

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

BERNARD MALGRANGE

Systemes différentiels à coefficients constants

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 246, p. 79-89

http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__79_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SYSTEMES DIFFÉRENTIELS À COEFFICIENTS CONSTANTS

par Bernard MALGRANGE

1. Introduction.

Soit V une variété analytique complexe, dénombrable à l'infini, de dimension n ; désignons par \mathcal{O} (resp. ${}^n\Omega$) le faisceau des germes de fonctions holomorphes (resp. de formes holomorphes de degré n) sur V , et par $\mathcal{P}^{p,q}_E$ (resp. $\mathcal{P}^{p,q}_{\mathcal{O}'}$) le faisceau des germes de formes différentielles à coefficients distributions de type (p, q) ; désignant par d'' la composante de type $(0, 1)$ de la différentielle extérieure, on a les deux suites exactes suivantes, qui sont en dualité locale (en un sens évident) :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_E \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_E \rightarrow 0$$

$$(2) \quad 0 \leftarrow \mathcal{N}^{n,n}_{\mathcal{O}'} \xleftarrow{d''} \dots \xleftarrow{d''} \mathcal{N}^{n,0}_{\mathcal{O}'} \leftarrow \mathcal{N} \leftarrow 0$$

Soit alors \mathcal{F} un faisceau analytique cohérent sur V . Considérons la suite

$$(1') \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_E \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_E \rightarrow 0$$

déduite de (1) par produit tensoriel sur \mathcal{O} , et la suite

$$(2') \quad 0 \leftarrow \underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{N}^{n,n}_{\mathcal{O}'}) \leftarrow \dots \leftarrow \underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{N}^{n,0}_{\mathcal{O}'}) \leftarrow \underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{N}) \leftarrow 0$$

déduite de (2) par application de $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \cdot)$ (on omet le \mathcal{O} pour simplifier les notations).

On sait, par la théorie de la division des distributions [5], que, en tout point $a \in V$, $\mathcal{P}^{p,q}_E$ est un \mathcal{O}_a -module plat (et $\mathcal{P}^{p,q}_{\mathcal{O}'}$ un \mathcal{O}_a -module injectif). Par suite,

a. (1') est encore exact [11] ; comme $\mathcal{P}^{p,q}_E$ est un faisceau fin, on en déduit que les groupes de cohomologie $H^k(V, \mathcal{F})$ s'identifient avec les groupes de cohomologie du complexe $\bigoplus_P (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}^{0,p}_E)(V)$, muni de la différentielle évidente (et la même chose pour les groupes de cohomologie à support dans une famille paracompactifiante).

b. (1') et (2') sont en dualité locale.

En raisonnant comme SERRE [11], on trouve alors ceci : supposons que les applications

$$(\mathfrak{F} \otimes {}^0, p \mathfrak{E})(V) \rightarrow (\mathfrak{F} \otimes {}^0, p+1 \mathfrak{E})(V)$$

soient des homomorphismes (au sens des espaces vectoriels topologiques) pour $p = q$ et $p = q - 1$; alors l'espace $H^q(V, \mathfrak{F})$ est muni canoniquement d'une structure d'espace de Fréchet, et son dual topologique est isomorphe à l'espace de cohomologie d'indice $(n, n - q)$ de la suite des sections à support compact de (2'), c'est-à-dire à $\text{Ext}_c^{n-q}(X; \mathfrak{F}, {}^n \Omega)$.

Dans le paragraphe suivant, on aura $V = \underline{\mathbb{C}}^n$, $\mathfrak{F} =$ le faisceau analytique associé à un faisceau algébrique cohérent. La différence est qu'au lieu de travailler avec des sections ordinaires de faisceaux, nous serons intéressés à des sections ayant une "croissance convenable" à l'infini.

2. Certains espaces de fonctions holomorphes.

Notations.

$x = (x_1, \dots, x_n)$ désigne un point de $\underline{\mathbb{R}}^n$.

$\zeta = \xi + i\eta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) = (\xi_1 + i\eta_1, \dots, \xi_n + i\eta_n)$ un point de $\underline{\mathbb{C}}^n$.

$$\zeta x = \sum \zeta_j x_j .$$

Si Γ est un compact convexe $\subset \underline{\mathbb{R}}^n$, la fonction $\eta \rightsquigarrow \hat{\Gamma}(\eta)$ est définie par

$$\hat{\Gamma}(\eta) = \int_{\Gamma} e^{\eta x} dx \quad (dx = \text{mesure de Lebesgue sur } \underline{\mathbb{R}}^n) .$$

Si $\zeta = \xi + i\eta$, on pose encore $\hat{\Gamma}(\zeta) = \hat{\Gamma}(\eta)$. On supposera dans toute la suite que Γ a un point intérieur ; alors $\hat{\Gamma}$ est partout > 0 . \mathcal{S} désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide sur $\underline{\mathbb{C}}^n$ (identifié à $\underline{\mathbb{R}}^{2n}$) muni de la topologie habituelle, \mathcal{S}' son dual. \mathcal{S}'_{Γ} désigne l'ensemble des fonctions φ sur $\underline{\mathbb{C}}^n$ telle que la fonction

$$(\xi, \eta) \rightsquigarrow \frac{1}{\hat{\Gamma}(\eta)} \varphi(\xi, \eta)$$

appartienne à \mathcal{S} , muni de la topologie évidente. Son dual peut être identifié à \mathcal{S}'_{Γ} , espace des distributions T sur $\underline{\mathbb{C}}^n$ telles que $\hat{\Gamma}T \in \mathcal{S}'$; mais il est préférable, à cause de la formule de Plancherel, de considérer l'antidual de \mathcal{S}'_{Γ} plutôt que son dual, et de l'identifier à $\mathcal{S}'_{-\Gamma}$ ($-\Gamma$ désignant, comme il se doit, le symétrique de Γ par rapport à l'origine), au moyen de la formule suivante : si $T \in \mathcal{S}'_{-\Gamma}$, $\varphi \in \mathcal{S}'_{\Gamma}$, on pose

$$\langle T|\varphi \rangle = \langle \hat{\Gamma}T, \hat{\Gamma}^{-1} \varphi \rangle$$

où le crochet au second membre désigne le produit scalaire entre \mathcal{S}' et \mathcal{S} , et où l'on pose

$$\tilde{\psi}(\zeta) = \overline{\psi(\bar{\zeta})} \quad .$$

L'intérêt de ces espaces, a priori bizarres, est le suivant : si \mathcal{O}^Γ désigne l'intersection de \mathcal{S}^Γ avec l'espace des fonctions holomorphes sur $\underline{\mathbb{C}}^n$, on a, d'après le théorème de Paley-Wiener

$$\mathcal{O}^\Gamma = \mathfrak{F}(\Gamma)$$

($\mathcal{O}(\Gamma)$, espace des fonctions indéfiniment dérivables dans $\underline{\mathbb{R}}^n$, à support dans Γ ; \mathfrak{F} = Fourier) ; pour étudier cet espace, nous sommes conduits à introduire $P, q_{\mathcal{S}}^\Gamma$, espace des formes différentielles de type (p, q) à valeurs dans \mathcal{S}^Γ , et à considérer la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^\Gamma \rightarrow \mathcal{O}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}}^\Gamma \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \mathcal{O}, \mathcal{N}_{\mathcal{S}}^\Gamma \rightarrow 0 \quad .$$

On ignore si cette suite est exacte ; mais considérons, pour Ω ouvert convexe dans $\underline{\mathbb{R}}^n$, l'espace \mathcal{S}^Ω (resp. \mathcal{O}^Ω) limite inductive des espaces \mathcal{S}^Γ (resp. \mathcal{O}^Γ), Γ parcourant l'ensemble des convexes compacts $c \subset \Omega$, et désignons par $P, q_{\mathcal{S}}^\Omega$ l'espace des formes différentielles de type (p, q) à coefficients dans \mathcal{S}^Ω . Nous avons alors le théorème suivant (voir la démonstration dans [6]) :

THÉORÈME 2.1. - Soit Ω un ouvert convexe $c \subset \underline{\mathbb{R}}^n$. La suite

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^\Omega \rightarrow \mathcal{O}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}}^\Omega \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \mathcal{O}, \mathcal{N}_{\mathcal{S}}^\Omega \rightarrow 0$$

est exacte.

Soit maintenant A l'anneau $\underline{\mathbb{C}}[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes à n indéterminées, qu'on fait opérer "multiplicativement" dans les fonctions sur $\underline{\mathbb{C}}^n$, i. e.

$$X_j f(\zeta) = \zeta_j f(\zeta) \quad .$$

On sait, par la théorie de la division des distributions, que \mathcal{S} est un A -module plat, et même bien davantage : si \mathfrak{I} est un idéal de A , pour que $\varphi \in \mathcal{S}$ appartienne à $\mathfrak{I}\mathcal{S}$, il faut et il suffit que, $\forall a \in \underline{\mathbb{C}}^n$, la série de Taylor φ_a de φ au point a appartienne à $\mathfrak{I}\mathfrak{S}_a$, \mathfrak{S}_a désignant les séries formelles en $\zeta - a$, et $\underline{\zeta - a}$ (sur lesquelles A opère de la manière évidente). Pour simplifier, nous dirons qu'un A -module de fonctions différentiables sur $\underline{\mathbb{C}}^n$ (où A opère de la manière indiquée) est "de synthèse harmonique" s'il possède la propriété précédente. Un tel A -module est toujours plat (on se ramène immédiatement à la platitude sur A des séries formelles, qui est connue [1]).

Par transport de structure, on voit que \mathcal{S}^Γ est un A -module de synthèse harmonique ; \mathcal{S}^Ω l'est aussi, par un argument de limite inductive.

THÉORÈME 2.2. - Ω étant un ouvert convexe $\subset \mathbb{R}^n$, \mathcal{O}^Ω est un A -module de synthèse harmonique.

Posons

$${}^0, p_B^\Omega = \text{Ker}({}^0, p_{\mathcal{S}^\Omega} \xrightarrow{d''} {}^0, p+1_{\mathcal{S}^\Omega})$$

d'après le théorème 2.1, on a, $\forall p \in \mathbb{N}$, la suite exacte

$$0 \rightarrow {}^0, p_B^\Omega \rightarrow {}^0, p_{\mathcal{S}^\Omega} \xrightarrow{d''} {}^0, p+1_B^\Omega \rightarrow 0 \quad .$$

Par récurrence descendante, on voit alors immédiatement que ${}^0, p_B^\Omega$ est de synthèse harmonique. Le théorème en résulte puisqu'on a :

$$\mathcal{O}^\Omega = {}^0, {}^0_B^\Omega \quad .$$

Remarque. - En utilisant le fait que \mathcal{O}^Ω est un espace de fonctions holomorphes, on voit que le théorème précédent peut s'énoncer un peu autrement : si \mathfrak{I} est un idéal de A , pour que $\varphi \in \mathcal{O}^\Omega$ appartienne à $\mathfrak{I}\mathcal{O}^\Omega$, il faut et il suffit que, pour tout idéal maximal \mathfrak{m} de A , l'image de φ dans le localisé-complété $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{m}}^\Omega$ (voir définition dans [1]) appartienne à $\mathfrak{I}\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{m}}^\Omega$. L'avantage évident de cette formulation est qu'elle est "algébrique", i. e. ne fait intervenir que la structure de A -module de \mathcal{O}^Ω . Dans la suite, nous rencontrerons encore des modules possédant la même propriété ; nous les qualifierons de "totalemt plats".

Venons-en maintenant au théorème de dualité : désignons par $\mathcal{O}'_{-\Gamma}$ (resp. $\mathcal{S}'_{-\Gamma}$) l'antidual de \mathcal{O}^Γ (resp. \mathcal{S}^Γ), et par $P^{p,q}_{\mathcal{S}'_{-\Gamma}}$ l'espace des formes différentielles de type (p, q) à coefficients dans $\mathcal{S}'_{-\Gamma}$. Lorsque M est un A -module de type fini, on aimerait avoir la formule suivante, analogue à celle de l'introduction

$$\text{Hom}(M, \mathcal{O}'_{-\Gamma}) \simeq \text{Coker}\{\text{Hom}(M, {}^{n, n-1}_{\mathcal{S}'_{-\Gamma}}) \xrightarrow{d''} \text{Hom}(M, {}^{n, n}_{\mathcal{S}'_{-\Gamma}})\}$$

(ici, et dans la suite, on écrit Hom pour Hom_A).

Je ne sais si l'on peut établir ce résultat (ni même le résultat analogue avec Γ remplacé par Ω). Voici ce qu'on peut établir en s'appuyant sur le théorème 2.1 :

Désignons par $\Delta'_{-\Gamma}$ (resp. $\Sigma'_{-\Gamma}$) la limite inductive des $\mathcal{O}'_{-\Gamma'}$ (resp. $\mathcal{S}'_{-\Gamma'}$) pour Γ' parcourant la famille des compacts convexes vérifiant $\overset{\circ}{\Gamma}' \supset \Gamma$, et par $P^{p,q}_{\Sigma'_{-\Gamma}}$ l'espace des formes différentielles de type (p, q) à support dans $\Sigma'_{-\Gamma}$. On a le théorème suivant.

THÉOREME 2.3. - Soit Γ un compact convexe de $\underline{\mathbb{R}}^n$,

1° $\Delta'_{-\Gamma}$ est un A -module injectif.

2° Si M est un A -module de type fini, on a un isomorphisme canonique

$$\text{Hom}(M, \Delta'_{-\Gamma}) \approx \text{Coker}\{\text{Hom}(M, {}^{n, n-1}\Sigma'_{-\Gamma}) \xrightarrow{d''} \text{Hom}(M, {}^{n, n}\Sigma'_{-\Gamma})\}$$

(ces résultats sont démontrés dans [6] sous une forme légèrement différente).

3. Systèmes différentiels à coefficients constants : théorèmes d'existence.

La traduction des résultats précédents en termes d'équations différentielles se fait au moyen des deux opérations suivantes :

1° Transformation de Fourier. - Faisons opérer différentiellement A dans les fonctions et les distributions sur $\underline{\mathbb{R}}^n$, i. e. $X_j f = -i \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{O}(\underline{\mathbb{R}}^n)$, on aura donc

$$X_j \mathfrak{F}\varphi = \mathfrak{F}X_j\varphi \quad .$$

Si Γ est un compact convexe (resp. un ouvert convexe) de $\underline{\mathbb{R}}^n$, on a

$$\mathfrak{D}(\Gamma) = \mathcal{O}^\Gamma \quad (\text{resp. } \mathfrak{D}(\Omega) = \mathcal{O}^\Omega) \quad .$$

Désignons d'autre part par $\mathcal{O}'(\Gamma)$ l'espace des distributions au voisinage de Γ , qui est la limite inductive des $\mathcal{O}(\Gamma')^*$ (duals de $\mathcal{O}(\Gamma')$) pour Γ' compact convexe vérifiant $\Gamma' \supset \Gamma$. La transformation de Fourier établira donc un isomorphisme entre $\mathcal{O}'(\Gamma)$ et $\Delta'_{-\Gamma}$. Les résultats du paragraphe 2 entraînent alors :

THÉOREME 3.1.

1° $\mathcal{O}(\Omega)$ est un A -module totalement plat (Ω , ouvert convexe).

2° $\mathcal{O}'(\Gamma)$ est un A -module injectif (Γ , compact convexe).

(Il me paraît probable que $\mathcal{O}'(\Omega)$ est aussi un A -module injectif, mais la méthode suivie ne donne pas ce résultat.)

On déduit de là, par régularisation, (voir les détails dans [6]) :

THÉOREME 3.2. - Pour tout ouvert convexe $\Omega \subset \underline{\mathbb{R}}^n$,

(1) $\mathcal{E}'(\Omega)$ est un A -module totalement plat

(2) $\mathcal{E}(\Omega)$ est un A -module injectif .

Réciproquement, tout ouvert convexe vérifiant (1) ou (2) est convexe. En effet

(1) \Rightarrow (2) par dualité (immédiat) et (2) entraîne ceci (entre autres) :

(3) $\forall P \in A, P\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$ (voir plus bas) .

Or, il est élémentaire de vérifier que " $\frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$ " équivaut (si Ω est connexe) à " Ω convexe dans la direction Ox_1 " (*). Donc (3) \implies " Ω convexe".

Il est probable que le théorème 3.2 (2) est encore vrai lorsqu'on remplace $\mathcal{E}(\Omega)$ par $\mathcal{O}'(\Omega)$ ou $\mathcal{O}'^F(\Omega)$ (espace des distributions d'ordre fini dans Ω).

2° Utilisation d'une présentation de M . - Soit $A^q \rightarrow A^p \rightarrow M \rightarrow 0$ une présentation de M ; désignons par $P^* \in \text{Hom}(A^q, A^p)$ la première application, et soit $P \in \text{Hom}(A^p, A^q)$ l'application transposée. Si Ω est un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, \mathcal{E}(\Omega)) \rightarrow [\mathcal{E}(\Omega)]^p \xrightarrow{P} [\mathcal{E}(\Omega)]^q$$

donc $\text{Hom}(M, \mathcal{E}(\Omega))$ s'identifie à l'ensemble des $F \in [\mathcal{E}(\Omega)]^p$ vérifiant $PF = 0$; la même chose vaut pour $\mathcal{O}'(\Gamma)$, $\mathcal{O}'(\Omega)$, etc., et réciproquement, tout système différentiel à coefficients constants peut s'écrire de cette manière.

Ceci posé, soit $Q^* \in \text{Hom}(A^r, A^q)$ tel que la suite

$$A^r \xrightarrow{Q^*} A^q \xrightarrow{P^*} A^p$$

soit exacte, et soit $Q \in \text{Hom}(A^q, A^r)$ la transposée de Q^* .

On considère la suite "transposée"

$$[\mathcal{E}(\Omega)]^p \xrightarrow{P} [\mathcal{E}(\Omega)]^q \xrightarrow{Q} [\mathcal{E}(\Omega)]^r$$

on a évidemment $QP = 0$; et, par définition

$$\text{Ext}^1(M, \mathcal{E}(\Omega)) = \text{Ker}(Q)/\text{Im}(P) .$$

Or, $\mathcal{E}(\Omega)$ est injectif si et seulement si, pour tout A -module M de type fini, on a

$$\text{Ext}^1(M, \mathcal{E}(\Omega)) = 0 .$$

Par conséquent, si Ω est convexe, l'équation

$$PF = G \quad (G \in [\mathcal{E}(\Omega)]^q, F \in [\mathcal{E}(\Omega)]^p)$$

aura une solution pour tout G vérifiant $QG = 0$. Réciproquement, si cela a lieu pour tout P , Ω sera convexe. (Sous cette forme, les résultats ci-dessus sont annoncés par EHRENPREIS [2], [3].)

On peut, si l'on y tient, traduire une partie des résultats précédents en termes de faisceaux : soit \mathcal{E} (resp. \mathcal{O}') le faisceau $\Omega \rightsquigarrow \mathcal{E}(\Omega)$ (resp.

(*) Voir aussi paragraphe 5.

$\Omega \rightsquigarrow \mathcal{O}'(\Omega)$; pour M , A -module de type fini (considéré comme faisceau constant), on pose

$$\mathcal{E}^M = \underline{\text{Hom}}(M, \mathcal{E}) \quad (\text{resp. } \mathcal{O}'^M = \dots) \quad ;$$

on a évidemment

$$\mathcal{E}^M(\Omega) = \text{Hom}(M, \mathcal{E}(\Omega)) \quad , \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_c^M(\Omega) = \text{Hom}(M, \mathcal{O}(\Omega))$$

et de même avec \mathcal{O}' au lieu de \mathcal{E} .

Cela étant, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, le A -module \mathcal{E}_a (resp. \mathcal{O}'_a) est injectif d'après le théorème 3.2 (resp. 3.1). On en déduit les isomorphismes

$$H^k(\Omega, \mathcal{E}^M) \approx \text{Ext}^k(M, \mathcal{E}(\Omega))$$

$$H_c^k(\Omega, \mathcal{E}^M) \approx \text{Ext}^k(M, \mathcal{O}(\Omega))$$

(l'indice c désignant la famille des compacts $c\Omega$).

Si Ω est convexe, on aura donc

a. $H^k(\Omega, \mathcal{E}^M) = 0$ pour $k \geq 1$, puisque $\mathcal{E}(\Omega)$ est injectif

b. $H_c^k(\Omega, \mathcal{E}^M) \approx \text{Ext}^k(M, A) \otimes \mathcal{O}(\Omega)$, puisque $\mathcal{O}(\Omega)$ est plat

Supposant Ω convexe relativement compact, et désignant par $\partial\Omega$ sa frontière, on a la suite exacte.

$$H^0(\bar{\Omega}, \mathcal{E}^M) \rightarrow H^0(\partial\Omega, \mathcal{E}^M) \rightarrow H_c^1(\Omega, \mathcal{E}^M) \rightarrow H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{E}^M), \text{ etc.}$$

le dernier terme écrit ici est nul ; donc

PROPOSITION 3.3. - Pour que l'application $\mathcal{E}^M(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{E}^M(\partial\Omega)$ soit surjective, il faut et il suffit qu'on ait

$$\text{Ext}^1(M, A) = 0 \quad .$$

(Ce raisonnement est dû essentiellement à EHRENPREIS.)

On trouvera dans [7] et [8] d'autres résultats du même type.

4. Théorèmes d'approximation et de représentation intégrale.

THÉORÈME 4.1. - Soit $P \in \text{Hom}(A^P, A^Q)$, et soit $\mathcal{E}^P(\Omega)$ le noyau de l'application

$$P : [\mathcal{E}(\Omega)]^P \rightarrow [\mathcal{E}(\Omega)]^Q \quad .$$

Si Ω est un ouvert convexe, l'ensemble des exponentielles polynômes contenus dans $\mathcal{E}^P(\Omega)$ y forme un système total.

Soit en effet ϕ un élément de $[\mathcal{E}'(\Omega)]^q$, orthogonal aux exponentielles polynômes appartenant à $\mathcal{E}^P(\Omega)$ (pour le produit scalaire $\langle \phi | f \rangle = \langle \phi, \bar{f} \rangle$) ; il suffit d'établir que l'on a

$$\phi = \bar{P}^* \Psi,$$

avec $\Psi \in [\mathcal{E}'(\Omega)]^P$, car alors ϕ sera orthogonal à $\mathcal{E}^P(\Omega)$.

Or, par transformation de Fourier, l'hypothèse exprime exactement ceci : en tout point $a \in \mathbb{C}^n$, le développement de Taylor de $\mathfrak{F}\phi$ en a est de la forme $P^* U_a$, avec $U_a \in \{\mathbb{C}[[\zeta - a]]\}^q$. La propriété voulue se déduit alors du fait que $\mathcal{E}'(\Omega)$ est totalement plat.

Le même résultat, avec la même démonstration, vaut pour $\mathcal{O}'(\Omega)$ ou $\mathcal{O}'(\Gamma)$.

On peut retrouver ces résultats d'une autre manière. Soit S un élément de ${}^{n,n}\Sigma'_\Gamma$, identifié de manière évidente à Σ'_Γ , et soit \hat{T} l'image de S dans Δ'_Γ (qui est évidemment un quotient de Σ'_Γ) ; par transformation de Fourier, \hat{T} donne un élément T de $\mathcal{O}'(\Gamma)$, qu'on appelle "transformé de Fourier-Ehrenpreis" de S . D'une manière plus explicite : on prend un voisinage Γ' de Γ tel que S provienne d'un $S_1 \in \mathcal{S}'_\Gamma$; on appelle alors T_1 l'élément de $\mathcal{O}(\Gamma')^*$ défini par la formule

$$\forall \varphi \in \mathcal{O}(\Gamma') : \langle T_1, \bar{\varphi} \rangle = \langle S_1 | \mathfrak{F}\varphi \rangle$$

et T est la restriction de T_1 à $\mathcal{O}'(\Gamma)$. Naturellement, pour T donné, S n'est unique que modulo $d^{n,n-1}\Sigma'_\Gamma$.

Prenons alors $P \in \text{Hom}(A^P, A^q)$, et posons, comme au paragraphe 3,

$$M = \text{Coker}\{A^q \xrightarrow{P^*} A^P\}$$

on déduit immédiatement du théorème 2.3 le résultat suivant :

THÉOREME (de représentation intégrale) 4.2.

1. Tout $T \in [\mathcal{O}'(\Gamma)]^P$ vérifiant $PT = 0$ est transformé de Fourier-Ehrenpreis d'un $S \in [{}^{n,n}\Sigma'_\Gamma]^P$ vérifiant $PS = 0$.

2. Si S et S' vérifient la condition précédente, on a $S - S' = d^n U$, avec $U \in [{}^{n,n-1}\Sigma'_\Gamma]^P$, et $PU = 0$.

La première partie de l'énoncé est annoncée sous une forme plus précise (due au choix que (2) autorise), par EHRENPREIS [2], [3] et, plus récemment, par PALAMODOV ([10], dans le cas particulier $p = q = 1$; dans le cas général, communication personnelle).

A noter que ces auteurs travaillent en "cohomologie de Čech", sans utiliser la division des distributions, ni la d'' -cohomologie.

Comme l'a indiqué EHRENPREIS (loco citato) il convient de placer ce résultat au centre de toute cette théorie ; d'une part, il entraîne immédiatement le théorème 4.1 (dans $\mathcal{O}'(\Gamma)$, ce qui l'entraîne trivialement pour les autres espaces considérés) grâce au théorème de synthèse harmonique dans S' de WHITNEY-SCHWARTZ ; joint à l'injectivité de S' , il entraîne les résultats du paragraphe 3 ; enfin il peut servir à d'autres usages, notamment à la caractérisation des systèmes elliptiques, hypoelliptiques, etc. (voir [3], [7], [8]).

5. Pseudo-convexité.

Soit M un A -module de type fini ; disons provisoirement qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est M -convexe si l'on a, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\text{Ext}^k(M, \mathcal{E}(\Omega)) = 0 \quad .$$

Dans certains cas, on connaît des propriétés du type suivant :

1° Pour que Ω soit M -convexe, il faut et il suffit que la (M, Ω) -enveloppe (définie convenablement) de tout compact $K \subset \Omega$ soit compacte.

2° L'intersection de deux ouverts M -convexes est M -convexe.

3° Si Ω est un "bon ouvert" dont le bord $\partial\Omega$ est une variété de classe C^2 , la M -convexité est entraînée par certaines inégalités différentielles strictes vérifiées par $\partial\Omega$; et inversement, elle entraîne les mêmes inégalités élargies.

Ce type de propriétés est connu dans les deux cas suivants :

a. $M = A/\mathfrak{P}$, \mathfrak{P} un idéal principal : si $P^* \subset A$ est un générateur de \mathfrak{P} , la M -convexité signifie simplement qu'on a

$$P\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$$

(1) et (2) sont alors connus, ainsi que (3) lorsque la partie principale de P est à coefficients réels (voir [4] et [9]).

b. M est le module associé au système de Cauchy-Riemann, i. e. $n = 2m$, $M = A/\mathfrak{P}$, \mathfrak{P} engendré par les $X_j + iX_{m+j}$. Les ouverts en question sont alors les ouverts d'holomorphie, ou "pseudo-convexes" [12].

Par contre, en général, ce genre de propriétés est faux (contre-exemple immédiat $M = A/\mathfrak{P}$, \mathfrak{P} l'idéal engendré par X_1, \dots, X_n ; i. e. M est associé au système $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ et alors

$$\text{Ext}^k(M, \mathcal{E}(\Omega)) \approx H^k(\Omega, \mathbb{C})$$

la famille des ouverts dont tous les nombres de Betti sont nuls ne vérifie aucune des propriétés (1), (2), (3)!

Il paraît plus raisonnable d'aborder la question de la pseudo-convexité généralisée de la manière suivante :

Soit $B = \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_p]$, et $\rho : B \rightarrow A$ un homomorphisme de \mathbb{C} -algèbres, tel que A soit un B -module plat (peut-être faut-il même supposer "fidèlement plat", et encore d'autres choses ?). Alors B opère de manière évidente dans $\mathcal{E}(\Omega)$ et on dira que Ω est (B, ρ) -convexe si $\mathcal{E}(\Omega)$ est un B -module injectif.

(L'hypothèse de platitude permet d'affirmer, grâce au théorème 3.2, que tout ouvert convexe est (B, ρ) -convexe.)

Cette notion de "convexité" donne-t-elle lieu à des propriétés du type (1), (2), (3) ? Pour l'instant, je ne connais la réponse (affirmative) que dans les cas suivants

a'. $p = 1$ (cela résulte immédiatement de (a)).

b'. Les $\rho(Y_j)$ sont des polynômes du premier degré. Ici, il y a essentiellement deux cas intéressants (en fait, ce sont les seuls que j'ai regardés jusqu'à maintenant) les autres étant "mixtes" :

Le cas où $n = p$, $\rho(Y_j) = X_j$: on trouve alors les convexes ordinaires (théorème 3.2).

Le cas $n = 2p$, $\rho(Y_j) = X_j + iX_{j+p}$: on trouve alors les ouverts d'holomorphie (la démonstration se fait en combinant les théorèmes A et B de CARTAN-OKA avec les résultats précédents. Voir [8]).

Naturellement, il faudrait aussi étudier les systèmes différentiels à coefficients variables (dans le cas d'une équation "de type principal", des résultats pratiquement définitifs ont été obtenus par HÖRMANDER [4]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 1-2, 3-4. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290-1293 ; Eléments de Mathématique, 27-28).
- [2] EHRENPREIS (Leon). - A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications, Proceedings of the symposium on linear space [1960. Jérusalem] ; p. 161-174. - Jérusalem, Academic Press, 1961.

- [3] EHRENPREIS (Leon). - The structure of solutions of systems of partial differential equations. - Stanford, Stanford University, 1961 (multigraphié).
- [4] HÖRMANDER (Lars). - Linear differential operators. - Berlin, J. Springer (à paraître).
- [5] MALGRANGE (Bernard). - Division des distributions, I-IV, Séminaire Schwartz, t. 4, 1959/60 : Unicité du problème de Cauchy, Division des distributions, n° 21-25.
- [6] MALGRANGE (Bernard). - Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire Leray, 1961/62 : Equations aux dérivées partielles, n° 8, 13 p. ; Colloque sur les équations aux dérivées partielles [1962. Collège de France, Paris].
- [7] MALGRANGE (Bernard). - Sur les systèmes différentiels à coefficients constants (suite), Séminaire Leray, 1961/62, n° 8 bis, 12 p.
- [8] MALGRANGE (Bernard). - Nouveaux résultats sur les systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire Leray, 1962/63 (en projet).
- [9] MALGRANGE (Bernard). - Sur les ouverts convexes par rapport à un opérateur différentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1962, p. 614-615.
- [10] PALAMODOV (V. P.). - Sur la forme générale des solutions d'une question différentielle à coefficients constants [en russe], Doklady Akad. Nauk S. S. S. R., t. 137, 1961, p. 776-777.
- [11] SERRE (Jean-Pierre). - Un théorème de dualité, Comment. Math. Helvet., t. 29, 1955, p. 9-26.
- [12] SERRE (Jean-Pierre). - Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables [1953. Bruxelles]; p. 57-68. - Liège, G. Thone ; Paris, Masson, 1953 (Centre belge de Recherches mathématiques).