

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-PIERRE SERRE

Groupes finis à cohomologie périodique

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. n° 209, p. 53-64

http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__53_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GROUPES FINIS À COHOMOLOGIE PÉRIODIQUE

par Jean-Pierre SERRE

(d'après R. SWAN [8])

1. Énoncé des résultats.

Soit G un groupe fini d'ordre n , et soit k un entier ≥ 1 . On dit que la cohomologie de G est périodique de période k s'il existe un élément $u \in H^k(G, \mathbb{Z})$ d'ordre égal à n . On sait alors (cf. [2], Chap. XII) que, pour tout G -module A , et tout $q \in \mathbb{Z}$, l'application $x \rightarrow u \cdot x$ est un isomorphisme de $\hat{H}^q(G, A)$ sur $\hat{H}^{q+k}(G, A)$, ce qui justifie la terminologie.

Si G opère librement sur la sphère S_{k-1} ($k \geq 2$), et si les éléments de G respectent l'orientation de S_{k-1} , la cohomologie de G est périodique de période k (cf. [1], exposé 13, ou bien [2], p. 357). On savait peu de choses sur la réciproque (cf. MILNOR [5], qui donne un certain nombre de contre-exemples). Les résultats de Swan montrent que, à condition de remplacer les sphères par des "sphères homotopiques", la question devient purement algébrique, et peut se traiter à peu près complètement.

De façon précise, considérons une suite exacte de G -modules :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow P_{k-1} \rightarrow P_{k-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

où les P_i sont des modules projectifs de type fini sur l'algèbre $\mathbb{Z}[G]$ du groupe G . Une telle suite exacte sera appelée une résolution projective périodique de \mathbb{Z} , de période k . Si tous les P_i sont des modules libres, on dira que c'est une résolution libre.

THÉORÈME 1 (SWAN [8], théorème 4.1). - Pour qu'il existe une résolution projective périodique de \mathbb{Z} , de période k , il faut et il suffit que la cohomologie de G soit périodique de période k .

Soit d'autre part X un complexe cellulaire (au sens de J. H. C. WHITEHEAD [9]) sur lequel G opère. Nous dirons que G opère cellulairement si les éléments de G permutent les cellules de X .

THÉOREME 2 (SWAN [8], proposition 3.1). - Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe une résolution libre périodique de \underline{Z} , de période k .

(2) Il existe un complexe cellulaire fini X , de dimension $k - 1$, ayant même type d'homotopie que \underline{S}_{k-1} , sur lequel G opère cellulièrement, librement, et en conservant l'orientation.

(Cette dernière hypothèse signifie que G opère trivialement sur $H_{k-1}(X, \underline{Z})$, qui est isomorphe à \underline{Z} .)

Le théorème suivant permet de passer des résolutions projectives aux résolutions libres :

THÉOREME 3 (SWAN [8], corollaire 5.1). - Supposons qu'il existe une résolution projective périodique de \underline{Z} , de période k . Il existe alors un entier $d \geq 1$ et une résolution libre périodique de \underline{Z} , de période dk .

En combinant ces trois théorèmes, on obtient :

COROLLAIRE. - Si la cohomologie de G est périodique de période k , il existe un complexe cellulaire fini X , de dimension $dk - 1$, ayant même type d'homotopie que \underline{S}_{dk-1} , sur lequel G opère cellulièrement, librement, et en conservant l'orientation.

J'ignore s'il est possible de prendre $d = 1$ (c'est improbable). SWAN montre que l'on peut en tous cas prendre pour d le pgcd de $\varphi(n)$ et de n ; on peut même remplacer $\varphi(n)$ par $\varphi(m)$, où m est le ppcm des ordres des éléments de G .

2. Résolutions projectives, équivalences, etc.

Tous les G -modules considérés ci-après sont supposés libres de type fini sur \underline{Z} . Si P est un tel G -module, les propriétés suivantes sont équivalentes (cf. RIM [6]) :

- a. P est faiblement injectif ([2], p. 197),
- b. P est faiblement projectif (idem),
- c. P est cohomologiquement trivial (on a $\hat{H}^q(G, P) = 0$ pour tout sous-groupe G' de G et tout $q \in \underline{Z}$),
- d. P est $\underline{Z}[G]$ -projectif.

Soient A et B deux G -modules et soit $f : A \rightarrow B$ une application G -linéaire. Nous dirons que f est homotope à zéro, s'il existe une application \mathbb{Z} -linéaire $g : A \rightarrow B$ telle que $f = Ng$, où N désigne la norme. Il revient au même de dire que, pour toute suite exacte $B' \rightarrow B \rightarrow 0$ de G -modules, il existe $f' : A \rightarrow B'$ remontant f (cf. ECKMANN [3]). Les classes d'homotopie d'applications de A dans B forment un groupe $\pi_0(A, B)$, qui s'identifie à $\hat{H}^0(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B))$. Une application f est appelée une équivalence d'homotopie si sa classe d'homotopie est inversible.

LEMME 1. - Soit $f : A \rightarrow B$ une application G -linéaire (A et B étant toujours supposés libres de type fini sur \mathbb{Z}) . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est une équivalence d'homotopie.

(ii) Il existe deux modules projectifs P et Q et un isomorphisme $F : A \oplus P \rightarrow B \oplus Q$ tels que le composé

$$A \rightarrow A \oplus P \rightarrow B \oplus Q \rightarrow B$$

soit égal à f .

(iii) Pour tout sous-groupe G' de G et tout $q \in \mathbb{Z}$, l'application de $\hat{H}^q(G', A)$ dans $\hat{H}^q(G', B)$ définie par f est un isomorphisme.

Il est clair que (ii) entraîne (i). On voit facilement que (i) entraîne (iii). Montrons que (iii) entraîne (ii) :

Écrivons B comme quotient d'un module projectif P , et soit Q le noyau de l'homomorphisme surjectif $A \oplus P \rightarrow B$. En utilisant (iii), on voit que Q est cohomologiquement trivial, donc projectif. De plus, comme B est \mathbb{Z} -libre, Q est \mathbb{Z} -facteur direct dans $A \oplus P$; comme Q est faiblement injectif, il est " $(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z})$ -injectif" au sens de HOCHSCHILD (cf. [4]), donc il est facteur direct dans $A \oplus P$ comme G -module, et $A \oplus P$ s'identifie à $B \oplus Q$,

C. Q. F. D.

EXEMPLE. - On a $\pi_0(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; les équivalences d'homotopie $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ forment un groupe isomorphe au groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On dira que deux G -modules A et B ont même type d'homotopie s'il existe une équivalence d'homotopie $f : A \rightarrow B$, et on écrira $A \sim B$. En particulier, $P \sim 0$ signifie que P est projectif. Comme l'ont remarqué ECKMANN et HILTON (cf. [3]),

la situation est tout à fait analogue à celle que l'on rencontre en topologie ; le "décalage" correspond à la formation de "l'espace des lacets", et est unique à homotopie près. De façon précise :

LEMME 2. - Soient

$$(2) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow P_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow B \rightarrow 0$$

$$(3) \quad 0 \rightarrow A' \rightarrow P'_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow P'_0 \rightarrow B' \rightarrow 0$$

deux suites exactes de G -modules, où les P_α et les P'_α sont projectifs. Ces suites exactes définissent un isomorphisme de $\pi_0(A, A')$ sur $\pi_0(B, B')$. En particulier, toute équivalence d'homotopie $f_B : B \rightarrow B'$ définit une équivalence d'homotopie $f_A : A \rightarrow A'$ déterminée à homotopie près.

La démonstration est immédiate.

(Deux homomorphismes f_A et f_B se correspondent si et seulement si l'on peut les prolonger en un homomorphisme de la suite exacte (2) dans la suite exacte (3)).

Le lemme 2 montre en particulier que, si $B = B'$, on a $A \simeq A'$. Réciproquement :

LEMME 3. - Soit

$$(2) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow P_{i-1} \xrightarrow{\partial} P_{i-2} \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow P_0 \rightarrow B \rightarrow 0$$

une suite exacte de G -modules, avec $i \geq 2$. Soit $A' \simeq A$, et soient P et Q des projectifs tels que $A \oplus P = A' \oplus Q$. Il existe alors une suite exacte de la forme :

$$(3) \quad 0 \rightarrow A' \rightarrow P_{i-1} \oplus P \xrightarrow{\partial+r} P_{i-2} \oplus Q \xrightarrow{(\partial, 0)} P_{i-3} \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow 0,$$

qui coïncide avec (2) à partir de P_{i-3} .

Puisque B et les P_i sont \mathbb{Z} -libres, A est facteur direct dans P_{i-1} comme \mathbb{Z} -module, et il en est de même de $A \oplus P = A' \oplus Q$ dans $P_{i-1} \oplus P$. Utilisant le fait que Q est faiblement injectif, on en conclut qu'il existe une rétraction $r : P_{i-1} \oplus P \rightarrow Q$, qui est un G -homomorphisme, et qui s'annule sur A' . Il est clair que l'application

$$\partial + r : P_{i-1} \oplus P \rightarrow P_{i-2} \oplus Q$$

a pour noyau A' , et pour image le noyau de $(\partial, 0)$. D'où la suite exacte (3).

3. Démonstration du théorème 1.

Si \underline{Z} possède une résolution projective périodique, de période k , l'opérateur cobord itéré $\delta^k : \hat{H}^q(G, \underline{Z}) \rightarrow \hat{H}^{q+k}(G, \underline{Z})$ est un isomorphisme. En particulier, prenant $q = 0$, on voit que $H^k(G, \underline{Z}) = \underline{Z}/n\underline{Z}$, ce qui montre que la cohomologie de G est périodique de période k .

Réciproquement, supposons cette propriété vérifiée, et considérons une suite exacte

$$(4) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow P_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow \underline{Z} \rightarrow 0,$$

où les P_i sont projectifs (de type fini, comme toujours). Tenant compte de la périodicité de la cohomologie de G , on voit qu'il existe dans $\hat{H}^0(G, A)$ une classe v telle que $x \rightarrow v \cdot x$ soit un isomorphisme de $\hat{H}(G, \underline{Z})$ sur $H(G, A)$; de plus, si G' est un sous-groupe de G , et si $v' \in \hat{H}^0(G', A)$ est la restriction de v , la classe v' jouit de la même propriété. On peut alors représenter v par une G -application

$$f : \underline{Z} \rightarrow A,$$

et le lemme 1 montre que c'est une équivalence d'homotopie. D'après le lemme 3 (applicable car $k \geq 2$ si G n'est pas réduit à $\{1\}$), il existe une suite exacte

$$(5) \quad 0 \rightarrow \underline{Z} \rightarrow P'_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow P'_0 \rightarrow \underline{Z} \rightarrow 0$$

où les P'_i sont projectifs (et sont même égaux aux P_i pour $i < k - 2$). On a donc bien construit une résolution projective périodique de \underline{Z} , de période k .

4. Classes de modules projectifs.

Deux modules projectifs P et P' seront dits équivalents s'il existe deux modules libres L et L' tels que $P \oplus L$ soit isomorphe à $P' \oplus L'$. Les classes de modules projectifs (pour la relation d'équivalence précédente) forment un groupe abélien, que l'on notera $K_0(G)$; l'image dans $K_0(G)$ d'un module projectif P sera notée $[P]$. On a $[P] = 0$ si et seulement s'il existe un module libre L tel que $P \oplus L$ soit libre (on ignore si cette condition entraîne que P soit libre - c'est vrai si G est commutatif).

Soient maintenant A et B deux G -modules (vérifiant les conditions du numéro 2), et soit $f : A \rightarrow B$ une équivalence d'homotopie. D'après le lemme 1, il existe des modules projectifs P et Q , et un isomorphisme $F : A \oplus P \rightarrow B \oplus Q$ tel que $\text{pr}_1(F(a, 0)) = f(a)$.

LEMME 4. L'élément $[P] - [Q]$ de $K_0(G)$ ne dépend que de f .

Soient (P', Q', F') vérifiant les mêmes relations que ci-dessus. On va montrer que $P' \oplus Q$ est isomorphe à $P \oplus Q'$, ce qui établira le lemme. Soient $g : A \rightarrow Q$ et $g' : A \rightarrow Q'$ les applications définies par F et F' . On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{(f, g)} B \oplus Q \rightarrow P \rightarrow 0,$$

ainsi qu'une suite exacte analogue avec Q' et P' . Définissons alors un module R au moyen de la suite exacte :

$$(7) \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{(f, g, g')} B \oplus Q \oplus Q' \rightarrow R \rightarrow 0.$$

La suite exacte (7) s'envoie de façon naturelle sur la suite exacte (6), d'où la suite exacte :

$$(8) \quad 0 \rightarrow Q' \rightarrow R \rightarrow P \rightarrow 0.$$

Comme P est projectif, on en tire $R = P \oplus Q'$; de même, $R = P' \oplus Q$,

C. Q. F. D.

Nous noterons (f) l'élément $[P] - [Q]$. On vérifie tout de suite que $(fg) = (f) + (g)$, et que (f) ne dépend que de la classe d'homotopie de f .

LEMME 5. Soit $f : A \rightarrow B$ une équivalence d'homotopie. Pour que $(f) = 0$, il faut et il suffit qu'il existe des modules libres L et M et un isomorphisme $F : A \oplus L \rightarrow B \oplus M$ tels que le composé

$$A \rightarrow A \oplus L \rightarrow B \oplus M \rightarrow B$$

soit égal à f .

La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. On choisit d'abord un isomorphisme $A \oplus P \rightarrow B \oplus Q$, compatible avec f , et où P et Q sont projectifs. Par hypothèse, il existe des modules libres L_1 et L_2 tels que $P \oplus L_1 = Q \oplus L_2$; d'autre part, il existe un module projectif P' et un module libre L_3 tels que $P \oplus P' = L_3$. On en déduit un isomorphisme

$$F : A \oplus P \oplus P' \oplus L_2 \rightarrow B \oplus Q \oplus P' \oplus L_2.$$

Comme $P \oplus P' \oplus L_2 = L_3 \oplus L_2$ est libre, de même que $Q \oplus P' \oplus L_2 = P \oplus L_1 \oplus P' = L_1 \oplus L_3$, le lemme est démontré.

Deux modules A et B tels qu'il existe une application f vérifiant les conditions du lemme 5 seront dits strictement équivalents, et on écrira $A \sim_L B$.

LEMME 6. - Considérons un diagramme commutatif :

$$(9) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & A & \rightarrow & A'' & \rightarrow & 0 \\ & & f' \downarrow & & f \downarrow & & f'' \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & B' & \rightarrow & B & \rightarrow & B'' & \rightarrow & 0, \end{array}$$

où les lignes sont exactes, et où f, f', f'' sont des équivalences d'homotopie.
On a alors $(f) = (f') + (f'')$.

Quitte à ajouter à A, A', A'' des modules libres (ce qui ne modifie pas $(f'), (f), (f'')$), on peut supposer que f, f', f'' sont surjectifs. Soient Q', Q, Q'' leurs noyaux. Ils sont projectifs, et forment une suite exacte :

$$0 \rightarrow Q' \rightarrow Q \rightarrow Q'' \rightarrow 0 .$$

On a donc $[Q] = [Q'] + [Q'']$. Comme $(f) = -[Q], (f') = -[Q'], (f'') = -[Q'']$, on a bien $(f) = (f') + (f'')$.

En itérant, on en déduit :

LEMME 7. - Considérons un diagramme commutatif :

$$(10) \quad \begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & A_n & \rightarrow & A_{n-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & A_0 & \rightarrow & 0 \\ & & f_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & & & f_0 \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & B_n & \rightarrow & B_{n-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & B_0 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes, et où les f_i sont des équivalences d'homotopie. On a alors $\sum (-1)^i (f_i) = 0$.

COROLLAIRE. - Soient :

$$(11) \quad 0 \rightarrow A_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow A_0 \rightarrow 0$$

$$(12) \quad 0 \rightarrow B_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_0 \rightarrow B_0 \rightarrow 0$$

deux suites exactes, où les L_i et les M_i sont libres. Si A_0 est strictement équivalent à B_0 , alors A_n est strictement équivalent à B_n (et réciproquement).

Soit $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$ une équivalence d'homotopie telle que $(f_0) = 0$. On peut trouver des $g_i : L_i \rightarrow M_i$ et $f_n : A_n \rightarrow B_n$ définissant un homomorphisme de (11) dans (12). On a $(g_i) = 0$, et le lemme 7 donne $(f_n) = (-1)^{n+1} (f_0)$, d'où le corollaire.

REMARQUE. - Le corollaire ci-dessus peut aussi se démontrer, comme le fait SWAN, à partir du "théorème de Schanuel", dont voici l'énoncé : si $P/R = P'/R'$, avec P, P' projectifs, on a $R \oplus P' = R' \oplus P$.

5. Démonstration du théorème 2.

Supposons d'abord que G opère cellulièrement, librement, et en conservant l'orientation, sur un complexe cellulaire fini X ayant même homologie que $\underset{\sim}{S}_{k-1}$ (il n'est pas nécessaire de supposer X simplement connexe, ni de dimension $k-1$). Supposons $G \neq \{1\}$ (ce qui n'est guère une restriction !). La formule des points fixes montre alors que k est pair.

Soit $N = \dim X$; pour $0 \leq i \leq N$, soit C_i le groupe des chaînes de dimension i de X (au sens cellulaire), et soit $Z_i \subset C_i$ le sous-groupe des cycles. Ces groupes sont des G -modules, et, puisque G opère librement sur X , les C_i sont des G -modules libres. On a les deux suites exactes :

$$(13) \quad 0 \rightarrow C_N \rightarrow C_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_k \rightarrow Z_{k-1} \rightarrow \underset{\sim}{Z} \rightarrow 0$$

$$(14) \quad 0 \rightarrow Z_{k-1} \rightarrow C_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow \underset{\sim}{Z} \rightarrow 0 \quad .$$

Si $B_{k-1} \subset Z_{k-1}$ désigne le groupe des bords de dimension $k-1$, la suite exacte (13) se décompose en les deux suites exactes :

$$(15) \quad 0 \rightarrow C_N \rightarrow C_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_k \rightarrow B_{k-1} \rightarrow 0$$

$$(16) \quad 0 \rightarrow B_{k-1} \rightarrow Z_{k-1} \xrightarrow{h} \underset{\sim}{Z} \rightarrow 0 \quad .$$

La suite (15) montre que B_{k-1} est projectif, et que $[B_{k-1}] = 0$ dans $K_0(G)$. En utilisant (16), on voit alors que h est une équivalence d'homotopie et que $(h) = 0$. Donc $Z_{k-1} \underset{\sim}{\simeq} \underset{\sim}{Z}$. En appliquant le lemme 3 à (14) on obtient une nouvelle suite exacte :

$$(17) \quad 0 \rightarrow \underset{\sim}{Z} \rightarrow C'_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow C'_0 \rightarrow \underset{\sim}{Z} \rightarrow 0 ,$$

où les C'_i sont libres (et en fait égaux aux C_i si $i < k-2$). C'est la résolution libre périodique cherchée.

Réciproquement, supposons qu'il existe une telle résolution. Si G est cyclique, on sait qu'il peut opérer librement sur les sphères de dimension impaire. Supposons donc G non cyclique, ce qui entraîne que k est pair ([2], p. 261), et ≥ 4 (si $k = 2$, le groupe $H^2(G, \underset{\sim}{Z})$ est isomorphe à $\underset{\sim}{Z}/n\underset{\sim}{Z}$, et comme ce groupe est dual

de G/G' , G est lui-même cyclique). On construit d'abord un complexe cellulaire fini, de dimension 2, qui soit connexe, et de groupe fondamental G ; soit Y_2 un tel complexe, et soit X_2 son revêtement universel. On a la suite exacte de G -modules :

$$(18) \quad C_2(X_2) \xrightarrow{\partial} C_1(X_2) \xrightarrow{\partial} C_0(X_2) \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow 0.$$

Or, on a le lemme suivant :

LEMME 8. - Il existe une résolution libre périodique de $\underline{\mathbb{Z}}$

$$(19) \quad 0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow L_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

qui coïncide avec (18) en dimensions ≤ 1 , et qui est telle que $L_2 = C_2(X_2) \oplus M$, avec M libre, l'application $C_2 \oplus M \rightarrow C_1$ étant $(\partial, 0)$.

On commence par prolonger (18) par des modules libres $L_i^!$ ($i \leq k-1$), et soit A le noyau de $L_{k-1}^! \rightarrow L_{k-2}^!$. Puisque $\underline{\mathbb{Z}}$ a une résolution libre de période k , le corollaire au lemme 7 montre que A est strictement équivalent à $\underline{\mathbb{Z}}$; on applique alors le procédé du lemme 3, pour "remplacer" A par $\underline{\mathbb{Z}}$; on obtient ainsi (19).

(Noter qu'il n'est nécessaire d'introduire le module M que si $k = 4$.)

Quitte à adjoindre à X_2 des sphères (attachées chacune par un point), on peut supposer que $M = 0$. Le noyau de $C_2(X_2) \rightarrow C_1(X_2)$ s'identifie à $H_2(X_2) = \pi_2(X_2)$; soit (a_α) une $\underline{\mathbb{Z}}[G]$ -base de L_3 , et soient b_α leurs images dans $\pi_2(X_2)$ par $L_3 \rightarrow L_2 = C_2(X_2)$; pour chaque α , soit $f_\alpha : \underline{\mathbb{S}}_2 \rightarrow X_2$ une application continue de la classe b_α . Attachons à X_2 des cellules $e_{\alpha,\sigma}$ de dimension 3 au moyen des $\sigma \circ f_\alpha$; le groupe G opère de façon naturelle sur le complexe cellulaire X_3 ainsi obtenu, et l'on a $C_i(X_3) = L_i$ pour $0 \leq i \leq 3$. On définit de même X_4, \dots, X_{k-1} et il est clair que X_{k-1} répond à la question.

REMARQUE. - On peut s'arranger pour que les X_i soient des complexes simpliciaux sur lesquels G opère simplicialement; cela se démontre par récurrence sur i , en choisissant des applications f_α simpliciales, et en utilisant un résultat de J. H. C. WHITEHEAD ([9], lemme 2, p. 239).

6. Démonstration du théorème 3.

Soit r un entier premier à n . L'homotopie $r : \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}$ est une équivalence

d'homotopie, et définit donc un élément (r) de $K_0(G)$. On obtient ainsi un homomorphisme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \rightarrow K_0(G)$ dont l'image sera notée $D(G)$.

[Définition explicite de (r) : c'est la classe dans $K_0(G)$ de l'idéal de $\mathbb{Z}[G]$ engendré par r et N , cf. SWAN [8], paragraphe 6.]

Soit maintenant P une résolution projective périodique de \mathbb{Z} , de période k :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow P_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad .$$

On posera :

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^i [P_i] \quad \text{dans } K_0(G) \quad .$$

Soit P' une autre résolution projective périodique de \mathbb{Z} , de période k . Il existe un homomorphisme de P dans P' qui est l'identité sur le groupe \mathbb{Z} "de droite" ; sur le groupe de gauche, c'est la multiplication par un entier r , premier à n , et bien déterminé modulo n (cf. lemme 2, par exemple). On notera $d(P, P')$ la classe de r dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Ces notations étant introduites, on a :

LEMME 9. $\chi(P) - \chi(P') = (-1)^k (d(P, P'))$.

On applique le lemme 7 à l'homomorphisme de P dans P' construit ci-dessus ; si l'on appelle f_i l'homomorphisme de P_i dans P'_i , le lemme 7 montre que l'on a :

$$\sum (-1)^i (f_i) + (-1)^k (r) = 0 \quad .$$

Mais on voit facilement que $(f_i) = [P'_i] - [P_i]$, d'où aussitôt le lemme.

COROLLAIRE. - L'image de $\chi(P)$ dans $K_0(G)/D(G)$ est indépendante de la résolution P .

On la notera c_k pour indiquer sa dépendance de l'entier k .

LEMME 10. - Pour tout entier $d \geq 1$, on a $c_{dk} = dc_k$.

Si l'on met bout à bout d résolutions de période k , on obtient une résolution de période dk ; d'où le lemme.

LEMME 11. - Pour qu'il existe une résolution libre périodique de \mathbb{Z} , de période k , il faut et il suffit que $c_k = 0$.

C'est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons que c_k soit nul. On peut évidemment construire une suite exacte :

$$(20) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow L_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow \underline{\underline{Z}} \rightarrow 0,$$

où les L_i sont libres.

Soit

$$(21) \quad 0 \rightarrow \underline{\underline{Z}} \rightarrow P_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow \underline{\underline{Z}} \rightarrow 0$$

une résolution projective périodique de $\underline{\underline{Z}}$. Par hypothèse, $\chi(P) \in D(G)$. On peut construire un homomorphisme de (20) dans (21) qui soit égal à l'homothétie de rapport r donné (avec $(r, n) = 1$) sur les groupes $\underline{\underline{Z}}$ de droite. Soit h l'homomorphisme de A dans $\underline{\underline{Z}}$ induit par cet homomorphisme. En appliquant le lemme 7 on obtient la formule :

$$(-1)^k(h) + \chi(P) - (r) = 0.$$

On peut donc choisir r de telle sorte que $(h) = 0$, d'où $A \simeq_L \underline{\underline{Z}}$, et le lemme 3 permet de remplacer la suite exacte (20) par une résolution libre périodique de $\underline{\underline{Z}}$, de période k .

LEMME 12 (SWAN [7], proposition 9.1). - Le groupe $K_0(G)$ est un groupe fini.

D'après un résultat de SWAN ([7], théorème A - voir aussi une note aux Comptes-Rendus de GIORGIUTTI, et un article à paraître de H. BASS), tout élément de $K_0(G)$ est de la forme $[I]$, où $[I]$ est un idéal de $\underline{\underline{Z}}[G]$. Le lemme résulte alors de la "finitude du nombre de classes d'idéaux", c'est-à-dire du théorème de Jordan-Zassenhaus.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3 : puisque $K_0(G)$ est fini, il existe un entier $d \geq 1$, tel que $dc_k = 0$. En appliquant les lemmes 10 et 11, on en déduit qu'il existe une résolution libre périodique de $\underline{\underline{Z}}$, de période dk ,

C. Q. F. D.

7. Compléments.

a. Evaluation de l'entier d . - On montre facilement que, si H est un groupe cyclique, on a $D(H) = 0$, et $\chi(P)$ est indépendant de P , donc nul, vu le lemme 11. Il en résulte que, si G est maintenant un groupe quelconque, et si P est une résolution projective périodique de $\underline{\underline{Z}}$ de période k , l'image de $\chi(P)$ dans les groupes $K_0(H)$ est nulle si H est cyclique. Un raisonnement à la ARTIN (cf. SWAN

[7], corollaire 9.3) montre alors que $n\chi(P) = 0$, et l'on peut donc prendre pour d l'entier n .

Pour obtenir $d = (\varphi(n), n)$, il faut utiliser, à la place des sous-groupes cycliques, les sous-groupes élémentaires (produits d'un p -groupe par un groupe cyclique d'ordre premier à p). C'est nettement plus délicat (cf. Swan [8], numéros 8, 9, 10).

b. C-théorie. - On se donne une famille \mathcal{P} de nombres premiers, et l'on "néglige" les groupes finis dont l'ordre n'est divisible par aucun nombre premier $p \in \mathcal{P}$. L'anneau \mathbb{Z} est remplacé par l'anneau des fractions a/b , avec $(b, p) = 1$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. Il y a très peu de changements à faire dans les démonstrations.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (Henri). - Homologie des groupes, théorie des faisceaux, Séminaire Cartan, t. 3, 1950/51. - Paris, Secrétariat mathématique, 1955.
- [2] CARTAN (Henri) and EILENBERG (Samuel). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).
- [3] ECKMANN (Beno). - Homotopie et dualité, Colloque de Topologie algébrique [1956. Louvain], p. 41-53. - Liège, Georges Thone ; Paris, Masson, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).
- [4] HOCHSCHILD (G.). - Relative homological algebra, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 246-269.
- [5] MILNOR (John). - Groups which act on \mathbb{S}_n without fixed points, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 623-630.
- [6] RIM (D. S.). - Modules over finite groups, Annals of Math., Series 2, t. 69, 1959, p. 700-712.
- [7] SWAN (Richard G.). - Induced representations and projective modules, Annals of Math., Series 2, t. 71, 1960, p. 552-578.
- [8] SWAN (Richard G.). - Periodic resolutions for finite groups, Annals of Math., Series 2, t. 72, 1960, p. 267-291.
- [9] WHITEHEAD (J. H. C.). - Combinatorial homotopy, I., Bull. Amer. math. Soc., t. 55, 1949, p. 213-245.