ADRIEN DOUADY

Plongements de sphères

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. nº 205, p. 5-10

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__5_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 205

Décembre 1960

PLONGEMENTS DE SPHÈRES

par Adrien DOUADY

1. Historique.

S^n désignera la sphère de dimension n . La sphère S^{n-1} sera identifiée à l'équateur de S^n . Un plongement φ de S^{n-1} dans S^n est un homéomorphisme de S^{n-1} sur un sous-espace fermé de S^n (par compacité, il suffit de supposer φ continue injective de S^{n-1} dans S^n). Un tel plongement sera dit trivial (tame) s'il se prolonge en un homéomorphisme Φ de S^n sur elle-même. JORDAN a indiqué au siècle dernier que tout plongement de S^1 dans S^2 est trivial, ALEXANDER a donné [1] le premier exemple d'un plongement non trivial de S^2 dans S^3 ; c'est la fameuse "sphère à cornes". ARTIN et FOX en ont construit [2] des variantes plus simples. M. MORSE a démontré [5] que tout plongement φ de classe C^m est trivial pour $m \geqslant 1$; on peut même trouver Φ de classe C^m sauf en deux points. Barry MAZUR a montré [4] qu'un plongement $\varphi : S^{n-1} \to S^n$ est nécessairement trivial s'il vérifie les deux conditions suivantes :

a. Condition de la couronne : φ se prolonge en un homéomorphisme Φ_0 d'un voisinage C de S^{n-1} dans S^n sur un ouvert de S^n .

b. Trivialité semi-locale en un point : φ coïncide sur un ouvert non vide avec un plongement trivial.

L'article de MAZUR a paru en mars 1959. Aussitôt MORSE et M. BROWN ont montré indépendamment ([3] et [6]) que la deuxième hypothèse est inutile. Tandis que MORSE montrait que cette condition pouvait être remplacée par une autre plus faible, elle-même conséquence de la condition de la couronne, BROWN reprend le problème par des méthodes plus directes. C'est sa démonstration que nous allons exposer.

2. Enoncé des résultats.

THÉORÈME 1. - Tout plongement $\varphi : S^{n-1} \to S^n$ satisfaisant à la condition de la couronne est trivial.

DÉFINITION. - Soit X une variété topologique de dimension n . Un compact A contenu dans X sera dit cellulaire s'il possède un système fondamental de voisinages ouverts dans X homéomorphes à R^n .

THÉORÈME 2. – Soit X une variété topologique, A un compact cellulaire de X. Alors l'espace X/A obtenu en contractant A en un point a est homéomorphe à X, et pour tout voisinage U de A, on peut trouver un homéomorphisme h de X/A sur X, tel que $h \circ \chi$ coïncide avec l'identité sur $X - U$, χ étant l'application canonique de X sur X/A.

THÉORÈME 3. – Soit X un ouvert de R^n, A un compact contenu dans X. Si X/A est une variété topologique, A est cellulaire.

THÉORÈME 4. – Soit M une variété topologique compacte qui admette un recouvrement par deux ouverts X homéomorphe à un ouvert de R^n et Y homéomorphe à R^n. Alors M est homéomorphe à S^n.

Le théorème 4 est une conséquence immédiate des théorèmes 2 et 3 : en effet posons $A = M - Y$. L'espace M/A, compactifié d'Alexandroff de Y, est homéomorphe à S^n, et X/A est un ouvert de S^n. D'après le théorème 3, A est cellulaire dans X, donc dans M, et d'après le théorème 2, M est homéomorphe à M/A, lui-même homéomorphe à S^n.

3. Démonstration du théorème 2.

A étant cellulaire dans X, on peut trouver une suite (B_k) d'ouverts de X homéomorphes à R^n, formant un système fondamental de voisinages de A dans X, et tels que B_0 soit contenu dans U, et B_{k+1} contenu et relativement compact dans B_k pour tout k.

Si K est un compact contenu dans R^n, on peut toujours trouver un homéomorphisme f de R^n sur lui-même, qui coïncide avec l'identité sur le complémentaire d'un compact, et tel que $f(K)$ soit contenu dans un ouvert donné de R^n.

Munissant B_0 d'une métrique compatible avec sa topologie, on construit par récurrence une suite (g_k) d'homéomorphismes de X sur elle-même telle que

$$\begin{cases} \text{a) } g_0 \text{ est l'identité} \\ \text{b) } g_{k+1} \text{ coïncide avec } g_k \text{ sur un voisinage de } X - B_k \\ \text{c) } \operatorname{diam} g_k(B_k) < \frac{1}{k}\,. \end{cases}$$

Les applications $g_k : X \to X$ convergent uniformément vers une application continue $g : X \to X$, qui applique A sur un point, et définit un homéomorphisme h de X/A sur X qui répond à la question.

4. Démonstration des théorèmes 1 et 3.

(A) Démonstration du théorème 3 (cas particulier). – Considérons le cas où X est homéomorphe à R^n, et X/A à un ouvert W de R^n. Il existe un système fondamental de voisinages de a dans W formés d'ouverts V_i homéomorphes à W, et tels que pour chaque i il y ait un homéomorphisme f_i de W sur V_i qui coïncide avec l'identité sur un voisinage de a. Pour chaque i, $U_i = \chi^{-1}(V_i)$ est un voisinage de A dans X, et on a un homéomorphisme $\overline{f}_i$ de X sur U_i qui coïncide avec l'identité sur A, et tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\overline{f}_i} & U_i \\ \chi\downarrow & & \downarrow\chi \\ W & \xrightarrow{f_i} & V_i \end{array}$$

soit commutatif. Les U_i forment un système fondamental de voisinages de A dans X homéomorphes à X, donc A est cellulaire.

REMARQUE. – Ce cas particulier est suffisant pour la démonstration du théorème 4 dans le cas où X et Y sont tous deux homéomorphes à R^n. C'est seulement ce cas qui intervient dans la démonstration de STALLINGS sur la conjecture de Poincaré pour les grandes dimensions.

(B) Démonstration du théorème 1.

LEMME. – Soient $A_1, \ldots, A_r$ des compacts deux à deux disjoints contenus dans X homéomorphe à R^n. Si l'espace $X/A_1, \ldots, A_r$, obtenu en contractant les A_i en des points distincts a_i, est homéomorphe à un ouvert W de R^n, tous les compacts A_i sont cellulaires.

Démonstration par récurrence sur r. – Le cas $r = 1$ est traité au paragraphe (A). Supposons donc $r \geqslant 2$, et pour montrer que A_i est cellulaire, prenons $j \neq i$. Soit f un homéomorphisme de W sur un voisinage V de a_j, ne contenant des $(a_k)_{k\neq j}$, qui coïncide avec l'identité sur un voisinage de a_j. Soit $U = \chi^{-1}(V) \subset X$, et $\overline{f} : X \to U$ l'application qui coïncide avec l'identité sur A_j, et telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\overline{f}} & U \\ \chi\downarrow & & \downarrow\chi \\ W & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

soit commutatif. Alors $\bar{F}$ définit un homéomorphisme de $X/A_1, \ldots, \hat{A}_j, \ldots, A_r$ sur U, qui est homéomorphe à un ouvert de R^n. Par hypothèse de récurrence, les A_k sont cellulaires pour tous $k \neq j$, et le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 1 à partir du lemme. S^n est l'ensemble des $(x_0, \ldots, x_n)$ telles que $\sum x_i^2 = 1$, S^{n-1} est le sous-ensemble de S^n défini par $x_n = 0$; soient C le voisinage de S^{n-1} défini par $|x_n| < \varepsilon$, Φ_0 un homéomorphisme de la couronne C sur un ouvert de S^n, φ la restriction de Φ_0 à S^{n-1}. Soient C_1 et C_2 les parties de C définies respectivement par $x_n > 0$ et $x_n < 0$, E_1 et E_2 les composantes connexes de $\Phi_0(C_1)$ et $\Phi_0(C_2)$ dans $S^n - \varphi(S^{n-1})$. Pour $n > 1$ (le cas $n = 1$ est trivial), S^n est simplement connexe, et E_1 et E_2 sont disjoints. Posons $A_1 = E_1 - \Phi_0(C_1)$, $A_2 = E_2 - \Phi_0(C_2)$ ce sont deux compacts disjoints et l'espace $S^n/A_1, A_2$ est homéomorphe à S^n. Soient x un point de $\Phi_0(C)$, et $X = S^n - \{x\}$. Les espaces X et $X/A_1, A_2$ sont homéomorphes à R^n, donc A_1 et A_2 sont cellulaires d'après le lemme. Appliquons le théorème 2 à $A_1 \subset E_1$ et $A_2 \subset E_2$: on trouve des homéomorphismes h_1 de E_1/A_1 sur E_1 et h_2 de E_2/A_2 sur E_2, qui se recollent en un homéomorphisme h de $S^n/A_1, A_2$ sur S^n qui coïncide avec l'identité sur un voisinage de $\varphi(S^{n-1})$. Soient D_1 et D_2 les parties de S^n définies par $x_n \geq \varepsilon$ et $x_n \leq -\varepsilon$. On a un homéomorphisme f de S^n sur $S^n/D_1, D_2$, et Φ_0 se prolonge en un homéomorphisme de $S^n/D_1, D_2$ sur $S^n/A_1, A_2$. L'homéomorphisme $\Phi = h \circ \Phi_0 \circ f$ de S^n sur elle-même répond à la question, ce qui démontre le théorème 1.

(C) Démonstration du théorème 3 (cas général). – Pour se ramener au cas particulier (A), il suffit de trouver un voisinage X' de A dans X tel que X' et X'/A soient homéomorphes à R^n. Soit f un homéomorphisme de R^n sur un voisinage ouvert de a dans X/A, tel que $f(0) = a$. Le plongement $\varphi = \chi^{-1} \circ f$ de la sphère unité S^{n-1} de R^n dans S^n, identifiée au compactifié d'Alexandroff de R^n qui contient X, se prolonge à une couronne, donc est trivial d'après le théorème 1. Soit B la boule unité ouverte de R^n, et $X' = \chi^{-1} \circ f(B)$. Comme X' est ouvert et $X' \cup \varphi(S^{n-1})$ fermé, il en résulte que X' est homéomorphe à R^n. D'autre part X'/A est homéomorphe à B.

5. Prolongements d'homéomorphismes (cas des sphères).

Signalons encore une conséquence du théorème 1.

THÉORÈME 5. – Soient x et y deux points de S^n, h un homéomorphisme d'un voisinage U de x sur un voisinage V de y. On peut alors trouver un homéomorphisme H de S^n sur elle-même qui coïncide avec h sur un voisinage U' de x.

DÉMONSTRATION. – Soit φ un plongement trivial de S^{n-1} dans S^n, tel qu'une des cellules fermées D_1 et D_2 limitées par $\varphi(S^{n-1})$ soit contenue dans U et contienne x dans son intérieur. Le plongement $h \circ \varphi$ de S^{n-1} dans S^n est trivial d'après le théorème 1. Soient D'_1 et D'_2 les cellules fermées limitées par $h \circ \varphi(S^{n-1})$. Supposons $x \in D_1$, $y \in D'_1$. h induit un homéomorphisme de D_1 sur D'_1, et on est ramené à prolonger un homéomorphisme de S^{n-1} sur elle-même en un homéomorphisme de la boule fermée B limitée par cette sphère sur elle-même. Ceci est immédiat puisque la boule est le cône sur la sphère, que "cône" est un foncteur, et que l'injection d'un espace dans son cône comme base est un morphisme de foncteurs.

6. Questions ouvertes.

(A) Plongements localement triviaux. – Un plongement φ de S^{n-1} dans S^n est dit localement trivial si, pour tout point x de S^{n-1}, il existe un voisinage U de x dans S^n et un homéomorphisme Φ_U de U sur un ouvert de S^n qui coïncide avec φ sur $S^{n-1} \cap U$. La condition de la couronne implique évidemment la trivialité locale, mais on ne sait pas si la réciproque est vraie.

QUESTION. – Tout plongement localement trivial de S^{n-1} dans S^n est-il trivial ?

(B) Prolongements d'homéomorphismes (cas général). – On ne sait pas si on peut remplacer dans le théorème 5 S^n par une variété topologique connexe quelconque X, en supposant en outre que l'homéomorphisme donné h préserve l'orientation si X est orientable (tout homéomorphisme de $P^r(C)$ sur lui-même, par exemple, préserve l'orientation).

QUESTION. – Soient D une boule fermée de R^n, x et y deux points intérieurs à D, h un homéomorphisme d'un voisinage U de x sur un voisinage V de y, qui préserve l'orientation. Peut-on trouver un homéomorphisme H de D sur elle-même, qui coïncide avec h sur un voisinage U' de x et avec l'identité sur la frontière de D ?

Un tel théorème serait précieux pour définir la somme connexe de deux variétés topologiques à la manière de SEIFERT, MILNOR, CERF, etc. MAZUR, qui avait conjecturé le résultat de BROWN, affirme que c'est possible, mais je ne vois pas comment ...

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDER (J. W.). - An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 10, 1924, p. 8-10.

[2] ARTIN (Emil) and FOX (Ralph). - Some wild cells and spheres in three-dimensonial space, Annals of Math., Series 2, t. 49, 1948, p. 979-990.

[3] BROWN (Morton). - A proof of the generalized Schoenflies theorem, Bull. Amer. math. Soc., t. 66, 1960, p. 74-76.

[4] MAZUR (Barry). - On embeddings of spheres, Bull. Amer. math. Soc., t. 65, 1959, p. 59-65.

[5] MORSE (Marston). - Differentiable mappings in the Schoenflies theorem, Compositio Mathematica, t. 14, 1959, p. 83-151.

[6] MORSE (Marston). - A reduction of the Schoenflies extension problem, Bull. Amer. math. Soc., t. 66, 1960, p. 113-115.