

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL ZISMAN

Travaux de Borel-Haefliger-Moore

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. n° 240, p. 287-295

http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__287_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE BOREL-HAEFLIGER-MOORE

par Michel ZISMAN

A. Homologie des espaces localement compacts.

1. Le complexe $C_H(X, \mathfrak{F})$.

(1.0) K désigne un anneau de Dedekind, K^* son corps des fractions. Si M est un K -module, $F(M)$ le K -module libre engendré par $M - \{0\}$, et $R(M)$ le noyau de $F(M) \rightarrow M$, on désigne par \bar{M} le quotient de $K^* \otimes_K F(M)$ par $R(M)$. L'application canonique $M \rightarrow \bar{M}$ est injective et \bar{M} est un K -module injectif. La correspondance qui, à M , fait correspondre \bar{M} est fonctorielle.

Soit X un espace topologique ; un faisceau sur X sera toujours un faisceau de K -modules. Si \mathfrak{F} est un tel faisceau, on définit un faisceau $I(\mathfrak{F})$ en posant $I(\mathfrak{F})(U) = \prod_{x \in U} \bar{\mathfrak{F}}_x$ pour tout ouvert $U \subset X$, $\bar{\mathfrak{F}}_x$ étant la fibre de \mathfrak{F} au point x , l'homomorphisme de restriction étant évident. $I(\mathfrak{F})$ est un faisceau injectif, donc flasque, et l'application canonique $\mathfrak{F} \rightarrow I(\mathfrak{F})$ est injective. La construction précédente permet de construire une résolution canonique $C^*(X, \mathfrak{F})$ du faisceau \mathfrak{F} par des faisceaux injectifs. Si Φ est une famille de supports, $\Gamma_\Phi(C^*(X, \mathfrak{F}))$ est un K -module injectif.

(1.1) Notations. - Soit Φ une famille de supports sur X . Si ϕ est la famille de tous les compacts de X (resp. de tous les fermés de X , resp. de tous les fermés de F fermé dans X), on écrit c (resp. rien, resp. F) à la place de ϕ .

Remarquons que si X est localement compact (ce que l'on suppose toujours à partir de maintenant) la famille de tous les compacts de X est paracompactifiante.

(1.2) Soit M un K -module. On pose, pour tout ouvert U et tout faisceau \mathfrak{F}

$$\mathfrak{J}(U) = \text{Hom}(\Gamma_c(\mathfrak{F}|U), M) \quad .$$

Si $V \subset U$, l'application canonique $\Gamma_c(\mathfrak{F}|V) \rightarrow \Gamma_c(\mathfrak{F}|U)$ définit un homomorphisme $\mathfrak{J}(U) \rightarrow \mathfrak{J}(V)$. Les données précédentes définissent un préfaisceau \mathfrak{J} sur X .

En utilisant des partitions de sections subordonnées à un recouvrement ouvert de X on démontre la proposition suivante :

PROPOSITION. - Si \mathfrak{F} est c -mou, \mathfrak{J} est un faisceau. Si M est injectif, ce faisceau est flasque.

Dans la suite on prend pour \mathfrak{F} un faisceau différentiel (différentielle de degré $+1$), pour M la résolution injective de $K : 0 \rightarrow K \rightarrow K^* \rightarrow K^*/K \rightarrow 0$. Si \mathfrak{F} est c -mou, \mathfrak{D} est un faisceau différentiel (pour le degré total), la différentielle étant de degré -1 , que l'on désignera par $D(\mathfrak{F})$. En particulier, si $\mathfrak{F} = \mathcal{C}^*(X, K)$ on pose $D(\mathfrak{F}) = \mathcal{C}_H(X, K)$. Enfin si \mathfrak{S} est un faisceau quelconque on pose

$$\mathcal{C}_H(X, \mathfrak{S}) = \mathcal{C}_H(X, K) \otimes \mathfrak{S} \quad .$$

$\mathcal{C}_H(X, K)$ est flasque, $\mathcal{C}_H(X, K)(U)$ est sans torsion.

$\mathcal{C}_H(X, \mathfrak{S})$ est ϕ -fin si ϕ est paracompactifiante.

2. Homologie.

$$(2.1) \text{ DÉFINITION. - } H_*^\phi(X; \mathfrak{S}) = H_*(\Gamma_\phi \mathcal{C}_H(X, \mathfrak{S}))$$

$$\mathcal{K}_*(X; K) = \mathcal{K}_*(\mathcal{C}_H(X, K)) \quad .$$

$\mathcal{K}_*(X; K)$ est le faisceau d'homologie locale de X .

(2.2) Puisque $\mathcal{C}_H(X, K)(U) = \Gamma \mathcal{C}_H(U, K)$ pour tout ouvert U de X , la restriction des sections définit un homomorphisme

$$j_{*XU} : H_*^\phi(X; K) \rightarrow H_*^{\phi \cap U}(U; K) \quad .$$

D'après ([3], II, 4-1) $\mathcal{K}_*(X; K)$ est donné par le préfaisceau $(H_*(U; K), j_{*UV})$. En particulier,

$$\mathcal{K}_*(X, K)_x = \lim_{\longrightarrow} (H_*(U; K), j_{*UV})$$

Principales propriétés de $H_q^\phi(X; \mathfrak{S})$.

(2.3) Soient ϕ et ψ deux familles de supports de X et Y , $f : X \rightarrow Y$ une application continue telle que $f(\phi) \subset \psi$ et telle que la restriction de f à tout $F \in \phi$ soit propre. Il existe alors un homomorphisme canonique

$$f_* : H_*^\phi(X; K) \rightarrow H_*^\psi(Y; K)$$

en particulier, il existe toujours

$$f_* : H_*^C(X ; K) \rightarrow H_*^C(Y ; K) \quad .$$

(2.4) Pour tout i , on a une suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_c^{i+1}(X ; K), K) \rightarrow H_i(X ; K) \rightarrow \text{Hom}(H_c^i(X ; K), K) \rightarrow 0$$

compatible avec la restriction aux ouverts U de X ; donc, vu (2.2), on a une suite exacte scindée

$$0 \rightarrow \lim_{\rightarrow} \text{Ext}(H_c^{i+1}(U ; K), K) \rightarrow \mathcal{K}_i(X ; K)_X \rightarrow \lim_{\rightarrow} \text{Hom}(H_c^i(U ; K), K) \rightarrow 0 \quad .$$

(2.5) $H_q^\Phi(X ; K) = \lim_{\rightarrow} H_q(F ; K)$ où $F \in \Phi$; la limite étant prise par rapport à l'ordonné filtrant des ensembles de Φ ordonnés par inclusion.

(2.6) Si \mathcal{A} est une résolution c -molle de K , on a

$$H_*^\Phi(X ; K) = H_*(\Gamma_\Phi(D(\mathcal{A}))) \quad .$$

Si X est de dimension finie, \mathbb{S} sans torsion, et Φ paracompactifiante, on a aussi

$$H_*^\Phi(X ; \mathbb{S}) = H_*(\Gamma_\Phi(D(\mathcal{A}) \otimes \mathbb{S})) \quad .$$

(2.7) Soient F fermé de X et $U = X - F$. On a une suite exacte :

$$\rightarrow H_q(F ; K) \xrightarrow{i_{FX}} H_q(X ; K) \xrightarrow{j_{XU}} H_q(U ; K) \rightarrow H_{q-1}(F, K) \rightarrow$$

où i_{FX} est l'homomorphisme associé à l'inclusion $F \subset X$.

(2.8) Si X est localement connexe,

$$H_{-1}(X ; K) = H_{-1}^C(X ; K) = 0$$

(pour H_{-1} c'est évident d'après (2.4) ; pour H_{-1}^C c'est une conséquence du précédent, de (2.5) et de la propriété suivante : soit X connexe et localement connexe, F un compact de X ; il existe un compact connexe A tel que $F \subset A$). Enfin, si X est HLC_K^1 , $H_0^C(X ; K)$ est le module libre engendré par les composantes connexes de X (si K est un corps, il suffit de supposer que X est localement connexe).

(2.9) Si $F : I \times X \rightarrow Y$ est propre et si on pose $F_t(x) = F(t, x)$, alors $F_{0*} = F_{1*}$ pour l'homologie à supports quelconques. Si on prend l'homologie à supports compacts, le résultat est encore vrai même si F n'est pas propre.

(2.10) Si X est HLC_K^r et compact, $H_q(X, K)$ et $H^q(X, K)$ ont un nombre fini de générateurs pour $q \leq r$.

3. Dualité.

(3.1) Γ_ϕ étant exact à gauche, on a un homomorphisme canonique

$$H_n^\phi(X; \mathbb{S}) = H_n(\Gamma_\phi(C_H(X; \mathbb{S})) \rightarrow \Gamma_\phi(\mathcal{K}_n(C_H(X; \mathbb{S}))) = H_n^\phi(X, \mathcal{K}_n(C_H(X; \mathbb{S}))) \quad .$$

On suppose maintenant que $\text{Tor}(\mathcal{K}_n(X, K)_X, \mathbb{S}_X) = 0$ (ce qui est toujours vérifié si $\mathbb{S} = K$). Alors $\mathcal{K}_n(C_H(X; \mathbb{S})) = \mathcal{K}_n(X, K) \otimes \mathbb{S}$.

(3.2) THÉORÈME. - Supposons que $\text{Tor}(\mathcal{K}_n(X, K)_X, \mathbb{S}_X) = 0$ et que ϕ soit paracompactifiante si $\mathbb{S} \neq K$. Si X est de dimension finie sur K , l'homomorphisme canonique

$$\Delta : H_n^\phi(X; \mathbb{S}) \rightarrow H_n^\phi(X, \mathcal{K}_n(X, K) \otimes \mathbb{S})$$

est un isomorphisme.

(3.3) DÉFINITION. - Un espace topologique X est une $n - HM_K$ (homology n -manifold over K) si

1. $\dim_K X < +\infty$
2. $\mathcal{K}_q(X; K) = 0$ pour $q \neq n$
3. $\mathcal{K}_n(X; K)$ est localement isomorphe au faisceau constant K .

On désigne alors par \mathcal{O} le faisceau $\mathcal{K}_n(X; K)$. \mathcal{O} est le faisceau d'orientation de X . Si \mathcal{O} est constant, on dit que X est orientable, une orientation est alors la donnée d'un isomorphisme de \mathcal{O} avec K .

Exemple. - Une variété topologique de dimension n est une $n - HM_K$, en effet les propriétés 2 et 3 étant locales, il suffit de les vérifier pour les boules ouvertes de \mathbb{R}^n .

(3.4) THÉORÈME. - Soit X une $n - HM_K$. Si $\mathbb{S} = K$ ou si ϕ est paracompactifiante, il existe un isomorphisme canonique

$$\Delta : H_{n-p}^{\mathbb{S}}(X ; \mathbb{S}) \rightarrow H^p(X ; \mathbb{C} \otimes \mathbb{S}) , \quad \forall p \quad .$$

Démonstration. - On pose $\mathbb{B}^q = C_H(X ; \mathbb{S})_{n-q}$. \mathbb{B}^* est un faisceau différentiel dont la différentielle est de degré $+1$. On a :

$$(1) \quad H^q(\Gamma_\Phi \mathbb{B}^*) = H_{n-q}^\Phi(X , \mathbb{S})$$

$$(2) \quad \mathcal{K}^q(\mathbb{B}^*) = \mathcal{K}_{n-q}^{\mathbb{K}}(X , \mathbb{K}) \otimes \mathbb{S} \quad ,$$

i. e.

$$(3) \quad \mathcal{K}^q(\mathbb{B}^*) = 0 \quad \text{si } q \neq 0 , \quad \mathcal{K}^0(\mathbb{B}^*) = \mathbb{C} \otimes \mathbb{S} \quad .$$

Si $\mathbb{S} = \mathbb{K}$, \mathbb{B}^* est flasque ; si Φ est paracompactifiante, \mathbb{B}^* est Φ -fin ; et dans les deux cas :

$$H_\Phi^p(X ; \mathbb{B}^*) = 0 \quad \text{pour } p \geq 1 \quad .$$

D'après ([3], II, 4.6.1), on a une suite spectrale dont le terme E_2 est

$$E_2^{p,q} = H_\Phi^p(X ; \mathcal{K}^q(\mathbb{B}^*))$$

et dont l'aboutissement est $H^*(\Gamma_\Phi \mathbb{B}^*)$.

Compte tenu de (3), on a :

$$E_2^{p,q} = 0 \quad \text{si } q \neq 0 , \quad E_2^{p,0} = H_\Phi^p(X ; \mathbb{C} \otimes \mathbb{S}) \quad .$$

Comme $\dim_{\mathbb{K}} X < +\infty$, la suite spectrale est convergente ([3], p. 195) donc

$$E_2^{p,0} = E_\infty^{p,0} = H^p(\Gamma_\Phi(\mathbb{B}^*)) = H_{n-p}^\Phi(X , \mathbb{S}) \quad .$$

C. Q. F. D.

Remarque. - La démonstration de (3.2) est analogue.

(3.5) Supposons que X soit une $n - \text{HM}_{\mathbb{K}}$ orientée, Δ est alors un isomorphisme de

$$H_p^\Phi(X ; \mathbb{K}) \rightarrow H_\Phi^{n-p}(X ; \mathbb{K}) \quad .$$

Soient $a \in H_1^\Phi(X ; \mathbb{K})$ et $b \in H_j^\Psi(X ; \mathbb{K})$, on note

$$a \cdot b = \Delta^{-1}(\Delta a \cup \Delta b) \in H_{i+j-n}^{\Phi \cap \Psi}(X; K)$$

$a \cdot b$ est le produit d'intersection de a et b . Ce produit est associatif et anticommutatif.

B. Classe fondamentale.

4. Espaces du type VS_n sur K (variété de dimension n avec singularités).

Ce sont des espaces localement compacts de dimension n sur K possédant un ouvert épais (i. e. dont le complémentaire est de dimension $\leq n - 1$ sur K) homéomorphe à une $n - HM$ qui est HLC_K (en abrégé : $n - CM_K$, variété cohomologique de dimension n).

Une variété topologique de dimension n est une $n - CM_K$ pour tout K . On note X_R l'ensemble des points de X au voisinage desquels X est homéomorphe à une $n - CM_K$. C'est un ouvert épais dont le complémentaire est noté X_S . Les points de X_R (resp. X_S) sont dits réguliers (resp. singuliers).

5. Classe fondamentale.

(5.1) Soit X un espace topologique. On désigne par μ_x le composé de

$$\Delta : H_n(X; K) \rightarrow \Gamma(\mathcal{K}_n(X; K))$$

et de l'application $\Gamma(\mathcal{K}_n(X; K)) \rightarrow \mathcal{K}_n(X, K)_x$ qui, à une section, fait correspondre sa valeur en $x \in X$.

(5.2) Soit alors X du type VS_n sur K .

Une classe fondamentale est un élément de $H_n(X; K)$ dont l'image dans le groupe d'homologie locale en x par μ_x est un générateur de ce groupe pour tout x régulier.

Une classe fondamentale définit donc un isomorphisme du faisceau constant $X_R \times K$ sur $\mathcal{K}_n(X_R; K)$. L'existence d'une classe fondamentale implique donc que X_R soit orientable. Si X est une $n - CM$, cette condition est aussi suffisante, car si g est un générateur de K , l'application $x \rightarrow g$ est une section s de ζ , et $\Delta^{-1} s$ est une classe fondamentale.

(5.3) Soit U un ouvert de dimension n sur K d'un espace X du type VS_n sur K . U est aussi du type VS_n sur K .

THÉOREME. - Soient X un espace du type VS_n sur K , et U un ouvert épais de X . Si U possède une classe fondamentale et si $\dim_K(X - U) \leq n - 2$, X possède une et une seule classe fondamentale dont la restriction à U est une classe fondamentale donnée de U .

Démonstration. - La suite exacte

$$H_n(X - U) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(U) \rightarrow H_{n-1}(X - U)$$

montre que $j_{nXU} : H_n(X) \rightarrow H_n(U)$ est un isomorphisme. Pour conclure il suffit de montrer que $\mathcal{K}_n(X; K)$ est constant au-dessus de U_R . Comme

$$\dim_K(X_R - U_R) \leq \dim_K(X - U) \leq n - 2$$

$j_{nX_R U_R}$ est aussi un isomorphisme. (3.2) montre alors que

$$\Gamma \mathcal{K}_n(X_R; K) \rightarrow \Gamma \mathcal{K}_n(U_R; K)$$

est un isomorphisme, et par conséquent $\mathcal{K}_n(X_R; K)$ est un faisceau constant.

COROLLAIRE. - Si dans le théorème précédent U_R est connexe, $H_n(X; K) \approx K$, la classe fondamentale de X est un générateur de $H_n(X; K)$. En effet

$$H_n(U_R, K) \approx \Gamma \mathcal{K}_n(U_R; K) \approx K$$

puisque U_R est connexe.

6. Classe fondamentale des espaces analytiques.

Soit X un espace analytique complexe (au sens de SERRE) de dimension complexe n . Alors $\dim_{\mathbb{Z}} X = 2n$, où $\dim_{\mathbb{Z}}$ désigne comme précédemment la dimension cohomologique.

Désignons par U l'ensemble des points simples de X . On sait que $X - U$ est un espace analytique de dimension $2n - 2$ sur \mathbb{Z} , donc, puisque U est une variété, on voit que X est un espace du type VS_{2n} et, de plus :

THÉOREME. - Soit X un espace analytique complexe. Il existe une et une seule classe fondamentale induisant l'orientation naturelle sur U .

COROLLAIRE. - Soit X un espace analytique irréductible de dimension complexe n . Alors $H_{2n}(X, \underline{\mathbb{Z}}) \approx \underline{\mathbb{Z}}$ est engendré par la classe fondamentale. Si X est non compact,

$$H_{2n}^0(X, \underline{\mathbb{Z}}) = 0 \quad .$$

La première assertion provient du fait que dans un espace analytique irréductible, l'ensemble U des points simples est connexe. La deuxième assertion vient de ce que l'isomorphisme

$$\Gamma \mathcal{K}_{2n}(X, \underline{\mathbb{Z}}) \rightarrow \Gamma \mathcal{K}_{2n}(U, \underline{\mathbb{Z}}) \text{ entraîne } \Gamma_C(\mathcal{K}_{2n}(X, \underline{\mathbb{Z}})) = 0$$

si X n'est pas compact, car, $\mathcal{K}_{2n}(U, \underline{\mathbb{Z}})$ étant constant, si une section s'annule en un point, elle est nulle puisque U est connexe.

C. Intersection de sous-ensembles analytiques.

7. Cycles analytiques.

(7.1) Sommes localement finies. - Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille localement finie de fermés d'un espace X , et soit Y l'espace somme des X_α . Les injections $X_\alpha \rightarrow X$ définissent une application propre $Y \rightarrow X$, donc une application

$$\prod_{\alpha \in I} H_*(X_\alpha; K) = H_*(Y; K) \xrightarrow{\mu} H_*(X; K) \quad ;$$

l'image par μ de $\prod_{\alpha \in I} \omega_\alpha$, $\omega_\alpha \in H_*(X_\alpha; K)$ se désigne par $\sum_{\alpha \in I} \omega_\alpha$.

(7.2) Soit $(X_i)_{i \in I}$ l'ensemble des sous-ensembles analytiques irréductibles d'un espace analytique V ; un cycle analytique est une combinaison linéaire $Z = \sum n_i X_i$ à coefficients dans $\underline{\mathbb{Z}}$ où les X_i tels que $n_i \neq 0$ forment une famille localement finie. Le support $|Z|$ de Z est le sous-ensemble analytique réunion des X_i pour lesquels $n_i \neq 0$. Soit $h(X_i)$ la classe fondamentale de X_i , et

$$h(Z) = \sum n_i h(X_i) \in H_*(|Z|; \underline{\mathbb{Z}}) = H_*^{|Z|}(V; \underline{\mathbb{Z}})$$

puisque $|Z|$ est fermé.

(7.3) On suppose maintenant que V est irréductible. Si X et Y sont deux sous-ensembles analytiques de dimension pure, on désigne par $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ l'ensemble des composantes irréductibles propres de $X \cap Y$, et par $2p$ la dimension sur $\underline{\mathbb{Z}}$ de C_λ . On peut alors montrer que tout $C \in H_{2p}^{X \cap Y}(V; \underline{\mathbb{Z}})$ s'écrit de manière unique

$$C = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda + n \quad C_\lambda \in H_{2p}^{C_\lambda}(V; \underline{\mathbb{Z}}), \quad n \in H_{2p}^N(N; \underline{\mathbb{Z}})$$

où N est l'ensemble des composantes non propres de $X \cap Y$, \sum représentant une somme localement finie.

(7.4) Si V est une variété analytique connexe, $h(X)$ et $h(Y)$ considérés dans $H_*^X(V; \underline{\mathbb{Z}})$ et $H_*^Y(V; \underline{\mathbb{Z}})$ ont un produit d'intersection

$$h(X) \cdot h(Y) \in H_{2p}^{X \cap Y}(V; \underline{\mathbb{Z}}) \quad .$$

La composante de $h(X) \cdot h(Y)$ dans $H_{2p}^{C_\lambda}(V; \underline{\mathbb{Z}})$ est alors un multiple entier de $h(C_\lambda)$ d'après le corollaire de (6). On le note $i(X \cdot Y; C_\lambda)$. Si V est de nouveau un espace analytique, on définit $i(X \cdot Y; C_\lambda)$ comme étant $i(X' \cdot Y'; C'_\lambda)$ où X' , Y' , C'_λ sont les intersections de X , Y , C_λ et de l'ouvert des points simples de V .

On montre alors que $i(X \cdot Y; C_\lambda)$ possède les propriétés habituelles de la multiplicité d'intersection.

Remarque. - Ce qui précède ne constitue qu'une partie du travail de BOREL-HAEFLIGER, ces auteurs étudient aussi les espaces analytiques réels, dont il n'a pas été question ici dans un but de simplification, de façon que ce texte soit d'une longueur raisonnable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREL (A.) et HAEFLIGER (A.). - Classe d'homologie fondamentale, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 461-513.
- [2] BOREL (A.) et MOORE (J. C.). - Homology theory for locally compact spaces, Mich. math. J., t. 7, 1960, p. 137-159.
- [3] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg, 13).