SÉMINAIRE N. BOURBAKI

BERNARD MALGRANGE

Problèmes aux limites elliptiques

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. nº 262, p. 275-283

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__275_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 262

Décembre 1963

PROBLÈMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

par Bernard MALGRANGE

N. B. - Les variétés, fibrés, opérateurs différentiels considérés dans cet exposé sont tous indéfiniment dérivables, pour simplifier. Par contre cette convention ne concerne pas les fonctions, et encore moins les distributions.

1. Introduction.

Soient V une variété dénombrable à l'infini, et P un opérateur différentiel elliptique de degré m sur V (opérant, pour simplifier dans les fonctions à valeurs complexes sur V ; nous verrons au paragraphe 4 le cas général). Désignant par $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{D}'$) le faisceau des germes de fonctions C^{∞} (resp. de distributions) sur V, on a donc deux homomorphismes de faisceaux

$$\begin{cases} P_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \\ P_{\mathcal{D}'} : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}' \end{cases}$$

dont on désignera les noyaux respectivement par $\mathcal{E}^P$ et $\mathcal{D}'^P$. Il est bien connu qu'on a les propriétés suivantes :

(A) (Hypoellipticité). - L'injection naturelle $\mathcal{E}^P \to \mathcal{D}'^P$ est, en fait, une bijection (autrement dit, pour tout ouvert $\Omega \subset V$, toute distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, vérifient $Pf = 0$, est indéfiniment dérivable). Il en résulte en particulier ceci : si l'on a $\Omega \subset\subset V$, l'injection $\mathcal{E}^P(V) \to \mathcal{E}^P(\Omega)$ est compacte (ces deux espaces sont munis des topologies induites respectivement par $\mathcal{E}(V)$ et $\mathcal{E}(\Omega)$).

(B). - $P_{\mathcal{E}}$ et $P_{\mathcal{D}'}$ sont surjectifs. On a même plus : pour tout compact K de V "suffisamment petit", les applications $P : \mathcal{E}(K) \to \mathcal{E}(K)$, $\mathcal{D}'(K) \to \mathcal{D}'(K)$ sont surjectives.

Des raisonnements connus permettent notamment d'en déduire ceci : si V est compacte, le noyau et le conoyau de l'application $P : \mathcal{E}(V) \to \mathcal{E}(V)$ (qui coïncident d'ailleurs respectivement avec $H^0(V ; \mathcal{E}^P)$ et $H^1(V ; \mathcal{E}^P)$) sont de dimension finie.

Supposons maintenant que V soit une variété à bord, et soit P un opérateur elliptique sur V ; alors la propriété (A) n'est plus vraie. Prenons par exemple

$V = \underset{\sim}{R}^n_+ = \{x \in \underset{\sim}{R}^n \mid x_n \geqslant 0\}$, dont nous désignerons le bord par $\partial V = \underset{\sim}{R}^n_o$, et prenons $P = \Delta$. Soit $\mathcal{E}^\Delta$ (resp. $\mathcal{E}^{2,\Delta}$) le faisceau des germes de fonctions de classe C^∞ (resp. C^2) sur V et harmoniques (ce qu'on va dire ici pourrait aussi s'appliquer à $\mathcal{D}'^\Delta$, mais la question est un peu plus délicate et inutile pour notre propos). On n'a pas $\mathcal{E}^{2,\Delta} = \mathcal{E}^\Delta$, ces deux faisceaux ne coïncident qu'aux points où l'on a $x_n > 0$.

Mais désignons par $\mathcal{E}^\Delta_o$ (resp. $\mathcal{E}^{2,\Delta}_o$) le sous-faisceau du précédent, formé des fonctions harmoniques et nulles sur ∂V ; par le principe de symétrie on voit qu'on a ici $\mathcal{E}^\Delta_o = \mathcal{E}^{2,\Delta}_o$. Autrement dit on a ici l'équivalent de (A). Quant à l'équivalent de (B), il est donné par la solution du problème de Dirichlet, qui affirme notamment ceci :

Soit K un compact $\subset V$; pour tout couple (g, h) avec $g \in \mathcal{E}(K)$, $h \in \mathcal{E}(K \cap \partial V)$ [1], il existe $f \in \mathcal{E}(K)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta f = g \\ f = h \quad \text{sur } \partial V \end{cases} .$$

Autrement dit, si l'on désigne par π la restriction des fonctions ∂V, l'application

$$\Delta + \pi : \mathcal{E}(K) \to \mathcal{E}(K) \oplus \mathcal{E}(K \cap \partial V)$$

(dont le noyau est précisément $\mathcal{E}^\Delta_o(K)$) est surjective.

Dans la suite, nous associerons systématiquement aux opérateurs elliptiques des conditions aux limites permettant d'obtenir des résultats analogues. Nous n'examinerons pas la question de savoir dans quelle mesure ces conditions sont nécessaires pour avoir (A) et (B) ; on peut montrer en tout cas qu'elles sont nécessaires pour obtenir les résultats plus précis qui vont suivre. Voir d'autres indications sur cette question dans [1] et [4]). En gros, il faudra "assez" de conditions pour (A), mais "pas trop" pour (B). Comme on le fait pour la théorie "à l'intérieur" des équations elliptiques on commencera par traiter le cas d'une équation et de conditions aux limites à coefficients constants, et "homogènes" (i. e. ne comprenant que des termes de degré maximum).

2. Le cas "homogène, coefficients constants".

Si P est un polynôme $\in \underset{\sim}{C}[X_1, \dots, X_n]$, on fera opérer différentiellement

---

(1) Il s'agit ici de fonctions sur ∂V, et non de fonctions sur V au voisinage de ∂V.

P sur les fonctions ou distributions dans $\mathbb{R}^n$ par $X_j\ f = -i \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

On considère, dans $\mathbb{R}^n_+$, pour f suffisamment différentiable (ici encore, en compliquant les raisonnements, on pourrait travailler avec des distributions), le système suivant :

$$\begin{cases} Pf = g \\ \pi(Q_i\ f) = h_i \qquad i = 1, \dots, \mu \end{cases} .$$

On suppose P homogène de degré m, les Q_i homogènes de degrés m_i, et P elliptique (i. e. $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$, $P(\xi) = 0 \implies \xi = 0$).

(2.1) DÉFINITION. - <u>On dit que le système</u> (P, Q_i) <u>est elliptique si la condition suivante est vérifiée</u> :

<u>Pour tout vecteur</u> $\xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi' \neq 0$, <u>et tout système</u> $(\alpha_1, \dots, \alpha_\mu) \in \mathbb{C}^\mu$, <u>l'équation différentielle ordinaire</u>

$$\begin{cases} P(\xi', -i \frac{\partial}{\partial x_n})\ u = 0 \\ Q_i(\xi', -i \frac{\partial}{\partial x_n})\ u(0) = \alpha_i \end{cases}$$

<u>a une solution et une seule bornée sur</u> $\mathbb{R}_+$.

(2.2) REMARQUES. - On vérifie facilement que ceci entraîne qu'on a $m = 2\mu$ et que pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi' \neq 0$, l'équation $P(\xi', \xi_n) = 0$ a μ racines à partie imaginaire strictement positive, et μ à partie imaginaire strictement négative. Ces conditions ne sont pas génantes pour $n > 2$, car on voit aussitôt que tout P homogène elliptique est de degré pair et possède la propriété voulue sur les racines. Par contre c'est faux pour $n = 2$ (contre exemple $\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$, auquel on ne pourra donc pas associer de bonnes conditions aux limites elliptiques, comme chacun s'en doute. Par contre, en séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on pourra lui associer un système elliptique rentrant dans la théorie du paragraphe 4 ; par exemple :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\ ; \qquad u(x, 0) = 0\ ) .$$

(2.3). - On trouvera dans les oeuvres non publiées d'ATIYAH-SINGER une variante de la définition précédente plus agréable pour les topologues (malheureusement, je n'ai pas les oeuvres en question sous la main).

(2.4). – La dite solution bornée est en fait à décroissance exponentielle, vu qu'elle est combinaison linéaire d'exponentielles-polynômes à exposant de partie réelle strictement négative.

Avant d'énoncer le premier théorème, rappelons qu'on désigne par $H^s(\underset{\sim}{R}^n_+)$ (s entier ≥ 0) l'espace des fonctions sur $\underset{\sim}{R}^n_+$ qui sont de carré intégrable ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq s$.

Pour $f \in H^s(\underset{\sim}{R}^n_+)$, ou posera :

$$\|f\|_s^2 = \sum_{|k|\leq s} \|D^k f\|^2_{L^2} \quad .$$

Pour $s \geq 1$, une telle fonction admet une trace notée encore πf sur $\underset{\sim}{R}^n_o$; l'ensemble de ces traces parcourt exactement l'espace $H^{s-1/2}(\underset{\sim}{R}^n_o)$, i. e. l'ensemble des $g \in s'(\underset{\sim}{R}^{n-1})$ qui vérifient

$$\|g\|^2_{s-1/2} = \int (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} \mathfrak{F}g \, d\xi' < +\infty , \qquad \xi' = (\xi_1 , \dots , \xi_{n-1}) \quad .$$

D'autre part, si Ω est un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n_+$, nous désignerons par $H^s(\Omega)$ l'ensemble des restrictions à Ω de fonctions $\in H^s(\underset{\sim}{R}^n_+)$, et nous définirons de même $H^{s-1/2}(\Omega \cap \underset{\sim}{R}^n_o)$.

(2.5) THÉORÈME. – <u>Supposons le système</u> (P , Q_i) <u>elliptique ; soit</u> s <u>un entier</u> $\geq \sup(m , m_i + 1)$.

1° <u>Pour tout compact</u> $K \subset \underset{\sim}{R}^n_+$, <u>il existe</u> $C > 0$ <u>tel que, pour tout</u> $f \in H^s(\underset{\sim}{R}^n_+)$ <u>à support dans</u> K , <u>on ait</u>

$$C\|f\|_s \leq \|Pf\|_{s-m} + \sum \|\pi(Q_i f)\|_{s-m_i-1/2} \quad .$$

2° <u>Pour tout</u> Ω <u>ouvert borné de</u> $\underset{\sim}{R}^n_+$, <u>tout</u> $g \in H^{s-m}(\Omega)$ <u>et tout système</u> $h_i \in H^{s-m_i-1/2}(\Omega \cap \underset{\sim}{R}^n_o)$, <u>il existe</u> $f \in H^s(\Omega)$ <u>vérifiant, dans</u> Ω

$$Pf = g \ ; \qquad \pi(Q_i f) = h_i \quad .$$

La démonstration de ce théorème est assez technique, et un peu longue pour pouvoir être donnée dans le nombre de pages réglementaire (sic). Elle utilise une transformation de Fourier partielle par rapport à $x_1 , \dots , x_{n-1}$. On est alors ramené essentiellement à un problème d'équations différentielles ordinaires, dépendant d'un paramètre $\xi' \in \underset{\sim}{R}^{n-1}$ (les difficultés techniques arrivent au voisinage de $\xi' = 0$). Voir [1] et [4]. Une autre méthode [2] consiste à former le noyau de Poisson du problème aux limites (P , Q_i) ; elle à l'avantage de donner des résultats, non seulement dans L^2 , mais dans L^p $(1 < p < +\infty)$ et dans C^α

(α non entier), choses qui réjouissent éminemment les spécialistes et par ailleurs présentent un intérêt indiscutable.

3. Passage aux coefficients variables.

Soit Ω un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n_+$, et $P : x \rightsquigarrow P_x$ une fonction indéfiniment dérivable sur Ω, à valeur dans $\underset{\sim}{C}[X_1 , \ldots , X_n]$, de degré $m = 2\mu$ en tout point de Ω ; on identifie P à un opérateur différentiel sur Ω. Soient de même Q_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ des opérateurs différentiels (à n variables) définis sur $\Omega \cap \underset{\sim}{R}^n_o$, de degrés m_i. Pour tout point $a \in \Omega$ (resp. $a \in \Omega \cap \underset{\sim}{R}^n_o$) soit p_a (resp. $q_{i,a}$) la composante homogène de degré m de P_a (resp. de degré m_i de $Q_{i,a}$).

(3.1) DÉFINITION. - Le système (P , Q_i) est dit elliptique si [2]

1° Pour tout $a \in \Omega$, p_a est elliptique.

2° Pour tout $a \in \Omega \cap \underset{\sim}{R}^n_o$, le système $(p_a , q_{i,a})$ est elliptique par rapport à $\underset{\sim}{R}^n_+$.

On notera que ces conditions sont stables ; si Θ est un ouvert $\subset\subset \Omega$, tout système (P' , Q'_i) sur Ω, avec $\deg P' = m$, $\deg Q'_i = m_i$, assez voisin de (P , Q_i) est encore elliptique sur Θ. D'autre part, elles sont "indépendantes des termes d'ordre inférieur", d'après leur définition, ce qui permet de définir des systèmes elliptiques sur des variétés à bord (cf. paragraphe 4).

(3.2) THÉORÈME (AGMON, [1] ; voir aussi [4]). - Soit (P , Q_i) un système elliptique dans Ω, et soit s un entier $\geqslant \sup(m , m_i + 1)$. Tout point $a \in \Omega$ possède un voisinage compact $K_a \subset \Omega$ possédant la propriété suivante :

Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $f \in H^s(\underset{\sim}{R}^n_+)$, à support dans K_a, on ait

$$C\|f\|_s \leqslant \|Pf\|_{s-m} + \sum \|\pi(Q_i f)\|_{s-m_i-1/2}$$

(en fait, on peut trouver a priori un K_a indépendant de s, mais peu importe).

Ce résultat s'obtient immédiatement par le classique "truc de Korn" qui consiste ici à écrire

$$P = p_a + (P - p_a) , \qquad Q_i = q_{i,a} + (Q_i - q_{i,a})$$

et à appliquer le théorème (2.5), première partie.

---

(2) Il va de soi que la donnée de m, des m_i, de Ω et de $\Omega \cap \underset{\sim}{R}^n_o$ est ici sous-entendue.

(3.3) THÉORÈME. - Dans les mêmes hypothèses, soit $f \in H^s_{loc}(\Omega)$, vérifiant pour un $r \geqslant s$:

$$Pf \in H^{r-m}_{loc}(\Omega) \; ; \qquad \pi(Q_i\, f) \in H^{r-m_i-1/2}_{loc}(\Omega \cap \underset{\sim}{R}^n_o)$$

On a alors

$$f \in H^r_{loc}(\Omega) \qquad .$$

(Par définition, f appartient à $H^r_{loc}(\Omega)$ si, $\forall\ \alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\alpha f \in H^r(\Omega)$; définition analogue pour les autres espaces).

Nous déduirons ce résultat du précédent par une méthode due à NIRENBERG [7]. Il suffit, par récurrence, de l'établir pour $r = s + 1$. Prenons alors $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, de support assez petit pour être contenu dans l'intérieur d'un compact K vérifiant (3.2). Nous allons voir qu'on a : $\alpha f \in H^{s+1}(\underset{\sim}{R}^n_+)$, ce qui entraînera le résultat.

Pour cela, on remarque d'abord (formule de Leibniz) qu'on a

$$P(\alpha f) \in H^{s+1-m} \, , \qquad Q_i(\alpha f) \in H^{s+m_i+1/2} \qquad .$$

Désignons par h un vecteur de $\underset{\sim}{R}^n_o$, et par T_h la translation dans $\underset{\sim}{R}^n$ parallèlement à h ; on déduit du théorème (3.2) que les $\dfrac{T_h(\alpha f) - (\alpha f)}{|h|}$ restent bornés dans $H^s(\underset{\sim}{R}^n_+)$ quand $h \to 0$

(écrire $P[T_h(\alpha f) - (\alpha f)] = \{T_h[P(\alpha f)] - P(\alpha f)\} + (P - T_h\, P)\, T_h(\alpha f)$, vérifier d'abord que la norme du second membre dans H^{s-m} est $O(h)$; faire de même avec les Q_i et appliquer alors (3.2)).

Prenant h parallèle à l'un des axes de coordonnées, en extrayant une suite faiblement convergente, on trouve $\dfrac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i} \in H^s(\underset{\sim}{R}^n_+)$, pour $i = 1, \dots, n-1$.

Enfin, ce résultat, joint à l'équation $P(\alpha f) \in H^{s+1-m}(\underset{\sim}{R}^n_+)$, montre qu'on a aussi $\dfrac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n} \in H^s(\underset{\sim}{R}^n_+)$. D'où le résultat.

(3.4) COROLLAIRE. - Si $f \in H^s_{loc}(\Omega)$ vérifie

$$Pf \in \mathcal{E}(\Omega) \; ; \qquad \pi(Q_i\, f) \in \mathcal{E}(\Omega \cap \underset{\sim}{R}^n_o)$$

on a $f \in \mathcal{E}(\Omega)$.

(3.5) THÉORÈME. - Sous les hypothèses du théorème (3.2), tout $a \in \Omega$ possède un voisinage ouvert $\mathcal{O}_a$ possédant la propriété suivante :

Etant donnés $g \in H^{s-m}(\mathcal{O}_a)$, $h_i \in H^{s-m_i-1/2}(\mathcal{O}_a \cap \underset{\sim}{R}^n_o)$, il existe $f \in H^s(\mathcal{O}_a)$ vérifiant, dans $\mathcal{O}_a$:

$$Pf = g \; ; \qquad \pi(Q_i\, f) = h_i \quad .$$

On déduit encore ce résultat du théorème (2.5), deuxième partie, par le truc de Korn. D'autre part, le théorème (3.3) montre qu'on peut choisir $\mathcal{O}_a$ indépendant de s, et que f est indéfiniment dérivable si g et les h_i le sont. Finalement, on a bien obtenu les équivalents cherchés des énoncés (A) et (B) de l'introduction.

4. Systèmes elliptiques sur une variété.

Pour terminer, nous allons indiquer une extension des résultats précédents aux systèmes opérant dans des fibrés de dimension finie quelconque (ce qui précède permettrait de traiter le cas où leur dimension est égale à 1). Soit V une variété de bord W. On se donne deux fibrés à fibre $\underset{\sim}{C}$-vectorielle sur V, munis de décompositions

$$E = \oplus E_j \;, \quad F = \oplus F_i \;; \qquad 1 \leqslant i \leqslant I \;, \quad 1 \leqslant j \leqslant J$$

et un fibré sur W, muni d'une décomposition

$$G = \oplus G_k \qquad 1 \leqslant k \leqslant K \quad .$$

On se donne encore trois systèmes d'entiers $\geqslant 0$, $t = (t_j)$, $s = (s_i)$, $r = (r_k)$; pour tout couple (i, j), on se donne un opérateur différentiel (E_j, F_i) de P_{ij} degré $t_j - s_i$, et pour tout couple (k, j) un opérateur différentiel (E_j, G_k), Q_{kj}, de degré $t_j - r_k$.

Les définitions qui suivent étant invariantes par difféomorphisme (vérification facile), on se placera dans le cas où V est un ouvert de R^n_+, où $W = V \cap \underset{\sim}{R}^n_o$, et où tous les fibrés sont triviaux.

(4.1) DÉFINITION. - On dira que $P = (P_{ij})$ est elliptique (au sens de DOUGLIS-NIRENBERG [3]) si la condition suivante et vérifiée en tout point $a \in V$:

Soit p_{ij} la partie principale de degré $t_j - s_i$ de p_{ij}, et définissons $p_{ij,a}$ comme au paragraphe 3. Pour tout $\xi \in \underset{\sim}{R}^n$, $\xi \neq 0$, l'application $E_a \to F_a$ définie par la matrice $(p_{ij,a}(\xi))$ est inversible, (ce qui implique, évidemment, que $\dim E = \dim F$).

Exemple (le plus fréquent "en pratique"). - Les t_j sont égaux et les s_i sont nuls. Alors la notion d'ellipticité ne dépend pas de la décomposition de E et F choisie. Malheureusement, on ne connait pas actuellement de définition raisonnable, qui englobe la précédente, et ne dépende pas d'une décomposition de E et F.

(4.2) DÉFINITION. - On dira que le système (P_{ij}, Q_{kj}) est elliptique si

1° P est elliptique

2° Pour tout point $a \in W$ tout vecteur $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi' \neq 0$, et tout système $(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$, avec $\lambda_k \in G_{k,a}$, le système différentiel ordinaire

$$\begin{cases} \sum p_{ij,a}(\xi', -i\frac{\partial}{\partial x_n}) f_j = 0 \\ \sum q_{kj,a}(\xi', -i\frac{\partial}{\partial x_n}) f_j(0) = \lambda_k \end{cases}$$

a une solution et une seule bornée dans $\mathbb{R}_+$.

(f_j à valeurs dans $E_{j,a}$; $q_{kj,a}$ se définit comme $p_{ij,a}$.)

Pour ces systèmes, on obtient encore des résultats analogues aux théorèmes (3.3) et (3.5). Les démonstrations ne diffèrent que par des complications inessentielles.

N. B. - Ce qui précède n'est qu'un bref résumé de quelques-uns des résultats de base de la théorie des problèmes aux limites elliptiques, auxquels une littérature qui dépasse tous les records est consacrée (et qu'il faudrait faire commencer sans doute à POISSON, DIRICHLET, RIEMANN etc.). Nous n'avons cité ici que les articles directement utilisés. Pour avoir une idée de la littérature, voir les bibliographies de [5] et [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON (Shmuel). - The coerciveness problem for integro-differential forms, J. Anal. math. Israël, t. 6, 1958, p. 183-223.

[2] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) and NIRENBERG (L.). - Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I., Comm. pure and appl. Math., t. 12, 1959, p. 623-727.

[3] DOUGLIS (A.) and NIRENBERG (L.). - Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 8, 1955, p. 503-538.

[4] HÖRMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).

[5] LIONS (Jacques-Louis). - Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. - Berlin, Springer-Verlag, 1962 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 111).

[6] MIRANDA (Carlo). - Equazioni alle derivate parzioli di tipo ellittico. - Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Ergebnisse der Mathematik, 1).

[7] NIRENBERG (Louis). - Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 8, 1955, p. 649-675.