

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

HERVÉ JACQUET

Mémoire de Langlands sur la dimension des espaces de formes automorphes

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 261, p. 259-273

http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__259_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE DE LANGLANDS
SUR LA DIMENSION DES ESPACES DE FORMES AUTOMORPHES

par Hervé JACQUET

La formule des traces de Selberg ramène le calcul de la dimension des espaces de formes automorphes à l'évaluation de certaines intégrales, du moins lorsqu'il y a un domaine fondamental compact [2]. Ces intégrales sont calculées par LANGLANDS [13].

1. Domaines symétriques bornés et fonctions noyaux.

Soit \bar{G} la composante neutre du groupe des transformations conformes d'un domaine symétrique borné. On sait que \bar{G} est semi-simple avec un centre trivial, et que tout sous-groupe compact maximal d'une composante simple a un centre non discret. Réciproquement si \bar{G} est un groupe connexe semi-simple possédant ces propriétés, c'est la composante neutre du groupe des transformations conformes d'un domaine symétrique borné que l'on peut construire comme suit. Soient \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de \bar{G} , $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ sa complexification, $G_\mathbb{C}$ le groupe de Lie complexe simplement connexe d'algèbre $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ et enfin G le sous-groupe réel connexe d'algèbre \mathfrak{g} . Donnons-nous une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ de \mathfrak{g} , l'involution de Cartan θ correspondante. Soient $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ et $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ les complexifications de \mathfrak{k} et \mathfrak{p} .

Pour toute racine α de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ par rapport à \mathfrak{h} , on a soit $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{k}_\mathbb{C}$ (on dit alors que α est compacte), soit $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}_\mathbb{C}$. Il est possible d'ordonner les racines de telle manière que $\mathfrak{p}_\mathbb{C} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$, \mathfrak{p}_+ désignant la somme des espaces \mathfrak{g}_α où α parcourt les racines positives non compactes. On a alors

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$$

$$[\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_+] = 0, \quad [\mathfrak{k}_\mathbb{C}, \mathfrak{p}_+] \subset \mathfrak{p}_+, \quad [\mathfrak{p}_-, \mathfrak{p}_+] \subset \mathfrak{k}_\mathbb{C}$$

etc. Désignons par $P_+, P_-, K_\mathbb{C}, K$ les sous-groupes connexes de $G_\mathbb{C}$ d'algèbres $\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-, \mathfrak{k}_\mathbb{C}, \mathfrak{k}$. On sait que $GK_\mathbb{C}P_-$ est un ouvert de $P_+K_\mathbb{C}P_-$, lequel est lui-même ouvert dans $G_\mathbb{C}$. Comme $G \cap K_\mathbb{C}P_- = K$ et $P_+ \cap K_\mathbb{C}P_- = \{1\}$, on voit que $G/K \stackrel{\sim}{=} GK_\mathbb{C}P_-/K_\mathbb{C}P_-$ s'identifie à un ouvert B de $P_+K_\mathbb{C}P^-/K_\mathbb{C}P^- \stackrel{\sim}{=} P_+$. L'exponentielle définit une bijection de \mathfrak{p}_+ sur P_+ ; donc P_+ est muni d'une structure d'espace vectoriel complexe et B est dans P^+ un domaine symétrique

borné. Enfin G opère dans $G/K \cong B$ par des transformations conformes. Si Z désigne le centre (fini) de G , on sait que Z est contenu dans le compact maximal K et $\bar{G} = G/Z$ est exactement la composante neutre du groupe des transformations conformes de B .

Soient σ une représentation unitaire irréductible de K_G dans un espace hilbertien F de dimension finie d . Pour tout p ($1 \leq p \leq +\infty$), $\mathcal{K}^p(\sigma)$ désigne l'espace des applications holomorphes φ de $W = P_- K_G$ dans F satisfaisant

$$(1) \quad \varphi(pkg) = \sigma(k) \varphi(g)$$

dont la restriction à G est une fonction de puissance p -ième intégrable.

D'après (1) ces fonctions sont bien déterminées par leur restriction à G . Ainsi $\mathcal{K}^2(\sigma)$ s'interprète comme sous-espace fermé de $L^2(G) \otimes F$. Ce sous-espace admet une fonction noyau K_G application de $W \times W$ dans $\mathcal{L}(F)$ caractérisée par les propriétés suivantes :

- (i) $x \rightarrow K_G(x, y)$ est holomorphe
- (ii) $K_G(x, y)^* = K_G(y, x)$
- (iii) $K_G(pkxg, yg) = \sigma(k) K_G(x, y) \quad (k \in K_G, p \in P_-, g \in G)$
- (iv) Pour toute $\varphi \in \mathcal{K}^2(\sigma)$, $\varphi(x) = \int_G K_G(x, y) \varphi(y) dy$.

Soient \mathfrak{k}'_c l'algèbre dérivée de \mathfrak{k} et c son centre. On a

$$\mathfrak{k}_c = \mathfrak{k}'_c + c \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}_c = \mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{k}'_c + c$$

Toute racine compacte α est nulle sur le centre et s'interprète comme racine de l'algèbre semi-simple \mathfrak{k}'_c par rapport à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{k}'_c$. Le vecteur de Weyl H_α correspondant est dans $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{k}'_c$. Au contraire si α est non compacte, α n'est pas nulle sur c . Désignons par Λ_σ le poids dominant de σ (i. e. la restriction de Λ_σ à $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{k}'_c$ est le poids dominant de la restriction de σ à \mathfrak{k}'_c) et par ψ_σ un vecteur unitaire de F correspondant à ce poids dominant. Pour toute racine positive, $\Lambda_\sigma(H_\beta)$ est un entier positif si β est compacte. Si pour toute racine positive non compacte $\Lambda_\sigma(H_\beta) + \rho(H_\beta) < 0$ (ρ désigne la demi-somme des racines positives), l'espace $\mathcal{K}^2(\sigma)$ n'est pas nul ([6], p. 612). Nous ferons désormais cette hypothèse.

Nous allons calculer la fonction $f(g) = (K(g, 1) \psi_\sigma, \psi_\sigma)$. Pour cela on remarque que

(i) $f(ng) = f(g)$ si n est dans le groupe engendré par l'algèbre $\sum CX_{+\alpha}$ (α parcourant les racines positives compactes).

(ii) $f(pg) = \psi(g)$, ($p \in P_-$).

(iii) $f(\exp Hg) = \exp \Lambda_{\sigma}(H) f(H)$ si $H \in \mathfrak{h}_c$.

(iv) $f(g \exp H) = \exp(-\Lambda_{\sigma}(H)) f(H)$ si $H \in \mathfrak{h}$.

D'après [5], les lemmes 6 et 14, il n'existe qu'une fonction à un facteur constant près satisfaisant à ces conditions. Pour la calculer introduisons la forme linéaire Λ_0 sur \mathfrak{h}_c qui coïncide avec Λ_{σ} sur $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{k}_c$, et est nulle sur les H_{α} où α est une racine positive non compacte. Cette forme linéaire est donc à valeurs entières positives sur tous les H_{α} . C'est le poids dominant d'une représentation irréductible ζ de G_c bien déterminée à une équivalence près. Soit Φ_0 un vecteur unitaire correspondant à Λ_0 .

D'autre part, soient $g \in G_c$ et $z \in \mathfrak{p}^+$ tels que $g \exp z \in P_+ K_c P_-$. On a

$$g \exp z = p_+ k p_- \quad (p_+ \in P_+, k \in K_c, p_- \in P_-) \quad .$$

Nous poserons $\mu(g, z) = k$ et $p_+ = \exp(g \cdot z)$. Du reste $g \exp z_1$ est encore dans $P_+ K_c P_-$ pour z_1 voisin de z , et l'application $z_1 \rightarrow g \cdot z_1$ de p_+ dans p_+ a pour application linéaire tangente au point z la restriction de $\text{ad} \mu(g, z)$ à p_+ . Finalement μ est une application holomorphe d'un ouvert de $G \times \mathfrak{p}_+$ dans K_c et vérifie

$$\mu(g_1 g_2, z) = \mu(g_1, g_2 \cdot z) \quad \text{et} \quad \mu(k, 0) = k \quad (k \in K_c) \quad .$$

Elle est notamment définie sur $G \times B$ (si on regarde B comme plongé dans p_+). Comme B est simplement connexe, μ définit une application encore notée μ de $\tilde{G} \times B$ dans \tilde{K}_c (\tilde{G} revêtement de G , \tilde{K}_c revêtement de K_c). Enfin \tilde{K}_c est produit direct d'un groupe compact et d'un groupe abélien C d'algèbre \mathfrak{c} . Nous désignerons par π l'application composée de la projection de \tilde{K}_c sur C et du logarithme (en sorte que si $X \in \mathfrak{k}_c$, $\pi(\exp X)$ n'est autre que le composant de X dans \mathfrak{c} pour la somme directe $\mathfrak{k}_c = \mathfrak{k}'_c \oplus \mathfrak{c}$) par ν la projection de \tilde{G} sur G , et nous poserons pour $g \in \tilde{G}$

$$\Gamma(g) = \pi(\mu^{-1}(g^{-1}, 0)) \quad \text{et} \quad \psi(g) = (\zeta(\nu(g)) \Phi_0, \Phi_0) \exp \Lambda_{\sigma}(\Gamma(g))$$

avec $\lambda_{\sigma} = \Lambda_{\sigma} - \Lambda_0$.

Alors

$$f(\nu(g)) = f(1) \psi(g) \quad \text{pour tout} \quad g \in \tilde{G} \quad .$$

Soit p_+ la demi-somme des racines positives non compactes. Si pour toute racine non compacte β ,

$$\Lambda_\sigma(H_\beta) + \rho(H_\beta) + 2\rho_+(H_\beta) < 1$$

la fonction ψ est intégrable ([6], p. 610). Comme σ est irréductible, il en est de même de $K(g, 1)$. Il en résulte que, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}^p(\sigma)$ ($1 \leq p \leq +\infty$), on a encore

$$\varphi(x) = \int_G K(x, y) \varphi(y) dy \quad .$$

Nous ferons désormais cette hypothèse supplémentaire.

2. Dimensions des espaces de formes automorphes.

Soit Γ un sous-groupe discret de G à quotient compact.

L'espace $\mathcal{K}(\Gamma, \sigma)$ des formes automorphes d'espèce σ pour Γ se définit comme l'espace vectoriel des applications holomorphes :

$$\varphi : W = P - K_c G \rightarrow F$$

vérifiant

$$\varphi(pkg\gamma) = \sigma(k) \varphi(g) \quad (p \in P_-, k \in K_c, g \in G, \gamma \in \Gamma) \quad .$$

Ces applications s'interprètent encore comme des applications de G ou de G/Γ dans F . Comme G/Γ est compact, toutes ces fonctions sont bornées $\mathcal{K}(\Gamma, \sigma)$ est donc un sous-espace de $\mathcal{K}^\infty(\sigma)$ et de $L^2(G/\Gamma, F)$. Il est de dimension finie, donc fermé.

Pour toute $\varphi \in \mathcal{K}(\Gamma, \sigma)$ on a :

$$\varphi(x) = \int_G K(x, y) \varphi(y) dy \quad .$$

On en conclut que la projection orthogonale A de $L^2(G/\Gamma, F)$ sur le sous-espace fermé $\mathcal{K}(\Gamma, \sigma)$ est donné par

$$(A\varphi)(x) = \int_G K(x, y) \varphi(y) dy \quad .$$

On a donc $\dim \mathcal{K}(\Gamma, \sigma) = \text{tr } A$. D'après la formule des traces [2], on a le théorème suivant :

THÉOREME.

$$\dim \mathcal{K}(\Gamma, \sigma) = \sum_{\gamma} v(G/\Gamma_\gamma) \chi(\gamma)$$

où

$$\chi(\gamma) = \int_{G/G_\gamma} \text{tr}\{K(g\gamma g^{-1}, 1)\} d\dot{g} \quad .$$

La somme est étendue à un ensemble de représentants des classes d'éléments conjugués de Γ .

Pour $\gamma \in G$, on désigne par G_γ le centralisateur de γ dans G et, si $\gamma \in \Gamma$, par Γ_γ le centralisateur de γ dans Γ .

Remarque. - Il est clair que G/G_γ admet une mesure G -invariante. Du reste tout élément $\gamma \in \Gamma$ est semi-simple ([1], p. 525), et le centralisateur G_γ d'un élément γ semi-simple est réductif donc unimodulaire : cela entraîne l'existence d'une mesure invariante $d\dot{g}$ sur G/G_γ . On impose naturellement que $dg = dg_\gamma d\dot{g}$.

D'autre part, pour tout $g \in G$, le déterminant de la restriction de $\mu(g, 0)$ à p^+ ne dépend que de la classe de g dans $B = G/K$, d'où une fonction $\Delta(z)$ sur B . Choisissons une fois pour toutes une mesure euclidienne $\mu(z)$ sur p^+ ; alors $|\Delta(z)|^2 \mu(z) = dz$ est une mesure invariante sur B . Nous imposerons à la mesure dk de K d'être de masse 1, et à dg de vérifier $dg = dk dz$.

Calculons $\chi(\gamma)$ ($\gamma \in \mathfrak{M}$). D'après les relations d'orthogonalité de Schur

$$\chi(\gamma) = d \int_{G/G_\gamma} \int_K f(kg\gamma g^{-1} k^{-1}) dk d\dot{g} \quad .$$

Soit γ' un élément de \tilde{G} qui se projette sur γ . L'intégrale précédente s'écrit

$$\begin{aligned} \chi(\gamma) &= df(1) \int_{G/G_\gamma} \int_K \psi(kg\gamma' g^{-1} k^{-1}) dk d\dot{g} \\ &= df(1) [G : G_\gamma^0]^{-1} \int_{G/G_\gamma^0} \int_K \psi(kg\gamma' g^{-1} k^{-1}) dk d\dot{g} \quad . \end{aligned}$$

(On écrit $g\gamma' g^{-1}$ pour $g'\gamma'g'^{-1}$, g' étant un élément de \tilde{G} qui se projette sur g .) On calcule facilement $df(1) = \chi(1)$

$$df(1) = \chi(1) = \frac{(-1)^b}{v(B)} \prod_{\beta \in P} \left(\frac{\Lambda_\sigma(H) + \rho(H_\beta)}{\rho(H_\beta)} \right)$$

$v(B)$ désignant le volume euclidien de B et b la dimension complexe de B ,

Nous allons calculer χ par une méthode de prolongement analytique.

Pour toute forme linéaire λ de \mathfrak{h}_c nulle sur $\mathfrak{k}' \cap \mathfrak{h}_c$, posons

$$d_\lambda = \frac{(-1)^b}{v(B)} \prod_{\beta \in P} \left(\frac{\Lambda(H) + \rho(H_\beta)}{\rho(H_\beta)} \right) \quad (\Lambda = \lambda + \Lambda_0)$$

$$\psi_\lambda(g) = (\zeta(g) \phi_0, \phi_0) \exp \lambda(\Gamma(g)) \quad (g \in \tilde{G})$$

et considérons l'intégrale

$$d_\lambda [G_{\nu\gamma} : G_{\nu\gamma}^0]^{-1} \int_{G/G_{\nu\gamma}^0} \int_K \psi_\lambda(kg\gamma g^{-1} k^{-1}) dk d\dot{g} \quad (\gamma \in \tilde{G}, \nu(\gamma) \in \Gamma) .$$

PROPOSITION 1. - Il existe un domaine D dans c^* tel que, pour tout $\lambda \in \bar{D}$, l'intégrale converge absolument pour tout $\gamma \in \tilde{G}$ se projetant dans Γ . L'intégrale est une fonction continue de λ sur \bar{D} et holomorphe à l'intérieur, $\lambda_\sigma \in \bar{D}$.

Soient $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_s$ des racines positives non compactes telles que $\alpha = \sum R(X_{\gamma_i} + X - \gamma_i)$ soit une sous-algèbre abélienne maximale de \mathfrak{p} . Alors si $\operatorname{Re} \lambda(H_{\gamma_i})$ ($1 \leq i \leq s$) est négatif assez grand, $\lambda \in D$. (cf. [13], p. 109-111).

Il suffit donc de calculer l'intégrale précédente lorsque $\lambda(H_{\gamma_i})$ est négatif assez grand.

PROPOSITION 2. - Soient γ un élément semi-simple de \tilde{G} . Pour $\lambda(H_{\gamma_i})$ négatif assez grand $\psi_\lambda(kg\gamma g^{-1} k^{-1})$ est une fonction intégrable par rapport à $d\dot{g} dk$. (cf. [13], p. 122-124)

Si $\psi_\lambda(kg\gamma g^{-1} k^{-1})$ est intégrable, l'intégrale double, précédente se réduit à une intégrale sur G/G_γ^0 . Finalement γ étant un élément semi-simple de \tilde{G} , il nous faut calculer l'intégrale

$$J(\gamma, \lambda) = d_\lambda \int_{G/G_\gamma^0} \psi_\lambda(g\gamma g^{-1}) d\dot{g}$$

définie pour $\lambda(H_{\gamma_i})$ négatif assez petit (on écrit G_γ pour $G_{\nu\gamma}$). Bien entendu $J(\gamma, \lambda)$ ne dépend que de la classe de γ dans G .

Remarquons d'autre part que tout élément γ semi-simple centralise une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{i} de \mathfrak{g} que l'on peut supposer invariante par θ , quitte à remplacer γ par un élément conjugué ([7]).

Nous allons prouver que $J(\gamma, \lambda) = 0$ si γ n'a pas de point fixe dans B . Observons à ce sujet :

PROPOSITION 3. - Pour $\gamma \in \tilde{G}$ (ou $\gamma \in G$) semi-simple, les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) γ admet un point fixe dans G/K
 - (ii) γ est conjugué à un élément de K .
 - (iii) γ centralise une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} conjuguée à \mathfrak{h} .
 - (iv) γ centralise une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} qui engendre dans G un sous-groupe compact.
 - (v) γ est conjugué à un élément de la forme $\exp H$ ($H \in \mathfrak{h}$).
- (i) \iff (ii) puisque $G = K \cdot \exp \mathfrak{p}$.
- (iii) \iff (iv), évident.
- (ii) \implies (iii). On peut supposer $\gamma \in K$. Alors γ centralise une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} contenue dans \mathfrak{k} . Une telle algèbre est conjuguée à \mathfrak{h} .
- (iii) \implies (v). Le centralisateur de \mathfrak{h} est connexe, c'est-à-dire est le groupe connexe A d'algèbre de Lie \mathfrak{h} .
- (v) \implies (iii), évident.

3. Calcul de $J(\gamma, \lambda)$ pour γ régulier ayant un point fixe dans B .

On peut supposer que $\gamma = \exp H$ ($H \in \mathfrak{h}$). Comme γ est régulier $G_\gamma^0 = A$, groupe engendré par \mathfrak{h} . Normalisons la mesure de Haar de A en lui imposant d'être de masse 1. Alors

$$J(\gamma, \lambda) = d_\lambda \int_G \psi_\lambda(g\gamma g^{-1}) dg \quad .$$

Pour chaque λ , posons $\Lambda = \lambda + \Lambda_\sigma$. Comme λ est nulle sur $\mathfrak{h}_\sigma \cap \mathfrak{k}'_\sigma$, Λ coïncide avec Λ_σ sur $\mathfrak{h}_\sigma \cap \mathfrak{k}'_\sigma$, donc prend des valeurs entières positives sur les H_α où α est une racine positive compacte. HARISH-CHANDRA ([4] et [5]) associe à Λ une représentation π_Λ de G dont le caractère distribution est donné par :

$$\begin{aligned} T(f) &= \text{tr} \left(\int_G f(x) \pi(x) dx \right) \\ &= d_\lambda \int_G dg \int_G f(gg_1 g^{-1}) \psi_\lambda(g_1) dg_1 \end{aligned}$$

f fonction de classe C^∞ à support compact.

D'autre part d'après [5] et [7], T coïncide sur l'ensemble des éléments réguliers avec une fonction r

$$T(f) = \int_{\tilde{G}} f(g_1) r(g_1) dg_1$$

f à support contenu dans l'ensemble des éléments réguliers.

Donc

$$r(\gamma) = d_\lambda \int_G \psi_\lambda(g\gamma g^{-1}) dg = J(\gamma, \lambda) \quad .$$

Comme on connaît r, on en tire

$$J(\gamma, \lambda) = \left\{ \prod_{\alpha \in P} \left(\exp\left(\frac{\alpha}{2}(H)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(H)\right) \right) \right\}^{-1} \sum_{s \in W} \varepsilon(s) \exp(s\Lambda(H) + \rho(H))$$

w est le groupe de Weyl de K_G et $\varepsilon(s) = \pm 1$ suivant que s est produit d'un nombre pair ou impair de réflexions.

Remarque. - Si $\lambda = \lambda_\sigma$, π_{Λ_σ} n'est autre que la représentation de G dans $\mathbb{K}^2(\sigma)$.

4. $J(\gamma, \lambda) = 0$ pour γ régulier sans point fixe dans B.

On peut supposer que γ centralise une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{i} de \mathfrak{g} invariante par θ . On a $\mathfrak{i} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{i} \cap \mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{p} \neq 0$.

Introduisons pour toute forme linéaire μ sur $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{p}$ le sous-espace \mathfrak{g}_μ des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $[X, H] = \mu(H) X$ ($H \in \mathfrak{i}$). Ordonnons les μ tels que $\mathfrak{g}_\mu \neq \{0\}$ et soit $n = \sum_{\mu > 0} \mathfrak{g}_\mu$ et m l'orthogonal de $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{p}$ dans son centralisateur pour la forme $-\beta(X, \theta Y)$. Désignons par N et M, les sous-groupes correspondants. On a :

$$\int_{G/G_Y} \psi_\lambda(g\gamma g^{-1}) d\dot{g} = \int_{K \times M \times N} \psi_\lambda(k m \gamma n^{-1} m^{-1} k^{-1}) dk dm dn$$

(G_Y^0 est le groupe d'algèbre \mathfrak{i} puisque γ est régulier, cf. [9], p. 212).

On fait le changement de variable $n'\gamma = n\gamma n^{-1}$, puis $n'm = mn$, il vient

$$= \xi^{-1}(\gamma) \int_{K \times M \times N} \psi_\lambda(k m \gamma m^{-1} k^{-1}) dk dm dn .$$

où $\xi(\gamma)$ est de déterminant de la restriction de $I - \text{ad}_\gamma$ à n , celui de la restriction de ad_m à n étant 1.

On peut supposer $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{p} \subset \alpha = \sum R(X_{\gamma_i} + X_{-\gamma_i})$. Posons

$$t = \exp \frac{\pi}{4} \text{ad} \left(\sum_{i=1} X_{\gamma_i} - X_{-\gamma_i} \right) \quad .$$

On a

$$t(X_{\gamma_j} + X_{-\gamma_j}) = H_{\gamma_j} \quad .$$

Donc

$$t(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{p}) \subset t(\alpha) = \sum \text{RH}_{\gamma_i}$$

et

$$[X_{\gamma_\ell}, t(H)] = \gamma_\ell(t(H)) X_{\gamma_\ell} \quad \text{pour } H \in \mathfrak{i} \cap \mathfrak{p} \quad .$$

Soit :

$$[t^{-1}(X_{\gamma_\ell}), H] = \gamma_\ell(t(H)) t^{-1}(X_{\gamma_\ell}) \quad .$$

Donc $t^{-1}(X_{\gamma_\ell})$ ou $t^{-1}(X_{-\gamma_\ell})$ est dans $\mathfrak{n}_\mathbb{C}$ par exemple $t^{-1}(X_{\gamma_\ell})$. On a

$$t^{-1}(X_{\gamma_\ell}) = \frac{1}{2} (X_{\gamma_\ell} - X_{-\gamma_\ell} - H_{\gamma_\ell})$$

la semi-involution de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ associée à \mathfrak{g} transforme X_{γ_ℓ} en $X_{-\gamma_\ell}$, donc H_{γ_ℓ} en $H_{-\gamma_\ell}$, et finalement $t^{-1}(X_{\gamma_\ell})$ en $-t^{-1}(X_{\gamma_\ell})$. En définitive :

$$X = 2it^{-1}(X_{\gamma_\ell}) = i(X_{\gamma_\ell} - X_{-\gamma_\ell} - H_{\gamma_\ell})$$

est dans \mathfrak{n} .

Désignons par N_1 le sous-groupe à un paramètre engendré par X . N_1 est fermé, et l'intégrale s'écrit

$$\xi^{-1}(\gamma) \int_{K \times M \times N_1 \setminus N} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\lambda(k \exp(tX) n m \gamma m^{-1} k^{-1}) dt \right\} dk dm \quad .$$

On va montrer que, pour $\lambda(H_{\gamma_\ell})$ négatif assez petit, la fonction à intégrer est une fonction holomorphe de t dans le demi-plan $\text{Im} t > -\frac{1}{2}$ majorée par $c(1 + |t|)^{-2}$. La formule intégrale de Cauchy montre alors que l'intégrale est nulle.

On a :

$$(1) \quad \psi_\lambda(k \exp tX n m \gamma m^{-1} k^{-1}) = (\zeta(k) \zeta(\exp tX) \zeta(n m \gamma m^{-1} k^{-1}) \phi_0, \phi_0) \exp \lambda \Gamma(g)$$

avec $g = \exp(tX) n m \gamma m^{-1}$ et

$$(2) \quad \Gamma(g) = -\pi(\mu(mym^{-1}n^{-1}, \exp(-tX).0) - \pi(\mu(\exp(-tX)), 0)) \quad .$$

Or

$$\begin{aligned} \exp(-tX) &= \\ &= \exp(-it(1-it)^{-1} X_{\gamma_\ell}) \exp(\log(1-it) H_{\gamma_\ell}) \exp(it(1-it)^{-1} X_{-\gamma_\ell}) \quad . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \exp(-tX).0 &= -it(1-it)^{-1} X_{\gamma_\ell} \\ \mu(\exp(-tX), 0) &= \exp(\log(1-it) H_{\gamma_\ell}) \quad . \end{aligned}$$

Dans (1), le premier facteur est un polynôme en t , donc est majoré par $C(1+|t|)^n$ pour tout t . Pour majorer le deuxième facteur, remarquons que le premier terme dans (2) est une fonction holomorphe et bornée de t pourvu que $\exp(-tX).0 = it(1-it)^{-1} X_{\gamma_\ell}$ appartienne à B . Or ceci a lieu si $|it(1-it)^{-1}| < 1$, soit $\text{Im } t > -\frac{1}{2}$. En effet :

LEMME 1. - Si $t \in \mathbb{C}$ et $|t| < 1$, tX_{γ_ℓ} est dans B .

Soit $H \in \mathfrak{h}$, tel que $\exp_{\gamma_\ell}(H) = \frac{\bar{t}}{|t|}$ ($\gamma_\ell(H)$ est imaginaire pure).

Remplaçant tX_{γ_ℓ} par $\text{ad exp } H(tX_{\gamma_\ell}) = t \exp_{\gamma_\ell}(H) X_{\gamma_\ell}$, on voit que l'on peut supposer $t \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, posons $t = tht'$, et calculons

$$\begin{aligned} \exp(t'(X_{\gamma_\ell} + X_{-\gamma_\ell})) &= \exp tht'X_{\gamma_\ell} \exp \log cht'H_{\gamma_\ell} \exp tht'X_{-\gamma_\ell} \\ \exp(t'(X_{\gamma_\ell} + X_{-\gamma_\ell})).0 &= tht'X_{\gamma_\ell} = tX_{\gamma_\ell} \text{ est dans } B, \text{ puisque } \exp(t'(X_{\gamma_\ell} + X_{-\gamma_\ell})) \\ &\text{est dans } G. \end{aligned}$$

Le deuxième terme dans (2) s'écrit

$$-\pi(\mu(\exp(-tX), 0) = \log(1-ti) \pi(\exp(H_{\gamma_\ell})) = \log(1-ti) H'_{\gamma_\ell}$$

(H'_{γ_ℓ} composant de H_{γ_ℓ} dans \mathfrak{c}). C'est une fonction holomorphe pour $\text{Im } t > -\frac{1}{2}$.

Pour ces valeurs de t , on a finalement une majoration de la forme

$$|\psi_\lambda(k \exp tX nm m^{-1} k^{-1})| \leq C(1+|t|)^n |1-ti|^{\text{Re } \lambda(H_{\gamma_\ell})}$$

et si $\lambda(H_{\gamma_\ell})$ est négatif assez petit

$$|\psi_\lambda(k \exp tX nmym^{-1} k^{-1})| \leq C(1+|t|)^{-2} \quad .$$

Donc $J(\gamma, \lambda) = 0$.

5. Passage du cas régulier au cas singulier.

Soit toujours \mathfrak{i} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} telle que γ appartienne au centralisateur I de \mathfrak{k} . On peut supposer $\theta(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}$. Alors $\theta(\mathfrak{g}_\gamma) = \mathfrak{g}_\gamma$, \mathfrak{g}_γ désignant le centralisateur de γ . L'algèbre réductive \mathfrak{g}_γ est somme directe de son algèbre dérivée \mathfrak{g}_1 et de son centre α tous deux invariants par θ . La restriction de θ à \mathfrak{g}_1 est une involution de Cartan. Soit \mathfrak{i}_1 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_1 invariante par θ et fondamentale (i. e. la trace de \mathfrak{i}_1 sur $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_1$ est un sous-espace abélien maximal). Alors $\mathfrak{i}_1 + \alpha$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} invariante par θ et centralisée par γ . On peut donc prendre $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_1 + \alpha$. Désignons par G_1 le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie \mathfrak{g}_1 , par I_1 le centralisateur de \mathfrak{i}_1 dans G_1 . Pour passer du cas régulier au cas singulier, on utilise les lemmes suivants.

LEMME 2. - Soient m une fonction numérique sur \tilde{G}_1 (revêtement de G_1) et Φ_m la fonction numérique définie sur l'ensemble des éléments réguliers de \tilde{I}_1 (centralisateur de \mathfrak{i}_1 dans \tilde{G}_1) par :

$$\Phi_m(\gamma_1) = \Delta(\gamma_1) \int_{G_1/I_1^0} m(g_1 \gamma_1 g_1^{-1}) d\dot{g}_1$$

où

$$\Delta(\gamma_1) = \exp(-\rho_1(H_1)) \prod_{\alpha \in P_1} (\exp(\alpha(H_1)) - 1)$$

$H_1 \in \mathfrak{i}_{1c}$ et $\exp H_1$ est l'image de γ_1 dans le groupe simplement connexe d'algèbre \mathfrak{g}_{1c} . P_1 est l'ensemble des racines positives de \mathfrak{g}_{1c} par rapport à \mathfrak{i}_1 , et ρ_1 leur demi-somme. Soit D l'opérateur différentiel invariant $\prod_{\alpha \in P_1} H_\alpha$ sur \tilde{I}_1 . Alors, lorsque γ_1 tend vers 1 en restant régulier,

$$\lim D\Phi_m(\gamma_1) = am(1)$$

si m est continue à support compact et où a est une constante non nulle indépendante de m (cf. [10]).

LEMME 3. - Soit f continue à support compact sur \tilde{G} . Pour $g \in G$, posons

$$m_g(g') = f(g\gamma g'^{-1}) .$$

Alors

$$\int_{G/G_\gamma^0} d\dot{g} D\Phi_m(g)(\gamma_1) \rightarrow a \int_{G/G_\gamma^0} d\dot{g} m_g(1)$$

lorsque $\gamma_1 \in I_1$ tend vers 1 en restant régulier ainsi que $\gamma\gamma_1$.

Ce lemme est facile. Notons que

$$\int_{G/I^0} f(\dot{g}) d\dot{g} = [I_1 : I_1^0]^{-1} \int_{G/G_Y^0} d\dot{g} \int_{G_1/I_1^0} f(\dot{g}\dot{g}_1) d\dot{g}_1$$

donc

$$\int_{G/I^0} f(g\gamma_1 g^{-1}) dg = [I_1 : I_1^0]^{-1} \int_{G/G_Y^0} d\dot{g} \int_{G_1/I_1^0} f(g\gamma_1 g_1 \gamma_1^{-1} g^{-1}) d\dot{g}_1$$

c'est-à-dire

$$\Delta(\gamma_1) \int_{G/I^0} f(g\gamma_1 g^{-1}) dg = [I_1 : I_1^0]^{-1} \int_{G/G_Y^0} d\dot{g} \Phi_m(g, \gamma_1)$$

et finalement

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow 1} D\Delta(\gamma_1) \int_{G/I^0} f(g\gamma_1 g^{-1}) dg = [I_1 : I_1^0]^{-1} a \int_{G/G_Y^0} d\dot{g} f(g\gamma g^{-1}) \quad .$$

LEMME 4. - Le résultat précédent s'applique à $f = d_\lambda \psi_\lambda$ lorsque $\lambda(H_{\gamma_1})$ est négatif assez petit (cf. [13], p. 116-125).

On a donc $(I^0 = G_{\gamma\gamma_1}^0$ puisque $\gamma\gamma_1$ est régulier)

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow 1} D\Delta(\gamma_1) J(\gamma\gamma_1, \lambda) = [I_1 : I_1^0]^{-1} a J(\gamma, \lambda) \quad .$$

Si γ n'a pas de point fixe dans B , $I^0 = G_{\gamma\gamma_1}^0$ n'est pas compact, donc $\gamma\gamma_1$ n'a pas non plus de point fixe. Alors $J(\gamma\gamma_1, \lambda) = 0$ (cf. n° 3). Donc $J(\gamma, \lambda) = 0$.

Si γ a un point fixe, I^0 est compact, donc $\gamma\gamma_1$ a aussi un point fixe. On peut supposer que

$$\gamma = \exp H, \quad \gamma_1 = \exp H_1 (H, H_1 \in \mathfrak{h}), \quad \mathfrak{i} = \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{i}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 \quad .$$

Alors I_1 est connexe et

$J(\gamma\gamma_1, \lambda)$

$$= \left\{ \prod_{\alpha \in P} \left(\exp\left(\frac{\alpha}{2}(H)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(H)\right) \right)^{-1} \sum_{s \in W} \varepsilon(s) \exp(s\Lambda(H + H_1) + s(H + H_1)) \right.$$

$$\left. \Delta(\gamma_1) = \exp(-\rho_1(H_1)) \prod_{\alpha \in P_1} (\exp(\alpha(H_1)) - 1) \right.$$

$$\left. \Delta(\gamma_1) J(\gamma\gamma_1, \lambda) = \prod_{\substack{\alpha \in P \\ \alpha \notin P_1}} \left(\exp\left(\frac{\alpha}{2}(H + H_1)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(H + H_1)\right) \right)^{-1} \right.$$

(pourvu que l'on ait ordonné les racines de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ de telle sorte que les racines positives de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ soient les racines positives α de \mathfrak{h} dont le vecteur X_α est dans $\mathfrak{g}_{1,c}$).

On tire facilement de là que :

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow 1} \Delta(\gamma_1) J(\gamma_1, \lambda)$$

$$\prod_{\substack{\alpha \in P \\ \alpha \notin P_1}} (\exp(\frac{\alpha}{2}(H)) - \exp(-\frac{\alpha}{2}(H)))^{-1} \omega_1 \sum_{w_1 \in W} \varepsilon(s) \prod_{\alpha \in P_1} (s\Lambda(H_\alpha) + s\rho(H_\alpha)) \exp(s\Lambda(H) + \rho(H))$$

w_1 est le groupe de Weyl de $\mathfrak{k}_c \cap \mathfrak{g}_{1c}$ et ω_1 son ordre.

Reste à calculer a . Il est facile de prouver que

$$\mathfrak{g}_{1c} = \mathfrak{k}_{1c} + \mathfrak{p}_{1+} + \mathfrak{p}_{1-} \quad \text{où } \mathfrak{k}_{1c} = \mathfrak{g}_{1c} \cap \mathfrak{k}_{1c}, \quad \mathfrak{p}_{1+} = \mathfrak{g}_{1c} \cap \mathfrak{p}_+$$

Il en résulte que G_1/K_1 a une structure complexe.

C'est un domaine symétrique borné B_Y . Le groupe G_1 est localement isomorphe au produit d'un groupe compact et du groupe des transformations conformes de B_Y . On peut alors définir, pour toute forme linéaire λ_1 sur $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{g}_{1c}$ nulle sur $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}_{1c}$ d_{λ_1} et ψ_{λ_1} . Le lemme 2 s'applique à $m = \psi_{\lambda_1}$ et

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\lambda_1} &= \lim_{\gamma_1 \rightarrow 1} \int_{G_1/I_1^0} \psi_{\lambda_1}(\xi_1 \gamma_1 \xi_1^{-1}) d\xi_1 \\ &\quad \gamma_1 \text{ régulier} \\ &= \lim_{H_1 \rightarrow 0} D\{\sum \varepsilon(s) \exp(s\Lambda_1(H_1) + s\rho_1(H_1))\} \\ &\quad H_1 \text{ régulier} \\ &= \omega_1 \prod_{\alpha \in P_1} (\Lambda_1(H_\alpha) + \rho_1(H_\alpha)) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$d_{\lambda_1} = (-1)^{b_Y/v(B_Y)} \prod_{\alpha \in P_1} \frac{\Lambda_1(H_\alpha) + \rho_1(H_\alpha)}{\rho_1(H_\alpha)}$$

(b_Y = dimensions complexes de B_Y).

D'où

$$a^{-1} = (-1)^{b_Y/v(B_Y)} \rho_1(H_\alpha)^{-1} .$$

(Bien entendu les mesures sur G_1, B_Y, I_{10} ont été normalisées comme sur G, B, I_0 .)

D'où $J(\gamma, \lambda)$ (voir n° 6).

6. Le résultat final.

$$\dim \mathcal{K}(\Gamma, \sigma) = \sum_{\gamma} v(\mathbb{G}_{\gamma}/\Gamma_{\gamma}) \chi(\gamma)$$

la somme (finie) étant étendue à un ensemble de représentants des classes d'éléments conjugués de Γ qui ont un point fixe dans B .

$$\begin{aligned} \chi(\gamma) = & (-1)^{b_{\gamma}/v(B_{\gamma})} \{ [\mathbb{G}_{\gamma} : \mathbb{G}_{\gamma}^0] \prod_{\alpha \in P_{\gamma}} \rho_{\gamma}(H_{\alpha}) \prod_{\substack{\alpha \in P \\ \alpha \notin P_{\gamma}}} (\exp(\frac{\alpha}{2}(H)) - \exp(-\frac{\alpha}{2}(H))) \}^{-1} \\ & \times \sum_{s \in w_{\gamma}/w} \varepsilon(s) \prod_{\alpha \in P_{\gamma}} (s\lambda(H_{\alpha}) + sp(H_{\alpha})) \exp(s\lambda(H) + sp(H)) \end{aligned}$$

H est un élément de \mathfrak{h} tel que $\exp H$ soit conjugué à γ .

\mathfrak{g}_{γ} désignant le centralisateur de H dans \mathfrak{g} et \mathfrak{g}_{γ_1} sa partie semi-simple, P_{γ} est l'ensemble des racines positives de \mathfrak{g}_{γ_1} par rapport à $\mathfrak{h}_{\gamma_1} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \cap \mathfrak{h}$ et ρ_{γ} leur demi-somme, w_{γ} est le groupe de Weyl de $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_{\gamma_1}$.

B_{γ} est le domaine symétrique borné $\mathbb{G}_{\gamma_1}/K_{\gamma_1}$ (\mathbb{G}_{γ_1} groupe engendré par \mathfrak{g}_{γ_1} , et K_{γ_1} groupe engendré par $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_{\gamma_1}$). b_{γ} est la dimension complexe de B_{γ} .

Les mesures invariantes sont normalisées de la façon suivante : on part d'une mesure euclidienne sur B_{γ} , on en déduit une mesure \mathbb{G}_{γ_1} invariante sur $B_{\gamma} = \mathbb{G}_{\gamma_1}/K_{\gamma_1}$ puis une mesure invariante sur \mathbb{G}_{γ_1} . Les groupes compacts A (groupe engendré par \mathfrak{h}) et I_{γ_1} (groupe engendré par \mathfrak{g}_{γ_1}) ont des mesures de masse égale à 1. La mesure sur le centralisateur \mathbb{G}_{γ} de γ dans G , ou ce qui revient au même, le centralisateur $G_{\exp H}$ de H dans G , est déterminé par la formule d'intégration

$$\int_{G/A} f(\dot{g}) dg = \int_{G/G_{\exp H}} dg \int_{\mathbb{G}_{\gamma_1}/I_{\gamma_1}} f(\dot{g}g_{\gamma_1}) dg_{\gamma_1}$$

Remarque. - Si γ est régulier, il faut vérifier que la formule précédente redonne le résultat du n° 3. Or dans ce cas, $\mathfrak{g}_{\gamma} = \mathfrak{h}$, B_{γ} est réduit à un point, $v(B_{\gamma}) = 1$, P_{γ} est vide et $w_{\gamma} = \{1\}$. La mesure de Haar de \mathbb{G}_{γ} qui est compact est égale à 1. On retombe bien sur ses pieds. De même si $\gamma = 1$, $\mathbb{G}_{\gamma} = G$, $B_{\gamma} = B$, $P_{\gamma} = P$, $w_{\gamma} = w$ et la normalisation de la mesure de Haar de G est celle du n° 1. On retombe encore sur ses pieds.

