RENÉ THOM

# Travaux de Moser sur la stabilité des mouvements périodiques

*Séminaire N. Bourbaki*, 1964, exp. n° 264, p. 297-309

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__297_0>

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 264

Décembre 1963

# TRAVAUX DE MOSER SUR LA STABILITÉ DES MOUVEMENTS PÉRIODIQUES

par René THOM

## 1. Etude locale d'un mouvement périodique.

Soit un système mécanique conservatif à deux degrés de liberté. L'espace de configuration est une surface (A) , l'espace de phase le fibré $T^*(A)$ des co-vecteurs tangents à A . $T^*(A)$ est une variété différentiable de dimension 4 Soit H le hamiltonien du système, fonction différentiable $H : T^*(A) \to \underset{\sim}{R}$ . Le mouvement est défini par un champ de vecteurs (h) dans $T^*(A)$ , donné à partir des dérivées de H par les équations canoniques. On sait que (H) est une intégrale première du champ. Si (g) désigne une trajectoire fermée du champ (h) cette trajectoire est tout entière contenue dans une hypersurface de niveau $H = c$ du hamiltonien ; on supposera (c'est d'ailleurs la "situation générique") que l'hypersurface $H = c$ est régulière le long de la trajectoire (g) . L'étude locale des mouvements voisins de (g) dans l'hypersurface $H = c$ de dimension trois se ramène à l'étude d'un difféomorphisme local (T) grâce au procédé classique des surfaces de section (introduit par POINCARÉ, et systématiquement exploité par G. D. BIRKHOFF). En un point O de (g) , on considère un morceau de surface (S) transverse à (g) en O . La trajectoire de (h) issue d'un point p de (S) recoupe pour la première fois (S) en un point p' , lui aussi voisin de (O) , et l'application $T : p \to p'$ définit un difféomorphisme local de S tel que $T(O) = O$ . La structure topologique des trajectoires voisines de (g) est complètement déterminée par la donnée du germe de difféomorphisme (T) : en effet, un fibré de base $(S_1)$ est défini à un homéomorphisme près par la donnée d'un difféomorphisme de changement de carte au-dessus d'un point (O) de $S_1$ , rôle joué ici par le difféomorphisme local (T) .

Particulièrement importante est la question de savoir si le mouvement périodique défini par (g) est stable : il y a stabilité, si, à tout voisinage U de O dans (S) , on peut associer un voisinage $V \subset U$ tel que toutes les images $T^n(V)$ soient dans U ; si on pose $W = \mathrm{Int} \bigcap_k T^{-k}(U)$ on voit que W est un ouvert non vide contenant O , globalement invariant par T ; si (g) est stable, par suite, O est intersection d'ouverts invariants arbitrairement petits ; on doit s'attendre à ce que les frontières de ces ouverts soient des courbes globalement invariantes par (T) contenant O à leur intérieur.

En mettant à profit la définition hamiltonienne du champ (h), on montre que le difféomorphisme (T) laisse invariante dans (S) une 2-forme $dp \wedge dq$, ce qu'on exprime en disant (T) conserve les aires.

L'étude locale de ces difféomorphismes locaux remonte à BIRKHOFF [1] ; en considérant d'abord le cas des séries formelles (supposant $T$ de classe $C^\infty$), BIRKHOFF a montré que le jet d'ordre infini de $T$ en $0$ pouvait se plonger dans un groupe à un paramètre formel, défini par des équations canoniques à partir d'un hamiltonien formel $Q(p, q)$. Désignons par $b_1$, $b_1'$ les valeurs propres (complexes) de l'application linéaire tangente en $0$ à (T) ; puisque (T) conserve les aires, on a $|b_1| \cdot |b_1'| = 1$, d'où la classification suivante :

1° $b_1$, $b_1'$ réels, avec $b_1 > 1$. - C'est le cas dit hyperbolique. On sait en général (cf. l'exposé de BRUHAT sur les travaux de STERNBERG [2]) qu'il est alors possible de linéariser (T) sous la forme

$$u_1 = b_1 \cdot u \qquad v_1 = b_1' v \quad .$$

Il n'y a évidemment pas stabilité.

2° $|b_1| = |b_1'| = 1$. - Cas elliptique. (T) est tangent à une rotation d'angle $\alpha$ en $0$. Il n'est plus possible (en général) de linéariser (T). Néanmoins, il est en général possible de donner pour (T) une forme réduite approximative, qu'on peut préciser comme suit :

THÉORÈME 1. - Il existe un système de coordonnées analytique $(u, v)$ tel que si $w = u + iv$, le difféomorphisme local (T) s'écrive :

$$w_1 = w(\exp i(a + b|w|^s)) + 0_\ell(|w|^q) \tag{1}$$

si $T$ n'est pas tangente à une rotation d'ordre $m < q$, et où $s$ est un entier pair tel que $0 < s \leqslant q - 1$ et $b$ un nombre égal à $0$ ou $\pm 1$, indépendamment du choix de $q \geqslant s + 1$.

Ce théorème a été établi dans le cadre analytique (et par les séries formelles) par BIRKHOFF [1]. MOSER l'étend au cas $C^{(m)}$ dans les hypothèses suivantes : supposons que (T) se mette initialement sous la forme :

$$z_1 = \lambda z + F(z, \bar{z})$$

où la fonction $F$, de classe $C^{\ell'}$, est $0_{\ell'}(|z|^2)$ ; la notation $G = 0_\ell(|z|^s)$ signifie qu'il existe une constante $c$ telle que pour $|z|$ assez petit :

$$\frac{|z|^{\rho+\sigma}}{\rho! \; \sigma!} \left| \frac{\partial^{\rho+\sigma} G}{\partial z^\rho \, \partial \bar{z}^\sigma} \right| \leqslant c|z|^s$$

où $\rho + \sigma \leqslant \ell$.

Alors le changement de coordonnées $z \to w$ transforme (T) en la forme (1). Le reste de la formule (1) est à interpréter comme plus haut, pourvu que $\ell' \geqslant \ell + q - 2$. Dans le cas "générique" : $s = 2$, $q = 4$, et la constante $b$ n'est pas nulle.

La forme réduite (1) montre que le difféomorphisme (T) est voisin d'un difféomorphisme $(T_w)$, qui, en coordonnées polaires, a pour équations :

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta + a + br^s \\ r_1 = r \end{cases} .$$

Un tel difféomorphisme conserve globalement les cercles $r = \text{Cte}$, mais les soumet à une rotation d'un angle $\alpha(r)$, fonction monotone du rayon $r$. Ces difféomorphismes particuliers, à caractère tourbillonaire autour du centre $0$ ("twist mappings"), vont jouer un rôle fondamental dans ce qui suit.

Historiquement, on s'est très tôt demandé si un point fixe $0$ d'une transformation (T), telle que (1), est stable : ces points s'introduisent, comme nous le verrons plus loin, dans le problème restreint des trois corps. Bien qu'il existe une intégrale première "formelle", on penchait pour la négative ; en effet, dans le cas exceptionnel $\alpha(0) = 2\pi/3$, il est vrai, LEVI-CIVITA avait donné un exemple d'un tel point instable. Des travaux ultérieurs d'ARNOLD et KOLMOGOROV montrèrent que, dans le cas d'un hamiltonien analytique, il existait, sous des conditions très générales, une infinité de courbes analytiques globalement invariantes autour de $0$ (par suite, dans ces conditions, le point $0$ est stable). La contribution de MOSER est d'avoir, par l'emploi d'une technique d'approximation extrêmement raffinée, généralisé ces résultats au cas différentiable $C^m$ (il est vrai que $m$ doit être pris très grand ...). C'est ce résultat qu'exprime le théorème suivant, dit théorème de l'anneau.

## 2. Théorème de l'anneau.

THÉORÈME 2. - Soit le difféomorphisme (T) défini dans l'anneau $1 < r < 2$ par :

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta + \alpha(r) + f(\theta , r) \\ r_1 = r + g(\theta , r) \end{cases} .$$

Posons $\alpha(2) - \alpha(1) = \Delta$,

$$|h|_1 = \sup_{i_1+i_2\leqslant\ell} \left| \frac{\partial^{i_1+i_2} h}{\partial^{i_1} \theta^{i} \partial r^{i_2}} \right| \quad \text{sur } 1 \leqslant r \leqslant 2 \quad .$$

On suppose :

1° qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$c^{-1}\,\Delta < |\alpha'| \;, \qquad |\alpha'|_{\ell} \leqslant c\Delta < c^{2}$$

2° que toute courbe fermée $r = \varphi(\theta)$ avec $|\varphi'| < 1$ rencontre sa courbe image.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon\,, c)$ tel que, pour

$$|f|_{\ell} + |g|_{\ell} < \delta \quad \text{et} \quad \ell \geqslant 333$$

l'application (T) admet une courbe invariante dans $1 \leqslant r \leqslant 2$, $r = \psi(\theta)$ avec $|\psi'| < \varepsilon$.

Avant d'aborder la démonstration proprement dite, donnons d'abord quelques remarques qualitatives : le difféomorphisme (T) s'obtient en perturbant le "twist mapping" Tw par l'addition des termes $f$ et $g$ petits ; il est clair que si $g$ était supposé de signe constant par exemple, aucune courbe invariante ne saurait exister. L'hypothèse 2, évidemment satisfaite par un difféomorphisme "hamiltonien", qui conserve les aires, exclut cette circonstance. Considérons maintenant le cercle de rayon $r_0$ pour lequel l'angle $\alpha(r_0)$ de Tw est de la forme $2\pi p/q$. Alors $(Tw)^q$ admet ce cercle comme courbe de points fixes ; or, un difféomorphisme n'admet génériquement que des points fixes isolés ; il est donc à prévoir qu'une perturbation, même très petite, de Tw aura pour effet de faire disparaître les courbes invariantes dont l'angle de rotation est commensurable à $\pi$. C'est effectivement ce qui se passe ; ces courbes sont remplacées par un nombre fini de points périodiques, qui donnent naissance à autant de mouvements périodiques voisins de (g), dont la période est un multiple entier de celle de (g) ; l'existence de ces courbes fermées qui revêtent la courbe donnée avec un degré arbitraire (q) avait été reconnue par POINCARÉ.

Ceci montre que, si certaines courbes $r = Cte$ de (Tw) résistent à une petite perturbation, on doit s'attendre à ce que leur angle de rotation $\omega$ soit tel que l'irrationnel $\frac{\omega}{\pi}$ soit très mal approché par les rationnels ; c'est là la remarque qui est à la base de la méthode de Moser. Reprenons les équations (2) en posant $\theta = x$, $\alpha(r) = y$ ; elles deviennent :

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = x + y + f(x\,, y) \\ y_1 = y + g(x\,, y) \end{cases}$$

où $y$ varie dans un intervalle $a \leqslant y \leqslant b$.

On fait choix d'un nombre $\omega$ "mal approché des rationnels" tel que

$$(4) \qquad |\omega - 2\pi m/n| > \varepsilon n^{-\sigma+3/2}$$

où l'entier $\sigma$ est supérieur à quatre.

Dans l'anneau $a \leqslant y \leqslant b$ donné, on va construire une couronne circulaire plus petite, et y définir un nouveau système de coordonnées polaires $(\xi , \eta)$ dans lequel l'application (3) va approcher l'application $(T\omega)$ à un plus haut degré que l'application donnée initialement. Par itération du procédé, on obtiendra une famille de couronnes circulaires emboitées l'une dans l'autre, dont la largeur tend vers zéro ; l'intersection de toutes ces couronnes est la courbe invariante cherchée sur laquelle $(T)$ se réduit à une rotation d'angle $\omega$.

Le procédé d'apporximation fait appel à la technique mise au point par MOSER et exposée ici par S. LANG [4]. On résoud une équation fonctionnelle en la linéarisant suivant la méthode de Newton ; la résolution exige une perte de différentiabilité, qu'il est nécessaire de compenser par une régularisation appropriée. Aussi la démonstration présente-t-elle les points suivants :

a. L'approximation.

b. Solution de l'équation linéarisée : une équation aux différences.

c. La régularisation.

d. Contrôle de l'erreur et convergence.

Examinons d'abord les points (b) et (c), qui ont un caractère technique indépendant.

Soit $\omega$ un nombre tel que, pour tous entiers $n$, $m$, on ait :

$$(4)' \qquad |\omega - 2\pi m/n| \geqslant \varepsilon n^{-\tau+1/2}$$

où l'entier $\tau$ est supérieur à trois.

On se propose de résoudre l'équation aux différences :

$$(5) \qquad w(x + \omega) - w(x) = h(x)$$

où la fonction donnée $h(x)$ est périodique (période $2\pi$), de valeur moyenne nulle, et la fonction inconnue $w(x)$ également périodique de période $2\pi$. Ecrivons le développement de Fourier de $h(x)$ :

$$h(x) = \sum_{k \neq 0} h_k \, e^{ikx}$$

on en tire le développement de Fourier de $w(x)$ :

$$w(x) = \sum_{k\neq 0} \frac{h_k}{e^{ik} - 1} e^{ikx} \quad .$$

La condition (4)' implique une minoration des dénominateurs :

$$|e^{ik\omega} - 1| = 2 \sin\left|\frac{\omega k - 2\pi\ell}{2}\right| \geqslant \frac{2}{\pi} \varepsilon |k|^{-\tau+3/2} \quad .$$

Supposons $h(x)$ de classe $C^\tau$ ; alors $|h_k| < k^{-\tau}|h|_\tau$ , d'où la majoration des coefficients de $w$ :

$$\left|\frac{h_k}{e^{ik\omega} - 1}\right| < \frac{\pi}{2\varepsilon} |k|^{-3/2} |h|_\tau \quad .$$

Si l'on désigne alors par $L(h)$ la fonction $w$ ainsi construite, on a la majoration :

(6) $$|L(h)|_o \leqslant \frac{c}{\varepsilon} |h|_\tau$$

où $c = \pi \sum_k |k|^{-3/2}$ .

De même si $h(x)$ est de classe $C^\tau$ , on a la majoration :

(6)' $$|L(h)|_o < \frac{c}{\varepsilon} |D^\tau h|_o \quad .$$

<u>Point (c) : Régularisation.</u> – Soit $\chi(x)$ une fonction $C^\infty$ telle que $\chi(x) = 0$ pour $|x| > 1$ , et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k . \chi(x) \, dx = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } 0 < k < \ell \end{cases} \quad .$$

Si $N$ et $M$ désignent deux paramètres réels, de grande valeur, on pose

$$\chi_{NM}(x , y) = N \chi(Nx) . M \chi(My) \quad .$$

On considère des fonctions $h(x , y)$ , définies dans une bande de la forme $a < y < b$ . Alors la régularisée

$$T_{NM}(h(x , y)) = \iint_{ay'b} \chi_{NM}(x - x' , y - y') \, h(x' , y') \, dx' \, dy'$$

est $C^\infty$ dans la bande plus étroite $a + 1/M < y < b - 1/M$ . A cause du choix très spécial du noyau $\chi$ , on voit que la régularisation $T_{NM}$ laisse invariante les polynômes $p(x , y)$ de degré $< \ell$ en chacune des variables $x , y$ . La régularisation ainsi définie offre ceci de particulier qu'elle approche de très près les fonctions déjà de classe $C^m$ , $m \geqslant \ell$ . Cette propriété s'exprime par les majorations (où $h$ est continue dans $a < y < b$ ) :

$$|D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} T_{NM} h| < c_\rho N^{\rho_1} M^{\rho_2} \sup|h| \tag{9}$$

$$|h - T_{NM}(h)| \leq c \sup_{\rho_1+\rho_2=\ell} N^{-\rho_1} M^{-\rho_2} |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} h| \tag{10}$$

où cette fois $h$ est de classe $C^\ell$ et où les constantes $c$ , $c_\rho$ dépendent de $\chi(\rho_1 , \rho_2)$ , mais non de $N$ , $M$ . La majoration (9) est immédiate ; (10) exige un développement de Taylor de $h(x - \xi/N , y - \eta/M)$ à l'ordre $\ell$ , et l'on remarque que $T_{NM}$ laisse invariant les termes de degré inférieur strictement à $\ell$ . On majore alors les deux restes d'ordre $\ell$ . En composant les opérateurs $L$ et $T$ , on a les majorations :

$$|LT_{NM}(h)| < \frac{c}{\varepsilon}|D^\tau T_{NM} h| < c_\rho \, c \frac{N^\tau}{\varepsilon} |h|_0 ,$$

et si $N > 1/\varepsilon$

$$|LT_{NM}(h)| < c_\rho \, cN^\sigma |h|_0 \qquad \sigma = \tau + 1 \tag{11}$$

de même :

$$|L^2 T_{NM}(h)| < c_\rho \, c^2 N^{2\sigma} |h|_0 . \tag{12}$$

<u>Point (a) : L'approximation.</u> – Reprenant l'application (3)

$$\begin{cases} x_1 = x + y + f(x , y) \\ y_1 = y + g(x , y) \end{cases}$$

on va y effectuer un changement de coordonnées :

$$\begin{cases} x = \xi + u(\xi , \eta) \\ y = \eta + v(\xi , \eta) \end{cases} . \tag{13}$$

L'application (3) s'écrit, dans le nouveau système de coordonnées

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi + \eta + \varphi(\xi , \eta) \\ \eta_1 = \eta + \psi(\xi , \eta) \end{cases} . \tag{14}$$

Posons $x_1 = \xi_1 + u_1$ , $y_1 = \eta_1 + v_1$ $(u_1 = u(\xi_1 , \eta_1)$ , $v_1 = v(\xi_1 , \eta_1))$ l'identification donne :

$$\xi + u(\xi , \eta) + y + f = \xi + \eta + \varphi + u_1$$

$$y + g = \eta + \psi + v_1$$

ou

$$(14)' \qquad \begin{cases} v + g = v_1 + \psi \\ u + y + f = u_1 + \eta + \varphi \end{cases} .$$

Pour déterminer les fonctions $u$ et $v$, on prendra le système (14) dans lequel on a fait $\varphi$ et $\psi = 0$ ; de plus on linéarise ce système en considérant $f$, $g$ $u$, $v$ et $|\eta - \omega|$ comme infiniment petits du premier ordre ; on peut alors remplacer $u_1 = u(\xi_1 , \eta_1)$ par $u(\xi + \omega , \eta)$ au second ordre près. Ceci conduit aux équations :

$$u(\xi + \omega , \eta) - u(\xi , \eta) = v + f(\xi , \eta)$$

$$v(\xi + \omega , \eta) - v(\xi , \eta) = g(\xi , \eta) \qquad .$$

Pour compenser la perte de dérivabilité causée par la résolution de ce système d'équation aux différences, il y aura lieu de régulariser les seconds membres par un opérateur $T$ du type $T_{NM}$ décrit au numéro précédent ; désignons de plus par $[g]$ la valeur moyenne $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\, dx$ ; on déterminera finalement $u$ et $v$ par le système :

$$(15) \qquad u(\xi + \omega , \eta) - u(\xi_1 \eta) = v + Tf$$

$$v(\xi + \omega , \eta) - v(\xi , \eta) = T(g - [g]) \qquad .$$

La valeur moyenne des deux membres de la première équation (15) donne :

$$[v] + [Tf] = 0$$

d'où le système final :

$$(16) \qquad \begin{cases} v = [v] + L(Tg) = L(Tg) - [Tf] \\ u = L(v + Tf) = L^2\, Tg + LTf \end{cases} .$$

Point (d) : Controle de l'erreur et convergence. – Les inégalités à vérifier sont trop longues pour être rapportées ici. On se bornera à indiquer la marche suivie, renvoyant le lecteur à l'article original [3] pour une vérification détaillée.

Posons

$$(17) \qquad K = 4/3 , \qquad \nu = 6(1 + \sigma) , \qquad \ell = 3 + 11\nu$$

et pour $N > 1$,

$$M = N^{\nu} > N , \qquad \delta = M^{-2K} \qquad .$$

A chaque pas de l'itération, la déviation avec le difféomorphisme $T\omega$ décroît comme $\delta_0^{K^n}$. En désignant par $\underset{\sim}{\delta}$, $\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{N}$ les mêmes paramètres après le $(n-1)$-ième pas, on montre que si :

$$|f| + |g| < \underset{\sim}{\delta} \quad \text{dans} \quad |y - \omega| < 1/\underset{\sim}{M}$$

et

$$|D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} Nf| + |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} Mg| \leqslant \underset{\sim}{N}^{1+\rho_1} \underset{\sim}{M}^{\rho_2} \qquad \rho_1 + \rho_2 = \ell$$

après le n-ième pas, on a les inégalités analogues

$$|\varphi| + |\psi| < \delta \quad \text{dans} \quad |\eta - \omega| < 1/M$$

et

$$|D^{\rho_1} D^{\rho_2} N\varphi| + |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} M\psi| \leqslant N^{1+\rho_1} M^{\rho_2} \quad .$$

Pour vérifier ces inégalités, on commence par appliquer les inégalités (11) et (12) aux formules (16), ce qui fournit pour $u$ et $v$ les majorations :

$$|u| + |v| < c\, N^{2\sigma} M^{-2} < 1/NM$$

$$|u|_1 + |v|_1 < 1/N \quad .$$

On montre alors que ces majorations permettent de définir le difféomorphisme transformé (14) dans l'anneau $|\eta - \omega| < 1/M$. Pour majorer $\varphi$ et $\psi$, on recourt d'abord à l'hypothèse (2°), qui exprime que la fonction $\psi$ a au moins un zéro dans $(0 < \xi < 2\pi)$ ce qui permet d'écrire que $\sup \psi$ est majorée par l'oscillation de $\psi$. On en déduit l'inégalité :

$$\sup|\psi(\xi , \eta)| < 2 \sup[\psi(\xi , \eta) + w(\eta)] \quad ,$$

$w$ fonction arbitraire de $\eta$ seul ; on fait choix de $w = -[Tg]$. Comme d'après (14)' $= v - v_1 + g$ et que d'après (15)

$$v(\xi + \omega , \eta) - v(\xi , \eta) = T(g - [g])$$

il vient

$$\frac{1}{2} |\sup \psi(\xi , \eta)| \leqslant |v(\xi + \omega , \eta) - v(\xi_1 , \eta_1) + g(\xi + u , \eta + v) - [Tg]_0$$

$$\frac{1}{2} |\psi|_0 < |D_\xi v| |\eta - \omega + \varphi| + |D_\eta v| . |\psi_0| + Tg(\xi + u , \eta + v) - Tg|$$
$$+ \sup|(1 - T) g(x , y)| \quad .$$

Pour majorer $|\varphi_0|_0$, on part de l'expression (14)', qu'on majore par la formule des accroissements finis. Additionnant les majorations de $\varphi$ et $\psi$, et utilisant les majorations de $u$, $v$, $|u|_1$, $|v|_1$ déjà obtenues, on obtient finalement :

$$|\varphi|_0 + |\psi|_0 < cN^{2\sigma+1} M^{-3} + |1 - Tg|_0 + |1 - Tf|_0 \quad .$$

On use alors de la majoration (10), ce qui donne

$$|\varphi|_o + |\psi|_o \quad c_1\{N^{2\sigma+1}\ M^{-3} + \underset{\sim}{N}^{1+\ell\cdot(1-K)}\} < \frac{1}{2} M^{-2K} + \frac{1}{2} M^{-2K}$$

( $\ell$ satisfaisant à (17)).

La majoration des dérivées d'ordre supérieur $m \leqslant \ell$ s'obtient par des procédés analogues.

Convergence de l'itération. - Désignons par $x = \xi + p_n$ , $y = \eta + q_n$ la transformation de coordonnées obtenue après $n$ itérations ; alors

$$|p_n| + |q_n| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u_i| + |v_i| < \sum_{i=1}^{n} 1/(N_o^{K^i})$$

et cette borne peut être rendue aussi petite qu'on veut, si $N_o$ est pris assez grand. En ce qui concerne les dérivées premières, on remarque que la matrice jacobienne du n-ième changement se met sous la forme

$$U_n = \begin{vmatrix} 1 + u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & 1 + v_\eta \end{vmatrix} ,$$

en sorte que la différence $|I - U_n|$ est majorée par $1/N_n$. On en déduit que le produit $U_1 U_2 \dots U_n = W_n$ admet une majoration de la forme

$$|I - Wn| \leqslant |\exp(\Sigma \frac{1}{N} J) - I| \quad \text{si} \quad U_\nu < I + \frac{1}{N_\nu} J \quad \text{où} \quad J = \begin{vmatrix} 11 \\ 11 \end{vmatrix} .$$

Revenant aux conditions (17), l'entier $\sigma$ est supérieur à $4$ , $\nu = 6 \times 5 = 30$ et $\ell = 3 + 11 \times \nu = 333$. L'auteur lui-même avoue ignorer dans quelle mesure ce nombre est imposé par la nature du problème, ou s'il est simplement le fruit d'une technique encore balbutiante.

## 3. Applications.

1° Stabilité des mouvements périodiques de type "elliptique". - Si le point fixe $O$ associé au mouvement périodique "elliptique" est tel que $(T)$ n'est pas tangente en $O$ à une rotation d'angle $2\pi/3$ ou $2\pi/4$ , et s'il existe un ordre $s$ pour lequel la constante $b$ du théorème 1 n'est pas nulle, alors le théorème s'applique, et conduit a l'existence de courbes invariantes, donc à la stabilité de ce mouvement. En effet, la forme réduite fait du difféomorphisme $(T)$ une approximation d'un difféomorphisme $(Tw)$ qui satisfait aux conditions du théorème dans un voisinage assez petit de $O$.

On est donc fondé à déclarer que "presque **tout** " mouvement périodique, de type elliptique, d'un système dynamique à deux degrés de liberté est stable.

2° Problème restreint des trois corps. - Deux points matériels J et S , de masses respectives $\mu$ et $1-\mu$ sont animés par rapport à leur centre de gravité O (supposé fixe) d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire $\omega$. Un troisième point matériel M , de masse "infinitésimale", est attiré par les points S et J conformément à la loi de Newton ; on suppose de plus que position et vitesse initiale de M sont dans le plan des orbites de S et J ; par raison de symétrie, tout le mouvement ultérieur de M sera également dans ce plan.

Rapportons le mouvement de M à un système d'axes mobiles Oxy , Ox porté par SOJ . L'intégrale des forces vives s'écrit :

$$h = v^2/2 - \left(\frac{k\mu}{MJ} + \frac{k(1-\mu)}{MS}\right) - \omega^2\, OM^2$$

k constante de la gravitation.

Si l'on fait $\mu = 0$ ( S et J confondus en O ), il existe deux mouvements périodiques circulaires dans toute hypersurface d'énergie h donnée, assez grande. Les rayons $a_1$ , $a_2$ de ces cercles sont donnés par l'équation :

$$-\frac{v^2}{r} = \frac{-k^2}{r^2} + \omega^2 r \qquad ,$$

d'où, par élimination de $v^2$ :

$$xk/r + 2\omega^2 r + 2h = 0 \qquad .$$

On vérifie aisément que cette équation a , pour h assez grand négatif, deux racines réelles positives $a_1$ , $a_2$ ; les trajectoires fermées correspondantes sont stables vis-à-vis d'une petite variation du paramètre $\mu$ , et donnent naissance à deux mouvements périodiques $(L_1)$ $(L_2)$ ; on peut montrer qu'en général, pour des valeurs de $\mu$ assez petites, les conditions de stabilité pour ce mouvements de type elliptique sont satisfaites. Quantitativement, si l'on désigne par (e) l'excentricité de l'ellipse képlérienne osculatrice au mouvement de M , on peut montrer que l'oscillation de cette fonction (e) au cours du temps est bornée, par une majoration de la forme $O(\mu^{3/8})$ (cf. [5]).

3° Généralisations aux dimensions supérieures. - Si l'on a dans un système conservatif à $(n+1)$ paramètres une solution périodique telle que le difféomorphisme correspondant soit tangent à une rotation, la même méthode conduit en général à l'existence de tores $T^n$ globalement invariants autour de O . Ceci, bien entendu, ne suffit pas pour affirmer la stabilité (à vrai dire très improbable) du mouvement périodique considéré.

4° Observations générales. - Le très grand intérêt de l'étude de MOSER réside (non seulement dans la technique d'approximation, qui a fait l'admiration unanime des spécialistes) dans le fait suivant : pour la première fois, on a mis en évidence, dans l'étude d'un difféomorphisme, l'existence d'une variété globalement invariante qui présente une certaine stabilité vis-à-vis des perturbations de ce difféomorphisme ; de ce point de vue, une étude géométrique complète de la configuration des orbites de (T) autour de 0 serait d'un très grand intérêt : que dire, par exemple, de l'ensemble des points périodiques ? de l'ensemble des courbes fermées invariantes (ensemble de Cantor) ? ces ensembles sont-ils organisés en configuration structurellement stable vis-à-vis des perturbations hamiltoniennes ?

Un théorème classique de Poincaré affirme qu'un système dynamique (à espace de configuration compact) dont le hamiltonien est analytique n'admet, en général, pas d'autre intégrale première que le hamiltonien lui-même. On s'est efforcé - en vain jusqu'à présent - de généraliser ce théorème au cas d'un hamiltonien différentiable. L'exemple de Moser montre que, dans le cas $n = 2$, il existe en général autour d'une solution périodique de type elliptique, une intégrale première continue (mais non différentiable, parce que localement constante sur un ouvert partout dense de l'espace).

De manière plus générale, l'exemple de Moser est typique d'une situation rencontrée très fréquemment en mécanique et en physique : on part d'un système mécanique (S) "dégénéré", c'est-à-dire qui présente un grand nombre d'intégrales premières indépendantes ; on le perturbe alors légèrement, par exemple en le couplant très faiblement avec un autre système dynamique; que peut-on dire du comportement des systèmes perturbés? Bien entendu, les intégrales premières de (S) disparaissent ; mais l'exemple de Moser montre que le système perturbé va conserver d'importantes traces de la simplicité de sa structure initiale, par exemple, par la présence de variétés invariantes structurellement stables. Tant sur le plan purement topologique de la configuration des trajectoires que par ses effets - non explicités - en mécanique statistique, ce phénomène inattendu mériterait d'être mieux connu.