ALAIN GUICHARDET

Représentations des groupes de Lie nilpotents

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 249, p. 119-127
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__119_0>

Séminaire BOURBAKI
15e année, 1962/63, n° 249

Février 1963

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

par Alain GUICHARDET

[d'après KIRILLOV (*)]

Il s'agit des représentations unitaires continues des groupes de Lie nilpotents réels simplement connexes (on verra plus loin ce qu'on peut dire des groupes non simplement connexes). Soit donc G un tel groupe ; on va donner

- une description de l'ensemble $\hat{G}$ des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G ;

- une description des opérations de restriction, induction et multiplication tensorielle des représentations irréductibles (plus précisément des décompositions des résultats de ces opérations) ;

- les caractères infinitésimaux des représentations irréductibles ;

- les caractères globaux des représentations irréductibles ;

- la formule de Plancherel pour G ;

- une description partielle de la topologie de $\hat{G}$ (dite "topologie de Jacobson").

1. Description de $\hat{G}$.

Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G , $\mathfrak{g}'$ l'espace vectoriel dual, ω' la représentation coadjointe de G dans $\mathfrak{g}'$; on aura à considérer les orbites de ω' dans $\mathfrak{g}'$ et on les appellera simplement orbites. Soient f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie telle que $[\mathfrak{h} , \mathfrak{h}] \subset \operatorname{Ker} f$ (une telle sous-algèbre de Lie sera dite subordonnée à f), $H = \exp \mathfrak{h}$, V la représentation unidimensionnelle de H définie par

$$V(\exp x) = e^{i f(x)} \quad ;$$

notons $U_{f,\mathfrak{h}}$ la représentation de G induite par V ; cette représentation agit dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}$ des fonctions φ sur G vérifiant

- $\varphi(st) = V(s)\, \varphi(t)$ pour $s \in H$ et $t \in G$;

- $\int |\varphi(s)|^2 \, d\mu < +\infty$, μ désignant une mesure invariante sur l'espace homogène G/H ;

(*) KIRILLOV (A. A.). - Unitarnye predstavlenij nil' potentnykh grupp Li, Uspekhi mat. Nauk, t. 17, 1962, n° 4, p. 57-110.

elle est donnée par la formule

$$(U_{f,\mathfrak{h}}(s)\ \varphi)(t) = \varphi(ts) \qquad ;$$

remarquons que $\mathcal{H}$ peut être considéré comme l'espace des fonctions de carré sommable sur G/H, lequel est homéomorphe à un espace $\underset{\sim}{R}^m$.

THÉORÈME 1.

(i) Toute classe de représentations irréductibles de G s'obtient de cette façon ;

(ii) $U_{f,\mathfrak{h}}$ est irréductible si et seulement si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre subordonnée à f de dimension maximum ;

(iii) $U_{f,\mathfrak{h}}$ et $U_{f_1,\mathfrak{h}_1}$, supposées irréductibles, sont équivalentes si et seulement si f et f_1 sont sur une même orbite.

La méthode générale est la récurrence sur la dimension n de G ; le théorème est vrai pour $n = 1, 2, 3$ (pour le groupe Γ_3 de dimension 3, voir § 7).

L'assertion (i) est la plus facile à démontrer : on montre que toute représentation irréductible de G est <u>monomiale</u>, i. e. induite par une représentation unidimensionnelle d'un certain sous-groupe, et ceci entraîne l'assertion, puisque toute représentation unidimensionnelle est évidemment de la forme V précédente ; la récurrence se fait de la façon suivante : soient $\mathfrak{z}$ et Z les centres de $\mathfrak{g}$ et G, et soit U une représentation irréductible de G ; $U|Z$ est scalaire et correspond à une forme linéaire sur $\mathfrak{z}$; soit $\mathfrak{z}_0$ le noyau de cette forme ; deux cas sont possibles :

a. $\mathfrak{z}_0 \neq \{0\}$; alors U est triviale sur $\exp \mathfrak{z}_0$ et peut être considérée comme une représentation de $G/\exp \mathfrak{z}_0$, de dimension $< \dim G$;

b. $\mathfrak{z}_0 = \{0\}$; alors $\dim \mathfrak{z} = 1$ et on doit faire une étude spéciale des algèbres de Lie nilpotentes de dimension $\geqslant 4$ ayant un centre de dimension 1.

Soient donc $\mathfrak{g}$ une telle algèbre, $\mathfrak{a}$ un idéal de dimension 2 tel que $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{z}$, $\mathfrak{g}_1$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$; soient z un élément non nul de $\mathfrak{z}$, y un élément de $\mathfrak{a} - \mathfrak{z}$; pour tout $u \in \mathfrak{g}$, on a

$$[u, y] = \lambda(u)\ z$$

où λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$, non nulle puisque $\mathfrak{a}$ n'est pas central ; $\mathfrak{g}_1$ est le noyau de λ et est un idéal de codimension 1.

Soient $A = \exp \mathfrak{a}$, $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$; on identifie A à $\underset{\sim}{R}^2$ par l'application

$$\exp(\alpha y + \beta z) \to (\alpha, \beta) \qquad ;$$

alors $\hat{A}$ s'identifie naturellement à $\underset{\sim}{R}^2$ dont nous noterons (μ , ν) un point quelconque ; par ailleurs on calcule aisément l'action de G dans $\hat{A}$: l'automorphisme défini par exp u a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda(u) & 1 \end{pmatrix}$$

et on voit que les orbites sont

- les points de la droite $\nu = 0$
- les droites $\nu = \text{Cte} \neq 0$, ayant pour stabilisateur G_1 .

La théorie des représentations induites de Mackey donne le lemme suivant.

LEMME 1. - Soit (μ , ν) , où $\nu \neq 0$, un élément de $\hat{A}$; l'application

$$W \to \text{représentation induite par } W$$

établit une correspondance bijective entre classes de représentations irréductibles W de G_1 dont la restriction à A est un multiple du caractère (μ , ν) et classes de représentations irréductibles de G dont la restriction à A est "concentrée" sur l'orbite de (μ , ν) .

Revenons à la démonstration de l'assertion (i) dans le cas (b) ; U étant non triviale sur Z , $U|A$ est "concentrée" sur une orbite $\nu = \text{Cte} \neq 0$; par suite U est induite par une représentation irréductible de G_1 et on est ramené à un groupe de dimension $< \dim G$.

Pour démontrer les autres assertions du théorème 1, la récurrence est plus complexe car elle doit aussi se faire sur $\mathfrak{g}$, f , $\mathfrak{h}$; prouvons par exemple que si $\mathfrak{h}$ est de dimension maximum, $U_{f,\mathfrak{h}}$ est irréductible ; on a facilement $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{z}$ ainsi que

$$\exp(\mathfrak{z} \cap \operatorname{Ker} f) = Z \cap \operatorname{Ker} U_{f,\mathfrak{h}} \qquad ;$$

posons $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z} \cap \operatorname{Ker} f$ et $Z_0 = \exp \mathfrak{z}_0$; deux cas sont possibles :

a. $z_0 \neq \{0\}$; alors f , $\mathfrak{h}$, $U_{f,\mathfrak{h}}$ donnent par passage aux quotients des objets $\tilde{f}$, $\tilde{\mathfrak{h}}$, $\tilde{U}_{f,\mathfrak{h}}$ et on voit facilement que $\tilde{U}_{f,\mathfrak{h}}$ est associée à $\tilde{f}$ et $\tilde{\mathfrak{h}}$ comme $U_{f,\mathfrak{h}}$ à f et $\mathfrak{h}$.

b. $z_0 = \{0\}$; alors $\dim z = 1$ et on a à nouveau à distinguer deux cas :

b_1. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$; désignons par $\tilde{U}_{f,h}$ la représentation de G_1 induite par V ; $U_{f,h}$ est la représentation de G induite par $\tilde{U}_{f,h}$ et l'irréductibilité de $\tilde{U}_{f,h}$ résulte de l'hypothèse de récurrence et celle de $U_{f,h}$ - du lemme 1.

b_2. $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$; on fait rentrer $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_1$ au moyen du lemme suivant.

LEMME 2. – Il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$ subordonnée à f, de même dimension que $\mathfrak{h}$, telle que $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}_1$ et $U_{f,\mathfrak{h}'} \sim U_{f,\mathfrak{h}}$.

Soit $x \in \mathfrak{h}$, $x \notin \mathfrak{g}_1$ tel que $[x, y] = z$; posons
$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 + \mathbb{R}y \quad ;$$
on a $y \notin \mathfrak{h}$ car dans le cas contraire $0 = f([x, y]) = f(z)$; donc $\dim \mathfrak{h}' = \dim \mathfrak{h}$. Puis $\mathfrak{h}'$ est subordonnée à f (vérification immédiate). Reste l'équivalence des représentations.

Posons $\mathfrak{m} = \operatorname{Ker} f \cap \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$; on vérifie sans peine que $\mathfrak{m}$ est un idéal dans $\mathfrak{h} + \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + \mathbb{R}y$ et que $\mathfrak{h} + \mathfrak{h}'$ est somme directe de $\mathfrak{m}$ et de la sous-algèbre de Lie $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y + \mathbb{R}z$; donc $(\mathfrak{h} + \mathfrak{h}')/\mathfrak{m}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de Γ_3, i. e. à l'algèbre de Lie ayant une base e_1, e_2, e_3 et une table de multiplication dont le seul crochet non nul est $[e_1, e_2] = e_3$. Appelons V et V' les représentations unidimensionnelles de H et $H' = \exp \mathfrak{h}'$ associées à f et T et T' les représentations de $\exp(\mathfrak{h} + \mathfrak{h}')$ induites par V et V' ; il suffit de montrer que T et T' sont équivalentes ; or elles sont triviales sur $\exp \mathfrak{m}$ (vérification triviale) ; il suffit donc de montrer que les représentations correspondantes de $\exp(\mathfrak{h} + \mathfrak{h}')/\exp \mathfrak{m}$ (isomorphe à Γ_3) sont équivalentes et elles le sont parce que le lemme est vrai pour Γ_3.

Conclusion. – Nous avons ainsi établi une correspondance bijective entre orbites de G dans $\mathfrak{g}'$ et classes de représentations irréductibles de G, correspondance que nous noterons $\Omega \to U_\Omega$; on démontre par ailleurs la relation
$$\operatorname{codim} \mathfrak{h} = \frac{1}{2} \dim \Omega$$
d'où l'on déduit que toute orbite est de dimension paire et aussi que U_Ω peut être réalisée dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^m)$ où $m = \frac{1}{2} \dim \Omega$.

2. Opérations sur les représentations irréductibles.

THÉORÈME 2. – Soit G_o un sous-groupe fermé connexe de G, $\mathfrak{g}_o$ son algèbre de Lie, p la projection canonique de $\mathfrak{g}'$ sur $\mathfrak{g}'_o$.

(i) Pour toute orbite Ω de G dans $\mathfrak{g}'$, $U_\Omega | G_o$ se décompose suivant les représentations de G_o correspondant aux orbites de G_o dans $\mathfrak{g}'_o$ qui sont contenues dans $p(\Omega)$;

(ii) pour toute orbite Ω de G_o dans $\mathfrak{g}'_o$, la représentation de G induite par U_Ω se décompose suivant les représentations de G correspondant aux orbites de G dans $\mathfrak{g}'$ qui rencontrent $p^{-1}(\Omega)$;

(iii) si Ω_1 et Ω_2 sont deux orbites de G dans g', $U_{\Omega_1} \otimes U_{\Omega_2}$ se décompose suivant les représentations correspondant aux orbites de G dans g' contenues dans $\Omega_1 + \Omega_2$.

Pour démontrer les deux premières assertions on commence par prendre G_o de codimension 1 (après quoi on itérera le procédé) ; on constate alors que, relativement à la projection p les orbites de G dans g' sont de deux sortes :

- orbites saturées

- orbites non saturées : elles rencontrent chaque ensemble $p^{-1}(\{g\})$ en un point au plus.

Si Ω est non saturée, $p(\Omega)$ est une orbite Ω_o de G_o dans g'_o (on le voit en utilisant la parité de la dimension des orbites), $U_\Omega|G_o$ est équivalente à U_{Ω_o}, $p^{-1}(\Omega_o)$ est réunion d'une famille à un paramètre d'orbites non saturées Ω_t ; la représentation de G induite par U_{Ω_o} se décompose suivant les représentations U_{Ω_t}.

Si Ω est saturée, $U_\Omega|G_o$ est intégrale d'une famille à un paramètre de représentations irréductibles deux à deux transformées par G ; elles correspondent aux orbites de G_o dans g'_o qui sont contenues dans $p(\Omega)$ et chacune induit à G la représentation U_Ω.

Pour démontrer la troisième assertion on considère $U_{\Omega_1} \otimes U_{\Omega_2}$ comme la restriction à la diagonale de la représentation produit $U_{\Omega_1} \otimes U_{\Omega_2}$ de $G \times G$, laquelle représentation correspond à l'orbite $\Omega_1 \times \Omega_2$.

3. Caractère infinitésimaux des représentations irréductibles.

On donne, en outre du caractère infinitésimal d'une représentation irréductible U, des précisions sur l'image $U(\mathcal{U}(g))$.

THÉORÈME 3. - Toute représentation irréductible U peut être réalisée dans un espace $L^2(\mathbb{R}^m)$ de façon que $U(\mathcal{U}(g))$ soit l'algèbre de tous les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux.

Pour la réalisation dans un espace $L^2(\mathbb{R}^m)$ voir conclusion du § 1 ; le reste se démontre par récurrence ; ici encore deux cas sont à distinguer :

- $\mathfrak{z}_o \neq \{0\}$: cas trivial ;

- $\mathfrak{z}_o = \{0\}$, $\dim \mathfrak{z} = 1$; alors U est induite par une représentation irréductible V de G_1 qu'on peut réaliser dans un espace $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^r)$ et dont la restriction à A est un multiple d'un caractère $(0, \nu)$ où $\nu \neq 0$; on peut réaliser U dans $L^2_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}^{r+1})$ par la formule

$$(U(s_1 \exp \alpha x)\varphi)(\gamma) = V(\exp \gamma x . s_1 . \exp(-\gamma x))\ \varphi(\gamma + \alpha)$$

(on note x un élément fixé de $g - g_1$; alors tout élément s de G s'écrit d'une manière unique $s = s_1 \exp \alpha x$ où $s_1 \in G_1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$).

On voit alors que

- $U(x)$ est l'opérateur de dérivation par rapport à γ considéré comme la $r + 1$-ième variable ;

- $U(y)$ est l'opérateur de multiplication par $i\nu\gamma$;

- $U(z)$ est l'opérateur scalaire $i\nu$;

- $(U(w)\ \varphi)(\gamma) = V(\omega(\exp \gamma x)\ w)\ \varphi(\gamma)$ pour tout élément w d'un certain sous-espace vectoriel de g_1 complémentaire de $\mathbb{R}y + \mathbb{R}z$ (ω désigne la représentation adjointe de G dans g).

Reste à voir que les $V(\omega(\exp \gamma x)\ w)$ engendrent l'algèbre des opérateurs différentiels à ceofficients polynomiaux relatifs aux r premières variables - ce qui résulte sans grande difficulté de l'hypothèse de récurrence.

<u>Caractère infinitésimal de</u> U_Ω. - Si U est une représentation irréductible de G, les éléments du centre $\mathcal{Z}(g)$ de $\mathcal{U}(g)$ ont pour images des opérateurs scalaires ; la fonction ainsi définie sur $\mathcal{Z}(g)$ est dite <u>caractère infinitésimal de</u> U. Les éléments de $\mathcal{U}(g)$ peuvent être considérés d'une façon naturelle comme des polynômes sur g' ; GEL'FAND a montré que, pour les éléments de $\mathcal{Z}(g)$, ces polynômes sont invariants par $\omega'(G)$ et inversement ; ceci permet d'énoncer le

THÉORÈME 4. - La valeur en $p \in \mathcal{Z}(g)$ du caractère infinitésimal de la représentation U_Ω est égal à la valeur sur $i\Omega$ du polynôme représentatif de p

qui se démontre par la méthode habituelle de récurrence.

On déduit de là une description intéressante, sinon de $\hat{G}$ tout entier, du moins d'une partie de $\hat{G}$ ouverte et partout dense ; il résulte en effet d'un théorème de CHEVALLEY qu'on peut trouver des éléments $p_0, p_1, \ldots, p_k$ de $\mathcal{Z}(g)$ (identifiés à des polynômes sur g') tels que dans le sous-ensemble de g' défini par $p_0(f) \neq 0$ les orbites soient caractérisées par des conditions $p_i(f) = $ Cte pour $i = 1, 2, \ldots, k$.

Les orbites en question seront appelées <u>orbites en position générale</u> ; les éléments de $\hat{G}$ qui leur correspondent sont caractérisés par leurs caractères infinitésimaux.

4. Caractères globaux des représentations irréductibles.

On notera $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur G (cette phrase a un sens puisque G et $\mathfrak{g}$ sont isomorphes en tant que variétés).

THÉORÈME 5. - Soit Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}'$; pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$, l'opérateur $U_\Omega(\varphi)$ est à trace et la fonction $\varphi \to \operatorname{tr} U_\Omega(\varphi)$ est une distribution tempérée ; la transformée de Fourier de la distribution qui lui correspond sur $\mathfrak{g}$ est une mesure positive, invariante par G et portée par Ω.

Première assertion : réalisons U_Ω comme il a été dit au théorème 3 ; soit $p \in U(\mathfrak{g})$ tel que $(U_\Omega(p))^{-1}$ existe et soit un opérateur à trace, et soit $\varphi \in \mathcal{S}$; on a

$$\begin{aligned} U_\Omega(\varphi) &= (U_\Omega(p))^{-1}\, U_\Omega(p)\, U_\Omega(\varphi) \\ &= (U_\Omega(p))^{-1}\, U_\Omega(p\varphi) \end{aligned}$$

où $p\varphi$ a un sens, pourvu qu'on considère p comme un opérateur différentiel sur G ; alors $U_\Omega(p\varphi)$ est un opérateur continu, ce qui démontre l'assertion.

La seconde assertion se démontre par récurrence ; deux cas possibles :

a. $\mathfrak{z}_0 \neq \{0\}$: quand f parcourt Ω la forme quotient $\tilde{f}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0$ parcourt une orbite $\tilde{\Omega}$ de G/Z_0 dans $(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0)'$ à cause de la relation

$$(\omega'(s)\ f)^{\sim} = \tilde{\omega}'(\tilde{s})\ \tilde{f}$$

et $f \to \tilde{f}$ est un homéomorphisme de Ω sur $\tilde{\Omega}$; la mesure cherchée sur Ω est transportée de celle qui existe sur $\tilde{\Omega}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

b. $\mathfrak{z}_0 = \{0\}$; $\dim \mathfrak{z} = 1$: U_Ω est induite par une représentation irréductible de G_1 et Ω est saturée ; sa projection sur $\mathfrak{g}_1'$ est réunion d'une famille à un paramètre d'orbites Ω_t, chaque Ω_t portant une mesure μ_t d'après l'hypothèse de récurrence ; la mesure cherchée sur Ω est produit de l'intégrale des μ_t par la mesure de Lebesgue.

COROLLAIRE. - G est CCR (donc de type I).

5. Formule de Plancherel.

Identifions l'ensemble Λ des orbites en position générale à une partie de $\mathbb{R}^k$; on montre alors que la mesure de Plancherel (ou mesure intervenant dans la décomposition de la représentation régulière en représentations irréductibles) est portée par Λ et définie par une densité rationnelle ; plus précisément :

THÉORÈME 6. - Il existe une fonction rationnelle $R(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ telle que, pour $\varphi \in S$, on ait

$$\int |\varphi(s)|^2\, ds = \int_\Lambda \operatorname{tr}(U_\lambda(\varphi)^* U_\lambda(\varphi))\, |R(\lambda)|\, d\lambda \quad .$$

On remplace le premier membre par $\int |\widehat{\varphi \circ \exp}(f)|^2\, df$; la mesure cherchée est alors celle qu'on obtient en désintégrant la mesure df suivant les mesures portées par les diverses orbites en vertu du théorème 5 ; la démonstration du fait que la mesure cherchée est définie par une densité rationnelle se fait par une récurrence un peu différente de la récurrence habituelle ; on prend un sous-groupe G_0 de codimension 1 et on distingue deux cas :

a. les dimensions des orbites de position générale dans g' et g'_0 sont égales; alors presque toutes les orbites dans g' sont non saturées ;

b. ces dimensions sont différentes ; alors presque toutes les orbites dans g' sont saturées.

6. Topologie de $\hat{G}$.

THÉORÈME 7. - L'application $\Omega \to U_\Omega$ est continue quand on munit l'ensemble des orbites de la topologie quotient de celle de g' et $\hat{G}$ de la topologie de Jacobson.

On peut définir la topologie de Jacobson de la façon suivante : pour toute représentation U de G dans un espace $\mathcal{H}$ appelons fonction continue de type positif associée à U toute fonction sur G de la forme $s \to (U(s)\,\xi \mid \xi)$, où ξ appartient à $\mathcal{H}$; alors un élément U de $\hat{G}$ est adhérent à une partie E de $\hat{G}$ si et seulement si toute f. c. t. p. associée à U est limite uniforme sur tout compact de f. c. t. p. associée à des éléments de E. On démontre le théorème en considérant une suite convergente d'orbites $\Omega_n \to \Omega$ et on s'arrange pour réaliser les représentations U_{Ω_n} dans un même espace $L^2(\mathbb{R}^m)$.

On a par ailleurs de fortes raisons de penser que l'application $\Omega \to U_\Omega$ est un homéomorphisme ; on sait en tous cas que sa restriction à Λ est un homéomorphisme.

7. Étude d'un exemple.

Prenons pour G le groupe Γ_3 des matrices triangulaires

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que nous noterons aussi (a, b, c) ; si on écrit (x, y, z) un élément quelconque de g', la représentation coadjointe prend la forme

$$\omega'(a, b, c).(x, y, z) = (x - bz, y + az, z)$$

d'où deux sortes d'orbites :

- les points du plan $z = 0$, donnant des représentations de dimension 1 ;
- les plans $z = Cte \neq 0$, donnant des représentations de dimension infinie.

$\hat{G}$ est donc réunion d'un plan et d'une droite privée d'un point ; la topologie de Jacobson est identique à la topologie quotient de celle de g' ; les orbites en position générale sont les plans $z = Cte \neq 0$; la mesure de Plancherel est la mesure de Lebesgue dz.

8. Généralisations diverses.

a. Groupes de Lie nilpotents connexes non simplement connexes. - Soit G un tel groupe ; tous les résultats restent valables à condition d'appeler g' non pas l'espace vectoriel dual de g, mais son sous-groupe formé des formes linéaires sur g qui prennent des valeurs entières sur le noyau de l'application exponentielle ; en effet une telle forme linéaire donne une représentation du recouvrement universel de G triviale sur le sous-groupe discret central.

b. Groupes de Lie complètement résolubles. - Les théorèmes 1 et 2 restent vrais ; le rôle joué ici par le groupe Γ_3 peut alors être joué, soit par Γ_3, soit par le groupe des matrices réelles $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Analogie formelle avec la théorie des groupes semi-simples. - Soit $G = SL(2, \mathbb{C})$; on identifie g à g' au moyen de la forme de Killing ; on a alors la représentation coadjointe

$$\omega'(s).x = sxs^{-1} \quad ;$$

si l'on fait les constructions du § 1 à partir des orbites des matrices diagonales à valeurs propres simples, on obtient la série principale de représentations irréductibles ; avec des valeurs propres multiples on obtiendrait probablement la série complémentaire.