

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE SAMUEL

Travaux d'Igusa sur les formes modulaires de genre 2

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 267, p. 365-372

http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__365_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX D'IGUSA SUR LES FORMES MODULAIRES DE GENRE 2

par Pierre SAMUEL

1. Position du problème.

Soit g un entier ≥ 1 . Les matrices symétriques d'ordre g sur \mathbb{C} forment un espace vectoriel de dimension $\frac{1}{2}g(g+1)$; celles dont la partie imaginaire est positive non-dégénérée en forment un cône convexe ouvert, qu'on appelle l'espace, ou "demi-plan" de Siegel, et qu'on note \mathbb{S}_g . Pour $g = 1$, on obtient le demi-plan ordinaire $\text{Im}(z) > 0$.

Le groupe symplectique $\text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ opère transitivement sur \mathbb{S}_g de la façon suivante : un élément M de $\text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des matrices réelles d'ordre g telles que

$$a \cdot {}^t b = b \cdot {}^t a, \quad c \cdot {}^t d = d \cdot {}^t c, \quad a \cdot {}^t d - b \cdot {}^t c = I_g \quad ;$$

pour $\tau \in \mathbb{S}_g$, on pose alors

$$(1) \quad M \cdot \tau = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$$

(voir [8], exposé 3). On obtient ainsi tous les automorphismes analytiques de \mathbb{S}_g , deux matrices symplectiques M, M' donnant le même automorphisme si et seulement si $M + M' = 0$. Les sous-groupes discrets de $\text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ donnent tous les groupes d'automorphismes analytiques qui opèrent de façon proprement discontinue dans \mathbb{S}_g .

Parmi ces sous-groupes discrets, le plus important est le groupe modulaire de Siegel $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. On considère aussi des sous-groupes discrets Γ qui sont "commensurables" à $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$, en ce sens que $\Gamma \cap \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ est d'indice fini dans Γ et dans $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Soit Γ un tel sous-groupe, et soit k un entier > 0 ; on appelle forme modulaire de poids k relative à Γ toute fonction analytique f sur \mathbb{S}_g telle que

$$(2) \quad f(M \cdot \tau) = f(\tau) \det(c\tau + d)^k \quad \text{pour tout } M \in \Gamma \text{ et } \tau \in \mathbb{S}_g \quad .$$

Les formes modulaires de poids k relatives à Γ forment un espace vectoriel $A(\Gamma)_k$ sur \mathbb{C} , et la somme directe

$$(3) \quad A(\Gamma) = \bigoplus_{k \geq 0} A(\Gamma)_k$$

est un anneau gradué, l'anneau des formes modulaires relatives à Γ .

La théorie des compactifications (cf. [8]) montre que $A(\Gamma)$ est une \mathbb{C} -algèbre intégralement close de type fini, et que la "variété modulaire" $\text{proj } A(\Gamma)$ contient l'espace homogène \mathbb{S}_g/Γ comme ouvert de Zariski ; son complémentaire est de codimension ≥ 2 pour $g \geq 2$.

Le problème qu'on se pose est de déterminer le plus explicitement possible l'anneau $A(\Gamma)$ et la variété $\text{proj } A(\Gamma)$. Trois méthodes d'attaque sont possibles :

1° La formule des traces de Selberg permet, théoriquement, de calculer la dimension de $A(\Gamma)_k$. IGUSA en dit quelques mots dans un appendice à [3] et dans [4]. Me sentant totalement incompetent, je me contenterai d'observer que les résultats récents de LANGLANDS sur cette formule (cf. [6]) ne paraissent pas utilisables, car les espaces homogènes \mathbb{S}_g/Γ ne sont pas compacts.

2° Pour $\Gamma = \text{Sp}(g, \mathbb{Z})$, les points de \mathbb{S}_g/Γ correspondent aux classes de variétés abéliennes de dimension g , polarisées de façon convenable. Or, pour $g = 1, 2, 3$, ces variétés sont "presque toutes" des jacobiniennes de courbes, de sorte que la variété des modules des courbes de genre 1, 2, 3 sera "proche" de \mathbb{S}_g/Γ . D'autre part cette variété des modules est connue pour $g = 1, 2$ (voir [2] et [7] pour $g = 2$), et, pour $g = 3$, la théorie classique des invariants des formes quartiques ternaires doit donner des résultats analogues.

C'est cette méthode qu'utilise IGUSA dans [3] pour $g = 2$. Soient A, B, C, D les covariants de degrés 2, 4, 6, 10 des formes sextiques binaires définis dans [2] ou [7], et X la variété $\text{proj } \mathbb{C}[A, B, C, D]$; la variété des modules des courbes de genre 2 sur \mathbb{C} est le complémentaire de $D = 0$ dans X . On a ainsi une application rationnelle $\mathbb{S}_2/\Gamma \rightarrow X$, où tous les points de \mathbb{S}_2/Γ correspondant aux produits de deux courbes elliptiques sont appliqués sur le point $B = C = D = 0$ de X ; on doit donc, pour obtenir une compactification de \mathbb{S}_2/Γ , faire "éclater" ce point de X (il ne s'agit pas d'une transformation monoïdale, ce qui, à la fois, complique et simplifie les choses). On obtient ainsi une compactification de \mathbb{S}_2/Γ , qui correspond à l'anneau des formes modulaires dont le degré est multiple de 6. Par normalisation, on obtient l'anneau $A(\Gamma)$, et on voit qu'il est engendré par les quatre séries d'Eisenstein

$$(4) \quad f_w(\tau) = \sum_{c,d} \det(c\tau + d)^{-w}$$

de poids $w = 4, 6, 10$, et 12. Ainsi la compactification $\text{proj. } A(\Gamma)$ est la variété quotient de $\mathbb{C}^4 - (0)$ par le groupe \mathbb{C}^* opérant par

$$(t_1, t_2, t_3, t_4) \rightsquigarrow (u^2 t_1, u^3 t_2, u^5 t_3, u^6 t_4) \quad (u \in \mathbb{C}^*) .$$

De plus IGUSA calcule explicitement en fonction de f_4, f_6, f_{10} et f_{12} les invariants arithmétiques définis dans [2], ce qui résoud un problème de Siegel.

3° Dans [5], IGUSA utilise avec grand succès les fonctions thêta, c'est-à-dire, essentiellement, la théorie analytique des variétés abéliennes polarisées. C'est cette méthode que nous allons maintenant résumer.

2. Les "thêta-constantes".

a. Les sous-groupes de congruences.

Etant donnée une matrice carrée s , nous noterons $(s)^{\circ}$ le vecteur formé par ses coefficients diagonaux. Soit n un entier ≥ 1 ; les matrices $M \in Sp(2g, \mathbb{Z})$ telles que $M \equiv I_{2g} \pmod{n}$ forment un sous-groupe distingué $\Gamma_g(n)$ de $Sp(2g, \mathbb{Z}) = \Gamma_g(1)$, appelé le sous-groupe principal de congruence de niveau n .

On appelle groupe de congruence tout sous-groupe de $\Gamma_g(1)$ contenant un $\Gamma_g(n)$; un tel groupe est commensurable à $\Gamma_g(1)$. Parmi eux, pour n pair, on considère le sous-groupe $\Gamma_g(n, 2n)$ de $\Gamma_g(n)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $(b)^{\circ} \equiv (c)^{\circ} \equiv 0 \pmod{2n}$; il contient $\Gamma_g(2n)$, est un sous-groupe invariant de $\Gamma_g(1)$, et est d'indice 2^{2g} dans $\Gamma_g(n)$. Le quotient $\Gamma_g(n)/\Gamma_g(2n, 4n)$ est commutatif, et $\Gamma_g(n, 2n)/\Gamma_g(2n, 4n)$ est un espace vectoriel de dimension $g(2g+1)$ sur \mathbb{F}_2 .

b. Définition des thêta-constantes.

Soient $m', m'' \in \mathbb{Z}^g$, $m = (m', m'') \in \mathbb{Z}^{2g}$, $\tau \in \mathbb{S}_g$ et $z \in \mathbb{C}^g$. Considérons la série

$$(5) \quad \theta_m(\tau, z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^g} e\left(\frac{1}{2} {}^t(p + \frac{1}{2} m') \tau (p + \frac{1}{2} m'') + {}^t(p + \frac{1}{2} m') (z + \frac{1}{2} m'')\right)$$

où $e(x) = \exp(2i\pi x)$; elle converge absolument et uniformément sur tout compact de $\mathbb{S}_g \times \mathbb{C}^g$, et sa somme est donc une fonction analytique de τ et de z . Pour $n = (n', n'') \in \mathbb{Z}^{2g}$, on a

$$(6) \quad \theta_{m+2n}(\tau, z) = (-1)^{{}^t m' \cdot n''} \theta_m(\tau, z)$$

$$(7) \quad \theta_m(\tau, z + \tau n) = (-1)^{{}^t m' \cdot n'' - {}^t m'' \cdot n'} e\left(-{}^t n' z - \frac{1}{2} {}^t n' \tau n'\right) \theta_m(\tau, z)$$

Un vecteur $m = (m', m'') \in \mathbb{Z}^{2g}$ tel que ${}^t m' \cdot m''$ soit pair est dit pair.

Les "thêta-constantes" sont les fonctions $\theta_m(\tau) = \theta_m(\tau, 0)$; ce sont des fonctions analytiques sur \mathbb{S}_g . Par (6) on peut se borner à considérer les θ_m dont le "vecteur" m est formé de zéros et de uns. On a la formule

$$(8) \quad \theta_m(\tau) \theta_m(\tau, z) = \sum_{n' \bmod 2} (-1)^{m' - n'} \theta_{(m'+n', 0)}(2\tau, z) \theta_{(n', 0)}(2\tau, z)$$

(sommation à 2^g termes). On en déduit que, pour tout point $\tau \in \mathbb{S}_g$, il existe $m \in \mathbb{Z}^{2g}$ tel que $\theta_m(\tau) \neq 0$ (sinon on aurait $\theta_{(n', 0)}(2\tau, z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^g$ par (8), ce qui est impossible) ; ce résultat est crucial.

Enfin on montre que des fonctions $\theta_m(\tau, z)$ convenables annulent certains polynômes homogènes de degré 4 ; ce sont les formules de Riemann.

c. Résultats principaux du cas général.

IGUSA explicite d'abord $g(2g + 1)$ matrices A_α qui engendrent le groupe $\Gamma_g(2)$. Il montre ensuite que, si on pose $f = \theta_m \theta_n$ (où m et n sont pairs), il existe un caractère χ de $\Gamma_g(2)$ tel que

$$(9) \quad f(M.\tau) = \chi(M) \det(c\tau + d) f(\tau)$$

pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_g(2)$. Par l'intermédiaire des $\chi(A_\alpha)$, on détermine le caractère χ , et on montre qu'on a $\chi(M) = 1$ si $M \in \Gamma_g(4, 8)$. Donc les $\theta_m \theta_n$ (pour m et n pairs) sont des formes modulaires de poids 1 pour $\Gamma_g(4, 8)$, c'est-à-dire des éléments de $A(\Gamma_g(4, 8))$. De plus :

THÉORÈME 1. - L'anneau $A(\Gamma_g(4, 8))$ est la clôture intégrale de $\mathbb{C}[(\theta_m \theta_n)]$, où m et n parcourent l'ensemble des vecteurs "pairs" formés de zéros et de uns.

En effet, pour tout sous-groupe Γ commensurable à $\Gamma_g(1)$, notons $F(\Gamma)$ le corps formé des quotients d'éléments homogènes de même degré de l'anneau gradué $A(\Gamma)$. On montre d'abord que le corps $\mathbb{C}((\theta_m \theta_n))$ engendré par les θ_m/θ_n contient $F(\Gamma_g(1))$. Pour cela on note que, pour $\tau \in \mathbb{S}_g$, l'application

$$(10) \quad z \rightsquigarrow (\theta_m(\tau, 2z))_{(m \bmod 2)} \quad (z \in \mathbb{C}^g)$$

définit un isomorphisme analytique du tore complexe $\mathbb{C}^g/(\tau, 1) \mathbb{Z}^{2g}$ sur une sous-variété abélienne $V(\tau)$ de l'espace projectif complexe de dimension $2^{2g} - 1$. L'idéal de $V(\tau)$ est engendré par des polynômes de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{C}((\theta_m(\tau)/\theta_n(\tau)))$. Ainsi $\mathbb{C}((\theta_m/\theta_n))$ et $\mathbb{C}((\theta_m/\theta_n))$ sont des corps de définition de la variété abélienne générique de la famille $(V(\tau))$. Donc $\mathbb{C}((\theta_m/\theta_n))$ contient le "corps des modules" de cette famille, qui est $F(\Gamma_g(1))$ (cf. [8]).

D'autre part un raisonnement de théorie de Galois montre, à partir de là, que $\mathbb{C}((\theta_m/\theta_n)) = F(\Gamma_g(4, 8))$. Comme les $\theta_m \theta_n$ sont de poids 1, on en déduit que $A(\Gamma_g(4, 8))$ et $\mathbb{C}[(\theta_m \theta_n)]$ ont même corps des fractions. Enfin, au moyen de (b), on montre que les $\theta_m \theta_n$ n'ont aucun zéro commun sur $\mathbb{S}_g/\Gamma_g(4, 8)$ ni sur sa frontière de sorte que, par le Nullstellensatz projectif, $A(\Gamma_g(4, 8))$ est entier sur $\mathbb{C}[(\theta_m \theta_n)]$.

d. Exemple : le cas $g = 1$.

Pour $g = 1$, il y a trois vecteurs pairs formés de zéros et de uns, d'où trois thêta-constantes fondamentales u_1, u_2, u_3 , liés par la formule de Riemann $u_1^4 - u_2^4 - u_3^4 = 0$. Comme $\mathbb{C}[u_1, u_2, u_3]/(u_1^4 - u_2^4 - u_3^4)$ est intégralement clos et de dimension 2 , il est isomorphe à $\mathbb{C}[u_1, u_2, u_3]$; on a donc

$$A(\Gamma_1(4, 8)) = \mathbb{C}[(u_i u_j)] \quad .$$

On en déduit

$$A(\Gamma_1(4)) = \mathbb{C}[u_1^2, u_2^2, u_3^2] , \quad A(\Gamma_1(2, 4)) = \mathbb{C}[(u_i^2 u_j^2)] ,$$

$$A(\Gamma_1(2)) = \mathbb{C}[u_1^4, u_2^4, u_3^4] = \mathbb{C}[u_1^4, u_2^4] \quad ;$$

alors $A(\Gamma_1(1))$ est aussi un anneau de polynômes (engendré par les séries d'Eisenstein de poids 4 et 6) . On retrouve les résultats classiques.

3. Le cas du genre 2.

a. La méthode de "descente" de $\Gamma_g(4, 8)$ à $\Gamma_g(1)$.

En général soient H l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur \mathbb{S} , k un entier ≥ 1 , et $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Sp}(g, \mathbb{R})$. Pour $f \in H$, soit f^P la fonction définie par

$$(11) \quad f^P(\tau) = f(P.\tau) \det(c\tau + d)^{-k} \quad ,$$

de sorte que $\text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ opère sur H par $(P, f) \rightsquigarrow f^P$. Si Γ est un sous-groupe de $\text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ commensurable à $\Gamma_g(1)$, les formes modulaires f de poids k pour Γ sont caractérisées par $f = f^P$ pour tout $P \in \Gamma$.

Considérons maintenant l'anneau gradué

$$R = \bigoplus_{k \geq 0} R_k \quad \text{où } R_0 = \mathbb{C} \text{ et } R_k = H \text{ pour } k \geq 1 \quad .$$

Si nous faisons opérer $P \in \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ sur chaque R_k par (11), on obtient un automorphisme de l'anneau R . L'anneau $A(\Gamma)$ n'est alors autre que le sous-anneau des invariants de R pour Γ .

Un calcul simplet montre que, si f est une forme modulaire de poids k pour Γ , alors f^P est une forme modulaire de poids k pour $P^{-1}\Gamma P$. Donc, si Γ est un sous-groupe invariant de $\Gamma' \subset \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$, Γ' et Γ'/Γ opèrent sur $A(\Gamma)$, et le sous-anneau des invariants de $A(\Gamma)$ pour ce groupe est $A(\Gamma')$.

Ainsi, comme on connaît $\Gamma_g(4, 8)$ par le théorème 1 du § 2, ainsi que les quotients successifs de la suite

$$(12) \quad \Gamma_g(4, 8) \subset \Gamma_g(4) \subset \Gamma_g(2, 4) \subset \Gamma_g(2) \subset \Gamma_g(1)$$

par le § 2 (a), on va pouvoir avoir des informations sur $A(\Gamma_g(1))$. IGUSA explicite complètement ce calcul pour $g = 2$, et pense que le calcul analogue pour $g = 3$ est abordable.

b. Calcul des $A(\Gamma)$ pour $g = 2$.

Pour $g = 2$, il y a dix thêta-constantes fondamentales u_i ($i = 1, \dots, 10$). Les formules de Riemann fournissent 21 relations quadratiques $F_j(u_i^2) = 0$ ($j = 1, \dots, 21$) entre leurs carrés. On montre que l'anneau $\mathbb{C}[T_1, \dots, T_{10}]/(F_j(T))$ est intégralement clos et de dimension 4, de sorte qu'il est isomorphe à $\mathbb{C}[(u_i^2)]$. Un lemme algébrique montre que $\mathbb{C}[(u_i)]$ est aussi intégralement clos, donc aussi $\mathbb{C}[(u_i, u_j)]$, qui est ainsi égal à $A(\Gamma_2(4, 8))$ (théorème 1).

La descente jusqu'à $A(\Gamma_2(2))$ (par (12)) ne présente pas de difficultés, et montre que $\text{proj } A(\Gamma_2(2, 4))$ est non-singulière, et que $\text{proj } A(\Gamma_2(2))$ est une hyperquadrique de $P_4(\mathbb{C})$.

Le passage de $\Gamma_2(2)$ à $\Gamma_2(1)$ est plus délicat. Le quotient $\Gamma_2(1)/\Gamma_2(2)$ est $\text{Sp}(4, \mathbb{F}_2)$, c'est-à-dire le groupe symétrique S_6 . Soit ρ_k la représentation de ce groupe dans $\Lambda(\Gamma_2(2))_k$; comme on connaît la liste complète des représentations du groupe symétrique, les informations qu'on a sur ρ_k permettent de la placer dans cette liste. A partir de là, des calculs montrent que :

THÉOREME 2. - L'anneau $A(\Gamma_2(1))$ est engendré par quatre séries d'Eisenstein de poids 4, 6, 10, 12, algébriquement indépendantes.

IGUSA détermine aussi le noyau de l'homomorphisme Φ de Siegel, c'est-à-dire l'idéal des "Spitzenformen".

c. Singularités des variétés modulaires.

On sait que la variété $\text{proj } A(\Gamma_2(1))$ a des singularités. D'autre part, si Γ' est un sous-groupe de congruence, $\text{proj } A(\Gamma')$ est un revêtement de $\text{proj } A(\Gamma_2(1))$, et on a pu se demander si ce revêtement est non-singulier lorsque Γ' est suffisamment petit. C'est vrai pour $\Gamma_2(2, 4)$, mais faux pour $\Gamma_2(4)$ et tous ses sous-groupes. En effet :

THÉOREME 3. - Il y a un point explicitement déterminé α de $\text{proj } A(\Gamma_2(4))$ tel qu'aucun anneau local noethérien entier sur l'anneau local analytique (ou formel) R de α ne soit factoriel (ni, a fortiori, régulier).

En effet R est entier sur l'anneau local R' du point de $\text{proj } A(\Gamma_2(2, 4))$ correspondant à α , et R' est un anneau de séries formelles à trois variables $R' = \mathbb{C}[[a, b, c]]$. Un calcul montre d'autre part que R contient un élément x tel que

$$(13) \quad x^2 = abc(a - bc)(b - ca)(c - ab) \quad .$$

Si S est un anneau factoriel entier sur R , $a, b, \dots, c - ab$ sont des carrés dans S (car ils sont deux à deux étrangers dans R' , donc dans S , et car toute unité de S est un carré par Hensel). Posons $a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2$; alors $u^2 - v^2 w^2$ etc., donc $u - vw$, $u + vw$, etc., sont des carrés dans S . Posons

$$a' = 2(u + vw)/(1 + u^2 + v^2 + w^2), \quad b' = 2(v + wu)/(1 + u^2 + v^2 + w^2), \\ \text{et} \quad c' = 2(w + uv)/(1 + u^2 + v^2 + w^2) \quad .$$

On a

$$a' - b'c' = 2(u - vw)(1 + u^2 - v^2 - w^2)/(1 + u^2 + v^2 + w^2)^2 \quad ,$$

et deux formules analogues pour b' et c' , de sorte que $a'b'c'$ ($a' - b'c'$) ($b' - c'a'$) ($c' - a'b'$) est un carré dans S ; ceci est l'analogue de (13), et permet de définir $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$ par récurrence. Notons \mathfrak{m} l'idéal maximal de S ; si q est un entier tel que $a', b', c' \in \mathfrak{m}^q$, on a $u + vw, u - vw \in \mathfrak{m}^q$, d'où $u \in \mathfrak{m}^q$, et $a, b, c \in \mathfrak{m}^{2q}$. Utilisant $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$ (qui sont dans \mathfrak{m}), on en déduit par récurrence que $a, b, c \in \mathfrak{m}^{2^n}$. D'où $a = b = c = 0$ par Krull, contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GODEMENT (Roger). - La formule des traces de Selberg, Séminaire Bourbaki, t. 15, 1962/63, n° 244, 10 p.
- [2] IGUSA (Jun-Ichi). - Arithmetic variety of moduli for genus two, *Annals of Math.*, t. 72, 1960, p. 612-649.
- [3] IGUSA (Jun-Ichi). - On Siegel modular forms of genus two, *Amer. J. of Math.*, t. 84, 1962, p. 175-200.
- [4] IGUSA (Jun-Ichi). - Structure theorems of modular varieties, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians [1962. Stockholm]*; p. 522-525. - Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.
- [5] IGUSA (Jun-Ichi). - On the graded rings of theta-constants (à paraitre) et on Siegel modular forms of genus two, II. (à paraitre).
- [6] JACQUET (Hervé). - Mémoire de Langlands sur la dimension des espaces de formes automorphes, Séminaire Bourbaki, t. 16, 1963/64, n° 261, 15 p.

- [7] SAMUEL (Pierre). - Invariants arithmétiques des courbes de genre 2, d'après Igusa, Séminaire Bourbaki, t. 14, 1961/62, n° 228, 13 p.
 - [8] Séminaire Cartan, t. 10, 1957/58 : Fonctions automorphes. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958.
-