait que, M étant une variété, M_A est un s-élément ou une s-sphère combinatoire, avec $r + s = \dim M - 1$ (Cf. J. W. ALEXANDER [1], theorem [12 : 8]). Une récurrence sur la dimension montre que $\Sigma^{r-1} \star \Sigma^s$ est combinatoirement équivalent à Σ^{r+s}, et que $\Sigma^{r-1} \star \Delta^s$ est combinatoirement équivalent à Δ^{r+s} (on peut aussi se reporter à J. W. ALEXANDER [1], theorems [11 : 4] et [11 : 5]).

Si T est un complexe simplicial recouvrant le même espace que K, et si l'identité $i : T \to K$ est semi-linéaire, on dira que T est une *triangulation* de K.

Soient $f : K \to M$ une application semi-linéaire, T une triangulation de K. On dira que f est en *position générale* relativement à T, si pour tout couple τ^p, τ^q de simplexes de T, on a

$$\dim f(\tau^p) \cap f(\tau^q) < \max (\dim \tau^p \cap \tau^q , p + q - \dim M) .$$

On notera que si $f : K \to M$ est en position générale relativement à T, alors $f|\{T\}$ est injective, $\{T\}$ étant l'ensemble des sommets de T, pourvu que $\dim M \geq 1$. Si $\dim K \leq \dim M$, alors la restriction $f|\tau^p$ est injective pour tout simplexe τ^p de T.

LEMME 2. - *Soient $f_0 : K \to M$ une application semi-linéaire d'un complexe K dans une variété combinatoire et L un sous-complexe donné de K. Si $f_0|L$ est en position générale relativement à une triangulation T_L de L qui se prolonge en une triangulation T de K, alors il existe une application semi-linéaire*

$f : K \to M$ <u>en position générale qui coïncide avec</u> f_0 <u>sur</u> L.

(I. e., il existe une triangulation T' de K relativement à laquelle f est en position générale).

Le lemme s'applique en particulier si $f_0|L$ est injective.

Dans ce lemme, l'hypothèse que T_L peut être prolongée en une triangulation de K est essentielle. Exemple : L = deux segments de droite disjoints, $f_0|L$ envoie L dans le plan R^2 avec un point d'intersection "propre" a des deux segments. Soient a' et a'' les pré-images de a dans L. L'application $f_0|L$ est en position générale relativement à une triangulation T_L de L si et seulement si les points a' et a'' ne sont pas des sommets de T_L. On prendra pour K le complexe obtenu en attachant deux segments à L en a' et a'' respectivement. Toute triangulation de K admet a' et a'' comme sommets. On ne peut donc pas prolonger $f_0|L$ en une application $f : K \to R^2$ en position générale.

DÉMONSTRATION du lemme 2. - Il existe des subdivisions arbitrairement fines T^* de T telles que $f_0|L$ soit en position générale relativement à la restriction de T^* à L. On en choisira une telle que l'image par f_0 de l'étoile de tout simplexe de T^* soit contenue dans l'intérieur d'une des étoiles des sommets de M. On gardera la notation T pour cette nouvelle subdivision. Soit T_L la restriction de T à L.

On construira d'abord $f|\{T\}$ injective, et telle que $f(\{T\} - \{L\}) \cap f_0(L)$ soit vide. Soit $x \in \{T\} - \{L\}$, et $St(a , M)$ une étoile contenant $f_0(St(x , T))$ dans son intérieur. Soit $\varphi : St(a , M) \to \Delta^n$ un homéomorphisme semi-linéaire. On remplacera $y = \varphi \circ f_0(x)$ par $y' \notin \varphi \circ f_0(L)$. Il existe une application semi-linéaire $g : St(x , T) \to \Delta^n$ telle que $g|T_x = \varphi \circ f_0|T_x$ et $g(x) = y'$. On posera $f_1 : St(x , T) \to M^n$ égal à $f_1 = \varphi^{-1} \circ g$.

La construction de $f|\{T\}$ étant terminée, on rangera les simplexes de dimension positive de $T - T_L$ par ordre de dimensions non-décroissantes, à la suite des sommets de T et des simplexes de T_L. L'ensemble des simplexes précédant un simplexe τ^p $(p > 0)$ de $T - T_L$ est un sous-complexe de T que l'on notera $T(\tau^p)$. On peut alors supposer par induction que l'application f définie sur $L \cup T(\tau^p)$ est en position générale relativement à une certaine subdivision de T mod T_L. Soit $St(a , M)$ une étoile dans M contenant $f_0(\tau^p)$ en son intérieur. On peut supposer que f(bord de τ^p) est contenu dans l'intérieur de $St(a , M)$. Soit $\varphi : St(a , M) \to \Delta^n$ un homéomorphisme semi-linéaire. On étend $\varphi \circ f$(bord de τ^p)

à une application $g : \tau^p \to \Delta^n$, semi-linéaire, suffisamment voisine de $\varphi \circ f_o | \tau^p$, et telle que pour tout couple de simplexes σ^r, σ^s, où σ^r est un simplexe d'une subdivision de τ^p qui rend g rectilinéaire, et σ^s est un simplexe d'une subdivision de $L \cup T(\tau^p)$ qui rend $\varphi \circ f$ rectilinéaire, on ait

$$\dim g(\sigma^r) \cap \varphi \circ f(\sigma^s) \leq \max(\dim \sigma^r \cap \sigma^s , r + s - \dim M) .$$

On pose alors $f|\tau^p = \varphi^{-1} \circ g$.

Pour obtenir f en position générale relativement à une subdivision de T, il faut avoir soin, pour chaque simplexe τ^p, de prendre g rectilinéaire par rapport à une subdivision de τ^p qui induit sur le bord de τ^p la subdivision induite par celle de $T_L \cup T(\tau^p)$.

4. Démonstration du théorème de Stallings.

Soient M^n une variété combinatoire fermée et p, q des entiers non-négatifs tels que $n = p + q + 1$. Soit T_p le p-squelette de la (première) subdivision barycentrique M' de M, et T_q^* le sous-complexe de M' dont les simplexes ont pour sommets les barycentres de simplexes de M de dimension $> p$ ($\dim T_q^* = q$). Il est facile de voir que tout point x de $M - T_p \cup T_q^*$ détermine univoquement un segment $[a_x , a_x^*]$ joigant un point a_x de T_p à un point a_x^* de T_q^*. En outre, a_x et a_x^* dépendent de façon continue de $x \in M - T_p \cup T_q^*$.

Supposons alors que l'on ait deux ouverts U, U^* de M tels que $T_p \subset U$ et $T_q^* \subset U^*$. Il existe un homéomorphisme semi-linéaire $h : M \to M$ tel que

$$M = h(U) \cup U^* \quad .$$

On prendra h égal à l'identité dans des voisinages $U_o \subset U$, $U_o^* \subset U^*$ de T_p et T_q^* respectivement. Pour $x \in M - U_o \cup U_o^*$, on imposera $h(x) \in [a_x , a_x^*]$.

Pour démontrer le théorème de Stallings, il suffit de se ramener à la situation ci-dessus avec pour U et U^* les intérieurs de deux éléments E, E^* semi-linéairement plongés dans M. D'après le théorème de Whitehead, pour obtenir de tels éléments, il est suffisant de construire des complexes réductibles K, K^* tels que

$$T_p' \subset K \subset M' \qquad \text{et} \qquad T_q^* \subset K^* \subset M' ,$$

où M' est une subdivision de M, et T_p', $(T_q^*)'$ les subdivisions induites.

On peut se borner à indiquer la construction de K, en se rappelant toutefois que la condition imposée à p et n pour l'existence de K devra également être imposée à q et n pour l'existence de K^*.

LEMME FONDAMENTAL. - Si M^n est une variété combinatoire du type d'homotopie de S^n, et L un sous-complexe de M, il existe un sous-complexe réductible d'une subdivision M' de M tel que

$$L' \subset K \subset M'$$

pourvu que

$$2n - 3\dim(L) - 5 > 0 \quad .$$

L' est la subdivision induite de M' sur L.

On obtiendra K et K^* (réductibles, contenant T_p et T_q^*) en prenant $L = T_p$, puis $L = T_q^*$ dans le lemme ci-dessus. On doit donc avoir simultanément

$$2n - 3p - 5 > 0 \qquad \text{et} \qquad 2n - 3q - 5 > 0 \quad .$$

- Si n est impair, $n = 2r - 1$, on prendra $p = q = r - 1$. On a alors la condition

$$2n - 3p - 5 = 2(2r - 1) - 3(r - 1) - 5 = r - 4 > 0 ,$$

d'où $n > 7$.

- Si n est pair, $n = 2(r + 1)$, on prendra $p = q + 1 = r + 1$. La condition devient

$$2n - 3p - 5 = 2(2r + 2) - 3(r + 1) - 5 = r - 4 > 0 ,$$

d'où $n > 10$.

DÉMONSTRATION du lemme fondamental. - Pour construire K, on part du cône $\hat{L} = C(L)$ sur L. Puisque M^n a le type d'homotopie de S^n, il existe une application semi-linéaire de $\hat{L}$ dans M qui prolonge l'inclusion $L \subset M$. Soit $f_0 : \hat{L} \to M$ cette application. D'après le lemme 2, il existe une application semi-linéaire $f : \hat{L} \to M$ en position générale qui prolonge l'inclusion $L \subset M$.

Soit T la triangulation de $\hat{L}$ relativement à laquelle f est en position générale. Le complexe des singularités de f, notation $S(f)$, semi-linéairement plongé dans M^n, est par définition la réunion des intersections $f(\tau^p) \cap f(\tau^q)$ avec $p + q - \dim \tau^p \cap \tau^q > n$ ((τ^p, τ^q) parcourt l'ensemble des couples de simplexes de T). On a

$$\dim S(f) \leqslant 2(\dim L + 1) - \dim M ,$$

car $\dim \tau^p \cap \tau^q < p + q - \dim M$ entraîne $\dim f(\tau^p) \cap f(\tau^q) \leqslant p + q - n$, l'application f étant en position générale relativement à T . Puisque f est injective sur chaque simplexe de T , il en résulte que

$$\dim f^{-1} S(f) = \dim S(f) \quad .$$

Soit S_o l'ensemble des simplexes de $f^{-1} S(f)$ qui ne rencontrent pas le sommet du cône $\hat{L}$. Les génératrices du cône $\hat{L}$ qui rencontrent S_o forment un "sous-cône" C_o de $\hat{L}$.

$$\dim C_o = \dim f^{-1} S(f) + 1 \leqslant 2 \dim(L) + 3 - \dim M ,$$

et $f^{-1} S(f) \subset C_o$.

Puisque S_o est un complexe semi-linéairement plongé dans $\hat{L}$, il existe une subdivision de $\hat{L}$ dont C_o est un sous-complexe. On voit facilement que $\hat{L}$ est réductible à C_o , et, puisque $f|\hat{L} - C_o$ est injective, il s'ensuit que $f(\hat{L})$ est réductible à $f(C_o)$.

Posons $K_o = f(\hat{L})$, et $C_1 = f(C_o) \subset K_o$. Soit K_1 le cône sur C_1 ($K_o \cap K_1 = C_1$). Puisque M^n a le type d'homotopie de S^n , il existe une application semi-linéaire $g_o : K_o \cup K_1 \to M$ qui prolonge l'inclusion $K_o \subset M$. En appliquant de nouveau le lemme 2, on obtient une application semi-linéaire $g : K_o \cup K_1 \to M$ en position générale, qui prolonge $K_o \subset M$. Soit $S(g)$ le complexe de singularités de g . On a

$$\begin{aligned} \dim S(g) &\leqslant \dim K_o + \dim K_1 - \dim M \\ &\leqslant 3 \dim(L) + 5 - 2 \dim(M) \quad . \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse du lemme, l'ensemble $S(g)$ est vide ; autrement dit, g est un plongement. Comme K_o est réductible à C_1 , $K_o \cup K_1$ est réductible à K_1 , donc complètement réductible. $g(K_o \cup K_1)$ est donc complètement réductible. D'autre part $L \subset g(K_o \cup K_1)$. Il ne reste plus qu'à subdiviser M pour que $g(K_o \cup K_1)$ devienne un sous-complexe K (ceci est possible puisque g est semi-linéaire).

5. <u>Les cas</u> $\dim M = 7$ <u>et</u> $\dim M = 10$.

On est amené à étudier le cas où

$$3 \dim(L) + 5 = 2 \dim(M)$$

dans le lemme fondamental. On obtient

$$\dim S(g) = 0 \ ,$$

ce qui signifie que l'on peut avoir des points d'intersections simples de $g(K_0 - K_0 \cap K_1)$ avec $g(K_1 - K_0 \cap K_1)$. Soit p un tel point, $p' \in K_0 - K_0 \cap K_1$ et $p'' \in K_1 - K_0 \cap K_1$ ses pré-images par g. Soit $[cp'']$ la génératrice du cône $\hat{L}$ de sommet c passant par p'' ($c \neq p''$ puisque $p'' \notin K_0 \cap K_1$) . On va indiquer une modification de l'application g, dans le voisinage de p' (dans $K_0 - K_0 \cap K_1$), de manière à faire disparaître le point d'intersection p. Il suffit de "pousser" le point $g(p')$ le long de $g[cp'']$ jusqu'à ce que l'on atteigne, et dépasse un peu, l'image par g du bord du cône $\hat{L}$ (c'est-à-dire $L \subset M$) . On peut prolonger cette déformation en une déformation semi-linéaire de g qui se réduise à l'identité dans l'extérieur d'un voisinage arbitrairement petit de p' dans $K_0 - K_0 \cap K_1$. Cette opération est utilisée par R. PENROSE, J. H. C. WHITEHEAD et E. C. ZEEMAN dans leur article [6] où l'on trouvera les détails de la construction (cf. Démonstration du lemma (2.7)). Les points constituant $S(g)$ ayant été éliminés de cette manière, on obtient un plongement de $K_0 \cup K_1$ dans M, et l'on est ramené à la situation considérée dans la démonstration du lemme fondamental.

6. Variétés sans structures différentiables.

Dans l'article [4], J. MILNOR construit une famille de variétés différentiables W^{4k} dont le bord est une variété différentiable du type d'homotopie de S^{4k-1}. Les variétés W^{4k} sont $(2k-1)$-connexes et on pour index $I(W^{4k}) = 8$ (k entier, > 1).

D'après le théorème de Stallings, le bord de W^{4k} est homéomorphe à S^{4k-1}. La réunion de W^{4k} avec le cône sur son bord est donc une variété topologique triangulable M^{4k} (toutefois, on ignore si M^{4k} peut être munie d'une structure combinatoire).

Si $k \equiv 3 \bmod 4$, la variété M^{4k} n'admet aucune structure différentiable. En effet, dans l'éventualité contraire, M^{4k} serait presque parallèlisable (la seule obstruction à la construction d'un champ de $4k$-repères tangents sur $M - x_0$ est dans $H^{2k}(M ; \pi_{2k-1}(SO_{4k}))$, où x_0 est un point de M^{4k}. Pour $k \equiv 3 \bmod 4$, on a $2k - 1 \equiv 5 \bmod 8$, donc $\pi_{2k-1}(SO_{4k}) = 0$, d'après les résultats de R. BOTT). Or on sait qu'une variété différentiable, fermée, presque parallèlisable de dimension $4k$ a un index divisible par