GÉRARD SCHIFFMANN

Frontières de Furstenberg et formules de Poisson sur un groupe de Lie semi-simple

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. nº 268, p. 373-384

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__373_0>

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 268

Février 1964

FRONTIÈRES DE FURSTENBERG ET FORMULES DE POISSON SUR UN GROUPE DE LIE SEMI-SIMPLE

par Gérard SCHIFFMANN

(d'après Harry FURSTENBERG [3])

1. Résultats.

Soient, dans le plan complexe, D le disque unité et C sa frontière. Si f est une fonction harmonique bornée, définie dans D, on sait qu'il existe une fonction unique $\hat{f}$, définie sur C, mesurable et bornée, et telle que, pour tout z de D,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \hat{f}(e^{i\varphi}) \; N(z , \varphi) \; d\varphi ,$$

où N est le noyau de Poisson. On va interpréter ceci en termes de théorie des groupes, et montrer qu'on peut généraliser à tous les groupes de Lie réels, semi-simples, connexes et ayant un centre fini.

Le groupe des automorphismes du disque unité est le groupe des transformations homographiques de la forme

$$z \rightsquigarrow \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \qquad \text{avec} \quad a\bar{a} - b\bar{b} = 1 .$$

Soit G le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$. M désignant le sous-groupe de G formé des matrices $\pm I$ (I matrice unité), G/M est isomorphe au groupe des automorphismes de D. On fait opérer G dans $\bar{D}$. Soient K le stabilisateur de 0 dans G, et S la composante connexe du stabilisateur de 1 ; $G = KS$, et on a ainsi une décomposition d'Iwasawa-Mostow de G ; le normalisateur de S dans G est MS et, canoniquement, G/K (resp. G/MS) est isomorphe à D (resp. C). Soit π la mesure de Haar de C, considérée comme mesure sur G/MS ; G opère sur G/MS, et on vérifie, d'une part que le stabilisateur de π est exactement K, d'autre part que si $gK = z$ est une classe de G modulo K, alors

$$g\pi = N(z , .)\pi .$$

Il en résulte en particulier que π est quasi-invariante.

A toute fonction f, définie dans D, on associe une fonction $\tilde{f}$, définie sur G et invariante à droite par K. Pour que f soit harmonique, il faut et il suffit que

$$\tilde{f}(g) = \int_K \tilde{f}(gkx)\, dk .$$

La formule de Poisson s'écrit alors

$$\tilde{f}(g) = \int_{G/MS} \hat{f}(x)\, d\pi(g^{-1} x) .$$

Ces résultats se généralisent de la manière suivante : soit G un groupe de Lie réel, semi-simple, connexe, et ayant un centre fini ; considérons une décomposition d'Iwasawa-Mostow de G : $G = K.H.N = K.S$ (K compact, H abélien, N nilpotent, S résoluble) ; soient M le centralisateur de H dans K et $N(S) = M.S$ le normalisateur de S dans G. Enfin, posons

$$D = G/K \qquad \text{et} \qquad C = G/N(S) .$$

1° Il existe sur C une mesure π unique, ayant les propriétés suivantes : elle est positive de masse 1, invariante par K et quasi-invariante par G. Son stabilisateur dans G est exactement K.

2° L'application $gK \rightsquigarrow (gK)\pi$ est un homéomorphisme de D sur son image dans $\mathcal{P}(C)$, espace des mesures positives de masse 1 sur C. $\mathcal{P}(C)$ étant vaguement compact, la fermeture de l'image de D est une compactification de D. Cela étant, si l'on identifie C aux mesures ponctuelles de masse 1 sur C, C appartient à la compactification de D.

Ces résultats ont été complétés par MOORE [8], qui montre en particulier que cette compactification est une compactification de Satake de D (cf. § 3).

3° Soit f une fonction harmonique bornée sur G. Il existe une et une seule fonction $\hat{f}$, définie sur C, mesurable et bornée, telle que

$$f(g) = \int_C \hat{f}(x)\, d\pi(g^{-1} x) \qquad \text{(formule de Poisson).}$$

En généralisant la formule de la moyenne, ces résultats peuvent s'étendre : soit μ une mesure sur G, positive de masse 1 et de base la mesure de Haar de G. Appelons μ-harmonique toute fonction f, définie sur G et vérifiant l'équation de convolution

$$f(g) = \int_G f(gg')\, d\mu(g') .$$

On se limite aux fonctions f mesurables et bornées.

4° Toute fonction μ-harmonique (bornée) invariante à gauche par K , est constante. On en déduit certaines conséquences pour les fonctions harmoniques bornées (§ 5).

5° On peut obtenir une "formule de Poisson" pour les fonctions μ-harmoniques bornées, C étant remplacé par un espace homogène convenable de G (§ 6).

2. Définition et étude des sous-groupes frontières.

Si X est un espace localement compact, $\mathcal{P}(X)$ désignera l'ensemble des mesures sur X , positives de masse 1 . La convergence des mesures sera toujours la convergence vague.

DÉFINITION 1. - Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini. Un sous-groupe fermé H de G , H différent de G , est un sous-groupe frontière de G si :

1° G/H est compact.

2° Pour toute mesure π , appartenant à $\mathcal{P}(G/H)$, quasi-invariante, il existe une suite g_n de G , telle que $g_n \pi$ converge vers une mesure ponctuelle. G/H s'appelle alors une frontière de G .

Il suffit évidemment que la condition 2° soit vérifiée par une mesure quasi-invariante particulière, et elle est alors vérifiée par toute mesure, quasi-invariante ou non. De plus, elle est équivalente à la condition : "il existe une suite μ_n de $\mathcal{P}(G)$ telle que $\mu_n \star \pi$ converge vers une mesure ponctuelle". Cette définition a pour origine une propriété bien connue du noyau de Poisson du disque unité D : si un point de D tend vers un point frontière, le noyau se concentre en ce point. Comme dans ce cas particulier, on en déduira l'unicité de la représentation intégrale. L'existence sera conséquence d'une propriété de point fixe.

DÉFINITION 2. - On dit qu'un groupe localement compact possède la propriété de point fixe si, chaque fois qu'il opère continûment sur un convexe compact d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, il laisse fixe au moins un point de ce convexe.

En particulier, les groupes résolubles ou compacts possèdent la propriété de point fixe. Les résultats de ce paragraphe sont les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. - Soit G un groupe de Lie, réel connexe ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

1-1. G n'a pas de frontières.

1-2. G a la propriété de point fixe.

1-3. G est extension d'un compact par un résoluble connexe.

THÉORÈME 2. - Soit G un groupe de Lie, réel, semi-simple, connexe et ayant un centre fini. Soient $G = K.S$ (K compact, S résoluble) une décomposition d'Iwasawa-Mostow de G , et $N(S)$ le normalisateur de S dans G .

2-1. $N(S)$ est un sous-groupe frontière et a la propriété de point fixe. A un automorphisme intérieur près, il est le seul à posséder simultanément ces deux propriétés.

2-2. $N(S)$ est un sous-groupe frontière minimal.

2-3. $N(S)$ est maximal pour la propriété de point fixe.

En faisant le quotient par le radical, on voit que, pour le théorème 1, on peut se ramener au cas semi-simple, la condition 1-3 devenant simplement : " G compact". Ces deux théorèmes s'établissent simultanément. Néanmoins, certaines implications du théorème 1 se démontrent a priori.

1-3 entraîne 1-2. On a le critère suivant :

LEMME 1. - Soient G un groupe localement compact et G_1 un sous-groupe fermé de G . Si G_1 a la propriété de point fixe, si G/G_1 est compact, et si G laisse invariante une mesure sur G/G_1 , alors G a la propriété de point fixe (évident).

Soit alors G un groupe localement compact admettant un sous-groupe invariant résoluble G_1 ; si G/G_1 est compact, le lemme s'applique, et G a la propriété de point fixe. Remarquons que ceci ne suppose pas G connexe.

1-2 entraîne 1-1. Soient G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini, H un sous-groupe frontière de G . $\mathcal{P}(G/H)$ est convexe, faiblement compact. Si G a la propriété de point fixe, il laisse invariant une mesure sur G/H , mesure qui, d'après la propriété de frontière, ne peut être que ponctuelle. On en déduit que $H = G$, ce qui est impossible.

1-2 entraîne 1-3. On se ramène au cas semi-simple. Pour montrer que G est compact, il suffit de montrer que $Ad(G)$ est compact, ce qui est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 2. - Soient G un groupe de Lie connexe ayant la propriété de point fixe, et ρ une représentation linéaire de G , de dimension finie, irréductible et unimodulaire ; alors $\rho(G)$ est compact.

Ce lemme s'établit en faisant opérer G sur l'espace des mesures sur l'espace projectif associé à l'espace de la représentation. G laisse fixe une mesure positive de masse 1, et on montre, à l'aide du support de cette mesure, que si $\rho(G)$ n'est pas compact, alors ρ n'est pas irréductible.

Cela étant, 1-2 entraîne 1-3, même si G n'est pas connexe, pourvu qu'il n'ait qu'un nombre fini de composantes connexes.

Pour obtenir les autres propriétés, remarquons d'abord que si F est un sous-groupe frontière de G (ayant les propriétés du théorème 2), alors F est contenu dans un conjugué de $N(S)$ (plus généralement d'un sous-groupe fermé, ayant la propriété de point fixe et contenant S). En effet, $N(S)$ ayant, d'après ce qui précède, la propriété de point fixe, laisse invariante une mesure sur G/F et, utilisant la propriété de frontière, on voit que cette mesure est ponctuelle.

Le point central de la démonstration est le lemme suivant :

LEMME 3. - Il existe un sous-groupe frontière F ayant la propriété de point fixe.

Soit ν, appartenant à $\mathcal{P}(G/S)$, une mesure quasi-invariante par G. L'ensemble Q contenu dans $\mathcal{P}(G/S)$ des mesures limites de mesures de la forme $\mu \star \nu$, μ appartenant à $\mathcal{P}(G)$, est convexe vaguement compact. G opère dans Q.

Soit π un élément de Q, stable par $N(S)$. K est homéomorphe à G/S ; on peut donc considérer π comme une mesure sur K.

Soit K_o le plus petit sous-groupe fermé de K, contenant le support de π. Il est bien connu que dk_o, mesure de Haar de K_o, peut se calculer à partir de π par des moyennes de π et de ses convolées avec elle-même. On en déduit que dk_o, considérée comme mesure sur G/S, appartient à Q, et est stable par $N(S)$.

On peut prendre $F = K_o S$. En effet, on a une application d'espaces homogènes de G/H dans G/F, application qui se prolonge aux mesures. L'image ν^1 de ν est quasi-invariante. De plus, il existe une suite u_n de $\mathcal{P}(G)$ telle que $\mu_n \star \nu$ converge vers dk_o, donc $\mu_n \star \nu'$ converge vers une mesure ponctuelle. F est donc un sous-groupe frontière (on verra plus loin que F est différent de G). F a la propriété de point fixe : en effet, S est résoluble connexe, F/S est compact, et dk_o, considérée comme mesure sur F/S, est stable par F. Il suffit donc d'appliquer le lemme 1. Comme G est non compact, il en résulte en particulier que F est différent de G. Enfin, comme S est connexe, F n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, donc est extension d'un groupe compact par un groupe résoluble connexe. On peut supposer que F contient le normalisateur de S, et pour voir qu'il lui est égal, on applique le lemme suivant :

LEMME 4 (GODEMENT). - $N(S)$ est maximal parmi les sous-groupes fermés qui sont extension d'un compact par un résoluble connexe.

Les assertions non encore démontrées des théorèmes 1 et 2 sont maintenant triviales.

D'autre part, il est clair, qu'à un automorphisme intérieur près, les sous-groupes frontières de G sont les sous-groupes fermés, différents de G, et contenant $N(S)$.

3. Compactification de G/K.

On conserve les notations du § 1. En particulier, $D = G/K$, $C = G/N(S)$, et on sait que $N(S) = M.H.N$, où M est le centralisateur de H dans K. C étant homéomorphe à K/M, il existe une mesure unique π, appartenant à $\mathcal{P}(C)$ et invariante par K.

Soit π^* la mesure sur G définie par :

$$\int_G f(g)\, d\pi^*(g) = \int_C d\pi(gb) \int_{N(S)} f(gb)\, db , \qquad f \in \mathcal{K}(G) ,$$

où db est une mesure de Haar à gauche de $N(S)$. Un calcul simple montre que, pour db convenablement normalisée, on a

$$\pi^* = \chi(g)\, dg ,$$

où χ est définie par $\chi(khn) = \chi(h) = \exp(2\rho(\log h))$, 2ρ désignant la somme des racines positives. Il en résulte que π^*, donc π, est quasi-invariante. Le stabilisateur de π est exactement K. En effet, pour que g stabilise π, il faut et il suffit qu'il stabilise π^*, c'est-à-dire χ. Ecrivant $g = khk'$, on en déduit que g appartient à K.

L'application $gK \rightsquigarrow (gK)\pi$ est une injection continue de D dans $\mathcal{P}(C)$. La fermeture de l'image de D est vaguement compacte, et il résulte de la propriété de frontière de C que les mesures ponctuelles appartiennent à cette fermeture. On peut donc considérer C comme faisant partie de la "frontière de Furstenberg" de D. On dira que C est la frontière distinguée.

MOORE [8] a établi les points suivants :

1° $gK \rightsquigarrow (gk)\pi$ est un homéomorphisme de D sur son image. On a donc une compactification de D.

2° Ces résultats restent valables pour certains sous-groupes frontières, autres que les sous-groupes frontières minimaux.

3° Les compactifications de Furstenberg sont exactement les compactifications de Satake.

4. La formule de Poisson pour les fonctions harmoniques.

On dit qu'une fonction f, définie sur G, est harmonique si elle vérifie la formule de la moyenne

$$f(g) = \int_K f(gkx)\, dk ,$$

et on se limite aux fonctions mesurables et bornées. Cette formule entraîne, d'une part, que f est invariante à droite par K et, d'autre part, que f est indéfiniment différentiable.

Pour toute fonction harmonique bornée f, soit Q_f l'ensemble des fonctions φ mesurables et bornées, telles que

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty ,$$
$$f(g) = \int_K \varphi(gkx)\, dk .$$

f lui appartenant, Q_f est non vide ; il est convexe, borné et fermé pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$, donc compact pour cette topologie. G opérant par translations à droite, et $N(S)$ ayant la propriété de point fixe, il existe un élément φ de Q_f, invariant à droite par $N(S)$, c'est-à-dire définissant une fonction $\hat{f}$ sur C. Il suffit alors de remarquer que $dk * \delta_x$ (δ_x : masse $+1$ au point x de C) est invariante par K, donc égale à π, pour obtenir la formule de Poisson

$$f(g) = \int_C \hat{f}(gx)\, d\pi(x) .$$

Inversement, on vérifie sans peine que si $\hat{f}$ est une fonction mesurable et bornée, alors cette formule définit une fonction harmonique bornée sur G. Quant à l'unicité, on la démontre d'abord pour les $\hat{f}$ continues en utilisant comme dans le cas du cercle, la propriété de frontières, puis on passe au cas général par régularisation (unicité signifie évidemment unicité de la classe de fonctions ...).

5. Un théorème sur les fonctions μ-harmoniques.

Soit μ appartenant à $\mathcal{P}(G)$, et absolument continue par rapport à dg. On appelle fonction μ-harmonique, toute fonction f vérifiant

$$f(g) = \int_G f(gg')\, d\mu(g') ,$$

et on se limite aux fonctions μ-harmoniques mesurables et bornées.

THÉORÈME. - Toute fonction μ-harmonique bornée, invariante à gauche par K, est constante.

La démonstration est trop longue pour pouvoir être donnée ici. On va simplement tirer de ce théorème deux résultats concernant les fonctions harmoniques bornées.

PROPOSITION 1. - Pour qu'une fonction f, mesurable et bornée, soit harmonique, il faut et il suffit que

(1) $f(g) = \int_{G\times K} f(gkg')\, dk\, d\mu(g')$ (formule de la moyenne généralisée).

En effet, si f est harmonique, il est évident qu'elle vérifie (1). Réciproquement, si f vérifie (1),

$$\Phi_g(g') = \int_K f(gkg')\, dk$$

est invariante à gauche par K, bornée, et vérifie aussi (1) ; Φ_g est donc $(dk \star \mu)$-harmonique : elle est constante. Il en résulte trivialement que f vérifie la formule de la moyenne habituelle, donc que f est harmonique.

Les fonctions harmoniques étant invariantes à droite par K, on peut les considérer comme des fonctions sur G/K. D'autre part, on appelle laplacien sur G/K, tout opérateur différentiel sur G/K, invariant par G, elliptique du second ordre, et nul sur les constantes. Il existe effectivement de tels opérateurs (LAPLACE-BELTRAMI).

PROPOSITION 2. - Soit f une fonction de classe C^2, sur G/K ; pour que f bornée soit harmonique, il faut et il suffit que f soit annulée par un laplacien.

Dans un sens, c'est clair, puisqu'on sait [5] qu'une fonction harmonique est annulée par tout opérateur différentiel, invariant par G, et nul sur les constantes. Dans l'autre sens, si G/K est de rang 1, le résultat est évident, et l'hypothèse "bornée" est d'ailleurs inutile. Dans le cas général, soient Δ un laplacien sur G/K, et $\tilde{\Delta}$ un opérateur différentiel sur G, invariant à gauche par G, à droite par K, et dont la restriction aux fonctions invariantes à droite par K coïncide avec Δ ; HUNT [7] a montré qu'un tel opérateur pouvait être défini par un semi-groupe de mesures de $\mathcal{P}(G)$, c'est-à-dire qu'il existe un semi-groupe $(\mu_t)_{t>0}$ de mesures positives de masse 1, tel que

$$\frac{d}{dt}\left(\int_G \varphi(gg')\, d\mu_t(g')\right)_{t=0} = \tilde{\Delta}\varphi(g) ,$$

cette égalité étant valable pour les fonctions φ bornées et de classe C^2. De plus, ce semi-groupe est unique, d'où il résulte qu'il est invariant par $ad(k)$, puisque $\tilde{\Delta}$ l'est. Appliquant ceci à une fonction f, annulée par $\tilde{\Delta}$, on montre facilement que f vérifie la formule de la moyenne généralisée, donc que f est harmonique (les mesures μ_t sont de base dg).

6. La formule de Poisson pour les fonctions μ-harmoniques.

Soit toujours μ, appartenant à $\mathcal{P}(G)$ et de base dg.

THÉORÈME. - Il existe un sous-groupe M_μ de M, ayant même composante connexe que M, et une mesure ν, sur l'espace $G/M_\mu S$, positive de masse 1, absolument continue par rapport aux mesures quasi-invariantes, le couple $(G/M_\mu S, \nu)$ ayant la propriété suivante : pour toute fonction μ-harmonique bornée f, il existe une et une seule fonction $\hat{f}$, définie sur $G/M_\mu S$, ν-mesurable et bornée, telle que

$$f(g) = \int_{G/M_\mu S} \hat{f}(gx)\, d\nu(x) .$$

Réciproquement, si $\hat{f}$ est une fonction, définie sur $G/M_\mu S$, ν-mesurable et bornée, alors la formule précédente définit une fonction f, μ-harmonique et bornée.

$G/M_\mu S$ s'appelle le μ-espace de G. Comme M est compact, il n'y a, lorsque μ varie, qu'un nombre fini d'espaces de Poisson possibles. On peut donner des exemples où M_μ est différent de M. De plus, on verra que $\mu \star \nu = \nu$, d'où l'on peut déduire le critère suivant :

LEMME. - Si pour un entier n, le support de μ^{*n} est un voisinage de l'élément neutre dans G, alors M_{μ^*} est égal à M.

Démonstration du théorème. - Pour résoudre l'équation :

$$f(g) = \int_G f(gg')\, d\mu(g') ,$$

on peut procéder par approximations successives. Formellement, partant d'une fonction φ quelconque, on considère la suite

$$\varphi_n(g) = \int_G \varphi_{n-1}(gg')\, d\mu(g') ,$$

et la limite est μ-harmonique.

Remarquons qu'on a

$$\varphi_n(g) = \int_{G^n} \varphi(gg_1\, g_2 \dots g_n)\, d\mu(g_1)\, d\mu(g_2) \dots d\mu(g_n) .$$

Soient $\Omega = G^N$ et $d\omega = \mu^N$. Désignons par $X_1 , \dots , X , \dots$ les applications coordonnées. Elles forment une suite de variables aléatoires à valeurs dans G, et de même répartition. On a

$$\varphi_n(g) = \int_\Omega \varphi(gX_1(\omega) \dots X_n(\omega))\, d\omega .$$

En "passan+ à la limite", on obtient une représentation intégrale des fonctions μ-harmoniques, représentation qui, convenablement transformée, donnera la représentation intégrale cherchée.

D'une manière précise, soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des fonctions φ, définies sur G, bornées, uniformément continues pour la structure uniforme gauche de G, et en outre telles que

$$\Phi(g , \omega) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(gX_1(\omega) \dots X_n(\omega))$$

existe, pour tout g, $d\omega$-presque partout. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des fonctions limites Φ ; c'est une sous-algèbre de $L^\infty\ (d\omega \circ \mu)$, et G opère continûment sur $\mathfrak{A}$. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions μ-harmoniques, bornées et uniformément continues à gauche. Si Φ appartient à $\mathfrak{A}$,

$$f(g) = \int_\Omega \Phi(g , \omega)\, d\omega$$

appartient à $\mathcal{H}$; d'où une application linéaire $u : \mathfrak{A} \to \mathcal{H}$.

On va montrer que u est bijective.

LEMME. - $\mathcal{H} \subset \mathfrak{F}$.

Soient f appartenant à $\mathcal{H}$, et $W_n(g , \omega) = f(gX_1(\omega) \dots X_n(\omega))$. La propriété de μ-harmonicité signifie que, pour tout g, la suite $W_n(g , \cdot)$ est une martingale ; comme f est bornée, c'est une martingale bornée, donc convergente. Ceci définit une application v de $\mathcal{H}$ dans $\mathfrak{A}$, et il est clair que u et v sont réciproques. $\mathfrak{A}$ et $\mathcal{H}$ peuvent être munies des normes L^∞, et u et v, n'augmentant pas ces normes, les conservent. Comme $\mathcal{H}$ est fermé dans $L^\infty(G)$, $\mathfrak{A}$ est un espace de Banach. En introduisant les fonctions complexes, on voit qu'en fait $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre. $\mathfrak{A}$ s'identifie donc à l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact Π.

Soient $\Phi \in \mathfrak{A}$, f la fonction correspondante sur π, $f = u(\Phi) \in \mathcal{H}$; soit ν la mesure sur Π, définie par

$$\int_\Pi \hat{f}(x)\, d\nu(x) = \int_\Omega \Phi(e\,,\,\omega)\, d\omega = f(e)\ .$$

G , opérant sur $\mathfrak{A}$, opère sur Π , et il vient :

$$f(g) = \int_\Pi \hat{f}(gx)\, d\nu(x)\ .$$

Π s'identifie à un espace homogène compact de G , et on vérifie immédiatement que $\mu \star \nu = \nu$. Il en résulte que ν est absolument continue par rapport aux mesures quasi-invariantes sur Π . La formule s'étend, par régularisation, à toutes les fonctions μ-harmoniques bornées.

Il reste à préciser Π . Soient M' un espace homogène compact de G , et A le stabilisateur d'un point x_0 de Π . Il existe une mesure θ appartenant à $\mathcal{P}(M')$, stable par A . En effet, $\lambda \leadsto \mu \star \lambda$ applique continûment $\mathcal{P}(M')$ dans lui-même, donc il existe un point fixe λ : $\lambda \star \mu = \lambda$. Si $\hat{\psi}$ appartient à $\mathcal{C}(M')$,

$$f(g) = \int_{M'} \hat{\psi}(gx)\, d\lambda(x)$$

appartient à $\mathcal{H}$ (évident). Il suffit de prendre

$$\theta : \hat{\psi} \leadsto \hat{f}(x_0) \qquad (\ \hat{f} : \text{"donnée frontière" de } f\ ).$$

En particulier, si $M' = C$, l'orbite $G\theta$ de θ est compacte, donc contient une mesure ponctuelle, d'après la propriété de frontière. A un automorphisme intérieur près, on en déduit que $A \subset N(S)$. Pour achever la démonstration, il faut montrer que $N(S)/A$ est fini ; disons simplement que le théorème du § 5 joue un rôle essentiel : il signifie que K est transitif sur Π .

Remarques. - Le mémoire de FURSTENBERG contient également les points suivants :

1° Dans le cas des domaines de Cartan, la "frontière distinguée" correspond à la frontière de Bergmann-Silov.

2° En se limitant aux mesures μ , à support compact et à densité bornée, on peut définir, pour les fonctions μ-harmoniques, la frontière de Martin.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELZANT (Antoine). - Fonctions harmoniques sur un groupe semi-simple, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 7, 1962/63, n° 10 et 11, 19 et 25 p.

[2] DOOB (J. L.). - Discrete potential theory and boundaries, J. Math. and Mech., t. 8, 1959, p. 433-458 et 993.

[3] FURSTENBERG (Harry). - A Poisson formula for semi-simple Lie groups, Annals of Math., Series 2, t. 77, 1963, p. 335-386.

[4] FURSTENBERG (Harry). - Non-commuting random products, Trans. Amer. math. Soc., t. 108, 1963, p. 377-428.

[5] GODEMENT (Roger). - Une généralisation du théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 234, 1952, p. 2137-2139.

[6] HERMANN (Robert). - Geometric aspects of potential theory in the bounded symmetric domains, Math. Annalen, t. 148, 1962, p. 349-366.

[7] HUNT (G.). - Semi-groups of measures on Lie group, Trans. Amer. math. Soc., t. 81, 1956, p. 264-293.

[8] MOORE (Calvin C.). - Compactifications of symmetric spaces, Amer. J. of Math., t. 86, 1964, p. 201-218 et 358-378.