ADRIEN DOUADY

Démonstration élémentaire d'un théorème de périodicité de Bott

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 259, p. 241-249
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__241_0>

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 259

Décembre 1963

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE D'UN THÉORÈME DE PÉRIODICITÉ DE BOTT

par Adrien DOUADY

[d'après un exposé de ATIYAH et BOTT, fait à Seattle en 1963]

Dans cet exposé, quand on parlera de fibrés, il s'agira de fibrés vectoriels complexes (on n'exige pas que la dimension soit la même sur les différentes composantes connexes de la base). Tous les espaces considérés seront supposés paracompacts.

I. Sorites sur le foncteur K.

A. Les foncteurs K et K^{-n}.

Pour tout espace X, soit $J(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés sur X. Muni de l'opération $\oplus$ (somme directe), $J(X)$ est un monoïde commutatif. On note $K(X)$ son groupe symétrisé. L'application canonique $J(X) \to K(X)$ n'est pas injective en général, car il peut y avoir dans $J(X)$ des éléments non réguliers. Si E est un fibré sur X, on notera $\hat{E}$ la classe de E dans $K(X)$. On a donc

$$\hat{E} = \hat{E}' \iff \exists\ F\ ,\ E \oplus F \approx E' \oplus F \quad .$$

K est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces paracompacts et classes d'homotopie d'applications continues dans la catégorie des groupes commutatifs.

Soit $S^n \subset R^{n+1}$ la sphère unité euclidienne ; on prend pour point de base $e = (1\ ,0\ ,\ \dots\ ,0)$. Soit D^n_+ (resp. D^n_-) l'ensemble des $s = (s_0\ ,\ \dots\ ,s_n)$ tels que $s_n \geq 0$, (resp. ≤ 0). On a $D^n_+ \cap D^n_- = S^{n-1} \ni e$.

On pose $K^{-n}(X) = \operatorname{Ker}[\varepsilon^* : K(S^n \times X) \to K(X)]$, où ε est l'injection de $X = e \times X$ dans $S^n \times X$. Si $\pi : S^n \times X \to X$ est la projection, on a $\varepsilon^* \circ \pi^* = I_{K(X)}$, et $K(S^n \times X) = K(X) \oplus K^{-n}(X)$.

B. Fibré différence.

Soit E un fibré sur X, notons E^o le fibré sur $S^{n-1} \times X$, image réciproque de E par la projection de $S^{n-1} \times X$ sur X, et soit f un automorphisme de

E^o. Nous allons définir un élément $d(E, f)$ de $K^{-n}(X)$. Notons E^+ (resp. E^-) le fibré sur $D^n_+ \times X$ (resp. $D^n_- \times X$) image réciproque de E. Soit E^f le fibré sur $S^n \times X$ obtenu en recollant E^+ et E^- à l'aide de

$$f : E^-_{|S^{n-1}\times X} \xrightarrow{\approx} E^+_{|S^{n-1}\times X} \quad ;$$

on pose $d(E, f) = \hat{E}^f - \hat{E}^I$. C'est bien un élément de $K^{-n}(X)$, car les fibrés E^f et E^I induisent sur $X = e \times X$ des fibrés isomorphes à E : pour E^I, qui n'est autre que l'image réciproque de E par la projection, c'est évident, et pour E^f, c'est deux fois plus évident car on a le choix entre deux isomorphismes.

Si f est un automorphisme de E^o, son normalisé $\check{f} = f \circ (\pi^* \varepsilon^* f)^{-1}$ est un automorphisme de E^o induisant l'identité au-dessus de $X = e \times X$, et on a $E^{\check{f}} \approx E^f$. On a également $\check{\check{f}} = \check{f}$.

Tout endomorphisme a de E donne naissance à un endomorphisme de E^o que nous noterons encore a.

Propriétés élémentaires.

(i) $d(E, I) = 0$.

(ii) Si f et g sont homotopes parmi les automorphismes de E^o, $d(E, f) = d(E, g)$.

(iii) $d(E, \check{f}) = d(E, f)$.

(iv) $d(E \oplus E', f \oplus f') = d(E, f) + d(E', f')$.

(v) Si f et g sont deux automorphismes de E^o,

$$d(E, f \circ g) = d(E, f) + d(E, g) \quad .$$

La propriété (v) se déduit des précédentes en remarquant que les automorphismes $f \circ g \oplus I$ et $f \oplus g$ de $(E \oplus E)^o$ sont homotopes.

C. Description de $K^{-n}(X)$.

Pour tout fibré E sur X, notons $A(E)$ le groupe des automorphismes normalisés de E^o (i. e. qui induisent l'identité au-dessus de $e \times X$). Nous écrirons $f \simeq g$ si f et g sont homotopes dans $A(E)$. Le théorème suivant fait apparaître $K^{-n}(X)$ comme quotient de l'ensemble (?) des couples (E, f) où $f \in A(E)$ par une relation d'équivalence.

THÉORÈME 1.

(a) Tout élément ξ de $K^{-n}(X)$ se met sous la forme $d(E\,,\,f)$, où E est un fibré sur X et $f \in A(E)$;

(b) Soient $f \in A(E)$ et $f' \in A(E')$; pour que $d(E\,,\,f) = d(E'\,,\,f')$, il faut et il suffit qu'il existe un fibré F sur X tel que

$$f \oplus I_{E'} \oplus I_F \simeq I_E \oplus f' \oplus I_F$$

dans $A(E \oplus E' \oplus F)$.

<u>Démonstration.</u>

(a) ξ s'écrit $\hat{G} - \hat{G}_1$, où G et G_1 sont des fibrés sur $S^n \times X$; posons $E = \varepsilon^* G$. Comme D^n_+ et D^n_- sont contractiles, on a des isomorphismes normalisés $\varphi^+ : E^+ \to G_{|D^n_+ \times X}$ (resp. φ^-), qui se recollent en un isomorphisme φ de E^f sur G, en posant $f = (\varphi^+)^{-1} \circ \varphi^-$. On a donc $G \approx E^f$, et de même $G_1 \approx E_1^f$. Or $\hat{E} - \hat{E}_1 = \varepsilon^*(\hat{G} - \hat{G}_1) = 0$ par hypothèse, donc
$\xi = \hat{E}^f - \hat{E}_1^f = \hat{E}^f - \hat{E}^I - \hat{E}_1^f + \hat{E}_1^I = d(E\,,\,f) - d(E_1\,,\,f_1) = d(E \oplus E_1\,,\,f \oplus f_1^{-1})$.

(b) Procédons en plusieurs pas :

(α) $\forall\ f\,,\,g \in A(E)$, $E^f \approx E^g \implies f \simeq g$. En effet, soit φ un isomorphisme normalisé de E^f sur E^g ; on a $g = \varphi^+_{|E^0} \circ f \circ (\varphi^-_{|E^0})^{-1}$, où φ^+ et φ^- sont les automorphismes de E^+ et E^- induits par φ. Mais $\varphi^+ \simeq \varphi^- \simeq I$, donc $f \simeq g$.

(β) Pour $f\,,\,g \in A(E)$, si $d(E\,,\,f) = d(E\,,\,g)$, il existe un fibré F sur X tel que $f \oplus I_F \simeq g \oplus I_F$. En effet $d(E\,,\,f) = d(E\,,\,g) \implies \hat{E}^f = \hat{E}^g$, et il existe un fibré H sur $S^n \times X$ tel que $E^f \oplus H \approx E^g \oplus H$. On peut supposer $H = F^h$, où $h \in A(F)$. D'après (α), $f \oplus h \simeq g \oplus h$; en composant avec $I \oplus h^{-1}$, on en déduit $f \oplus I_F \simeq g \oplus I_F$.

(γ) $d(E\,,\,f) = d(E'\,,\,f') \implies d(E \oplus E'\,,\,f \oplus I) = d(E \oplus E'\,,\,I \oplus f')$, et on déduit de (β) qu'il existe un fibré F sur X tel que

$$f \oplus I_{E'} \oplus I_F \simeq I_E \oplus f' \oplus I_F \quad .$$

La réciproque est immédiate.

II. Le théorème de Bott.

Dans ce paragraphe, $n = 2$ et l'espace X est supposé compact, sauf à la section F.

A. Enoncé du théorème.

Notons ζ la fonction définie sur S^1 par $\zeta(s_0, s_1) = s_0 + is_1$. Pour tout fibré E sur X, $\zeta I_E \in A(E)$; posons $\eta(E) = d(E, \zeta I_E)$.

THÉORÈME 2 (BOTT). - L'application $\eta : K(X) \to K^{-2}(X)$ est un isomorphisme.
Nous démontrerons ce théorème à partir du théorème 1 par une suite de réductions.

E étant un fibré sur X, un automorphisme f de E^o sera dit laurentien (resp. polynomial, resp. affine) s'il se met sous la forme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \zeta^k a_k$ (resp. $k \in \mathbb{N}$, resp. $k = 0, 1$), où les a_k sont des endomorphismes de E, tous nuls sauf un nombre fini. Si f est laurentien, (resp. polynomial, resp. affine), il en est de même de son normalisé $\check{f} = f \circ (\pi^* \varepsilon^* f)^{-1}$. Notons $A_L(E)$ (resp. $A_P(E)$, resp. $A_1(E)$) l'ensemble des automorphismes laurentiens (resp. polynomiaux, resp. affines) normalisés de E^o. On dira que f et g sont homotopes dans $A_L(E)$, et on écrira $f \simeq_L g$ s'il existe un élément $h \in A_L(E)$, où E est le fibré sur $X \times [0, 1]$, image réciproque de E, induisant f sur $X \times \{0\}$ et g sur $X \times \{1\}$ (resp. P, resp. 1).

B. Réduction au cas laurentien.

PROPOSITION 1.

(a) Tout élément ξ de $K^{-2}(X)$ se met sous la forme $d(E, f)$, où $f \in A_L(E)$.

(b) Soient $f \in A_L(E)$ et $f' \in A_L(E')$; si $d(E, f) = d(E', f')$, il existe un fibré F sur X tel que $f \oplus I_{E'} \oplus I_F \simeq_L I_E \oplus f' \oplus I_F$.

Démonstration.

(a) Soit Ω_m la mesure définie sur S^1 par

$$\Omega_m(\cos\theta, \sin\theta) = c_m(1 + \cos\theta)^m \, d\theta \qquad ,$$

où c_m est une constante choisie de façon que $\int \Omega_m = 1$. On peut mettre ξ sous la forme $d(E, f_1)$ avec $f_1 \in A(E)$. Posons $g = \Omega_m \star f$ (convolution) : g est laurentien, et pour m assez grand, g sera assez voisin de f_1 pour être un automorphisme de E^o homotope à f_1. Alors $f = \check{g}$ est un élément de $A_L(E)$ homotope à f_1, et on a $\xi = d(E, f)$.

(b) Soit F un fibré tel que $f_1 = f \oplus I_{E'} \oplus I_F$ et $f_1' = I_E \oplus f' \oplus I_F$ soient homotopes dans $A(E_1)$, où $E_1 = E \oplus E' \oplus F$. Soit $h_1 \in A(\overline{E}_1)$ une homotopie ; on peut approcher h_1 par un élément $h \in A_L(\overline{E}_1)$ qui induira sur $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ des éléments g et g' de $A_L(E_1)$ voisins de f_1 et f_1' respectivement. Alors g et g' seront homotopes à f_1 et f_1' , l'homotopie étant donnée par les barycentres sera laurentienne, et finalement $f_1 \underset{L}{\simeq} f_1'$.

C. Réduction au cas polynomial.

PROPOSITION 2.

(a) Tout élément ξ de $K^{-2}(X)$ se met sous la forme $d(E\ ,\ f) - \eta(G)$, où E et G sont des fibrés sur X et $f \in A_P(E)$.

(b) Soient $f \in A_P(E)$ et $f' \in A_P(E')$; si $d(E\ ,\ f) = d(E'\ ,\ f')$, il existe des fibrés F et F_1 sur X tels que

$$f \oplus I_{E'} \oplus I_F + \zeta I_{F_1} \underset{P}{\simeq} I_E \oplus f' \oplus I_F \oplus \zeta I_{F_1} \qquad .$$

Démonstration.

(a) ξ se met sous la forme $d(E\ ,\ f_1)$ où $f_1 \in A_L(E)$. Pour m assez grand,

$$f = \zeta^m f_1 \in A_P(E) \qquad .$$

Alors

$$\xi = d(E\ ,\ f_1) = d(E\ ,\ f) - md(E\ ,\ \zeta I) \qquad ,$$

d'où (a) en posant $G = E^m = E \oplus \dots \oplus E$.

(b) Soit F tel que $f_1 \underset{L}{\simeq} f_1'$ avec

$$f_1 = f \oplus I_{E'} \oplus I_F \quad \text{et} \quad f_1' = I_E \oplus f' \oplus I_F \qquad ,$$

et posons $E_1 = E \oplus E' \oplus F$. Soit $h \in A_L(\overline{E}_1)$ une homotopie laurentienne de f_1 à f_1' ; pour m assez grand,

$$\zeta^m h \in A_P(\overline{E}_1) \quad \text{et} \quad \zeta^m f_1 \underset{P}{\simeq} \zeta^m f_1' \qquad .$$

Posons $F_1 = E_1^m$. On vérifie que

$$\zeta^m I_{E_1} \oplus I_{F_1} \underset{P}{\simeq} I_{E_1} \oplus \zeta I_{F_1} \qquad .$$

Il en résulte que

$$f_1 \oplus \zeta I_{F_1} \underset{P}{\simeq} f_1' \oplus \zeta I_{F_1} \qquad .$$

D. Réduction au cas affine.

Si E est un fibré sur X, un endomorphisme de $(E^{m+1})^o$ peut être représenté par une matrice $((m+1)\times(m+1))$ dont chaque case est occupée par un endomorphisme de E^o. Si $f = a_o + \zeta a_1 + \dots + \zeta^m a_m$ est un élément de $A_p(X)$ de degré $\leq m$, définissons $L^m(f) : E^{m+1} \to E^{m+1}$ par :

$$L^m(f) = \begin{pmatrix} I & & & & 0 & a_m \\ -\zeta & \cdot & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & I & a_1 \\ 0 & & & & -\zeta & a_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & & & & 0 \\ -\zeta & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & -\zeta & I \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} I & & & 0 & a_m \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & f_k \\ & & & \cdot & \\ & & & I & \\ 0 & & & & f \end{pmatrix}$$

où $f_k = a_k + \dots + \zeta^{m-k} a_m$.

On voit sous la seconde forme que $L^m(f)$ est un automorphisme de $(E^{m+1})^o$ et sous la première qu'il est affine. Donc $\check{L}^m(f) \in A_1(E^{m+1})$.

LEMME 1.

(a) $\forall\ f \in A_p(E)$, $L^m(f) \underset{P}{\simeq} I_{E^m} \oplus f$.

(b) $\forall\ f \in A_1(E)$, $L^m(f) \underset{1}{\simeq} I_{E^m} \oplus f$.

Démonstration. – Posons

$$L_t^m(f) = \begin{pmatrix} I & & & & 0 \\ -t\zeta & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & -t\zeta & I \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} I & & & 0 & t^m a_m \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & t^k f_k \\ & & & \cdot & \\ & & & I & \\ 0 & & & & f \end{pmatrix} .$$

On a $L_o^m(f) = I_{E^m} \oplus f$ et $L_1^m(f) = L^m(f)$, et pour tout $t \in [0,1]$, $L_t^m(f)$ est un automorphisme polynomial de $(E^{m+1})^o$. De plus, si f est affine,

$$L_t^m(f) = \begin{pmatrix} I & 0 & & 0 & \\ -t\zeta & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & I & ta_1 \\ 0 & & & & -t\zeta & a_o + (1-t^2)\,\zeta a_1 \end{pmatrix}$$

est affine. L'homotopie cherchée est donnée par les $\check{L}_t^m(f)$.

PROPOSITION 3.

(a) Tout élément ξ de $K^{-2}(X)$ se met sous la forme $d(E\ ,\ f) - \eta(G)$, où E et G sont des fibrés sur X et $f \in A_1(E)$.

(b) Soient $f \in A_1(E)$ et $f' \in A_1(E')$; si $d(E\ ,\ f) = d(E'\ ,\ f')$, il existe des fibrés F et F_1 sur X tels que

$$f \oplus I_{E'} \oplus I_F \oplus \zeta I_{F_1} \underset{1}{\simeq} I_E \oplus f' \oplus I_F \oplus \zeta I_{F_1} \quad .$$

Démonstration.

(a) On peut mettre ξ sous la forme $d(E\ ,\ f)$, où $f \in A_p(E)$. Alors

$$\xi = d(E\ ,\ f) = d(E^{m+1}\ ,\ L^m(f)) \quad .$$

(b) Soient F_o et F_1 tels que $f_1 \underset{p}{\simeq} f_1'$, où

$$f_1 = f \oplus I_{E'} \oplus I_F \oplus \zeta I_{F_1} \quad \text{et} \quad f_1' = I_E \oplus f' \oplus I_F \oplus \zeta I_{F_1} \quad ,$$

et posons $E_1 = E \oplus E' \oplus F \oplus F_1$. Soit $h \in A_p(\overline{E_1})$ une homotopie polynomiale de f_1 à f_1' , de degré m . Alors $\check{L}^m(h) \in A_1(\overline{E_1^{m+1}})$ est une homotopie affine de $\check{L}^m(f_1)$ à $\check{L}^m(f_1')$, et

$$I_{E^m} \oplus f_1 \underset{1}{\simeq} \check{L}^m(f_1) \underset{1}{\simeq} \check{L}^m(f_1') \underset{1}{\simeq} I_{E^m} \oplus f_1' \quad ,$$

d'où (b) en posant $F = F_o + E_1^m$.

E. Démonstration du théorème de Bott.

Soit E un fibré sur X . Pour $f = a_o + \zeta a_1$, où a_o et a_1 sont des endomorphismes de E , la condition $f \in A_1(E)$ s'écrit :

(i) $a_o + a_1 = I$.

(ii) Pour tout $x \in X$ et toute valeur propre λ de $a_1(x)$, $R(\lambda) \neq \frac{1}{2}$.
Si $f \in A_1(E)$, on peut donc pour tout $x \in X$ décomposer de façon unique la fibre $E(x)$ en somme directe de deux espaces vectoriels $E_o(x)$ et $E_1(x)$, stables par $a_1(x)$, tels que les valeurs propres λ de l'endomorphisme de $E_o(x)$ (resp. $E_1(x)$) induit par $a_1(x)$ vérifient $R(\lambda) < \frac{1}{2}$ (resp. $R(\lambda) > \frac{1}{2}$) ; le lecteur se convaincra que cette décomposition sur chaque fibre définit une décomposition du fibré E sous la forme $E_o \oplus E_1$, qu'on appellera décomposition associée à f.

Nous pouvons maintenant démontrer facilement le théorème 2.

(a) η est surjectif.

Soit $\xi \in K^{-2}(X)$. On peut mettre ξ sous la forme $d(E, f) - \eta(G)$, où $f \in A_1(E)$. Soit $E = E_o \oplus E_1$ la décomposition associée à f. On a $f \overset{\sim}{-}_1 I_{E_o} \oplus \zeta I_{E_1}$: en effet, pour $t \in [0, 1]$, posons $f_t = tf + (1-t)(I_{E_o} \oplus \zeta I_{E_1})$.
Pour tout $x \in X$, $f_t(x) = a_o(x, t) + \zeta a_1(x, t)$, et toute valeur propre λ_t de $a_1(x, t)$ est barycentre de λ et 0 avec $R(\lambda) < \frac{1}{2}$, ou barycentre de λ et 1 avec $R(\lambda) > \frac{1}{2}$. Elles vérifient donc toujours $R(\lambda_t) \neq \frac{1}{2}$, et les $\lambda_t \in A_1(E)$ définissent l'homotopie cherchée.

On a maintenant $\xi = d(E_o \oplus E_1, I_{E_o} \oplus \zeta I_{E_1}) - \eta(G) = \eta(\hat{E}_1 - \hat{G})$.

(b) η est injectif.

Soit $\gamma = \hat{G} - \hat{G}' \in K^{-2}(X)$, et supposons que $\eta(\gamma) = 0$, c'est-à-dire $d(G, \zeta I_G) = d(G', \zeta I_{G'})$. D'après la proposition 3, (b), il existe des fibrés F_o et F_1 sur X tels que $f_1 \overset{\sim}{-}_1 f_1'$, où

$$f_1 = \zeta I_G \oplus I_{G'} \oplus I_F \oplus \zeta I_{F_1} \quad \text{et} \quad f_1' = I_G \oplus \zeta I_{G'} \oplus I_F \oplus \zeta I_{F_1} .$$

Posons $E = G \oplus G' \oplus F \oplus F_1$, $H = \overline{E}$; soit $h \in A_1(H)$ une homotopie affine de f_1 à f_1', soit $H = H_o \oplus H_1$ la décomposition de H associée à h. Les fibrés induits par H_1 sur $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ sont respectivement $G \oplus F_1$ et $G' \oplus F_1$, donc $G \oplus F_1 \approx G' \oplus F_1$, et $\hat{G} = \hat{G}'$.

F. Modification des hypothèses.

Le théorème 2 s'applique également au cas où X est un C-W-complexe de dimension finie, car pour un tel espace

$$K(X) = \Pi\,[X ; BU_\infty \times \underset{\sim}{Z}] \quad \text{et} \quad K^{-2}(X) = \Pi\,[X ; \Omega U_\infty] ,$$

en désignant par $\Pi\,[X ; Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de X dans Y. Il résulte du théorème 2 que l'application $BU_\infty \times \underset{\sim}{Z} \to \Omega U_\infty$ définie dans [3] (ou [6], exposé 11), et qui donne naissance à η, est une équivalence d'homotopie faible. La théorie des obstructions montre alors que $\eta : K(X) \to K^{-2}(X)$ est un isomorphisme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M.) and HIRZEBRUCH (F.). - Vector bundles and homogeneous spaces, Proceedings of the Symposia in pure Mathematics, Vol. 3 : Differential geometry, p. 7-38. - Providence, American mathematical Society, 1961.

[2] BOTT (R.). - The stable homotopy of the classical groups, Annals of Math., t. 70, 1959, p. 313-337.

[3] BOTT (R.). - Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité, Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Topologie algébrique et géométrie différentielle [89. 1959. Lille], Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 293-310.

[4] CARTAN (Henri). - Définition et propriétés élémentaires des groupes K(X) et K(X , A) [rédigé par L. ILLUSIE], Séminaire Cartan, t. 16, 1963/64, n° 3.

[5] DOUADY (A.). - Cycles analytiques, d'après Atiyah et Hirzebruch, Séminaire Bourbaki, t. 14, 1961/62, n° 223, 22 p.

[6] Séminaire CARTAN, t. 12, 1959/60 : Périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott. - Paris, Secrétariat mathématique, 1961.