Séminaire N. Bourbaki

André Weil

Fonction zêta et distributions

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 312, p. 523-531
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__523_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n° 312

Juin 1966

FONCTION ZETA ET DISTRIBUTIONS

par André WEIL

Il s'agit d'une réinterprétation de la démonstration d'Iwasawa-Tate pour l'équation fonctionnelle de la fonction zêta, considérée plus particulièrement sous la forme que lui a donnée Tate dans sa thèse.

Les distributions dont il s'agira ici seront exclusivement des distributions tempérées dans des espaces vectoriels, soit sur des corps locaux ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou corps p-adique en caractéristique 0, corps de séries formelles à une indéterminée sur un corps fini en caractéristique p), soit sur l'anneau des adèles sur un corps de nombres ou un corps de fonctions algébriques de dimension 1 sur un corps fini. Dans un vectoriel sur R (ou sur C), les distributions tempérées sont bien entendu celles de Schwartz (formes linéaires continues sur l'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz). Sur un corps local à valuation discrète, les notions correspondantes sont celles définies par Bruhat : l'espace $\mathcal{S}$ est l'espace des fonctions localement constantes à support compact ; les distributions tempérées sont identiques aux mesures <u>simplement</u> additives sur la famille des ensembles ouverts compacts. Sur les définitions correspondantes pour les espaces vectoriels sur un anneau d'adèles, cf. A. Weil, Acta t. 111 (1964), pp. 143-211, et plus particulièrement n° 11 (pp. 157-158) et n° 29 (pp. 177-178).

Soit X l'un des espaces ci-dessus ; soit G un groupe opérant sur X par $(g,x) \to gx$; G opère aussi sur les fonctions définies sur X, par $(f,g) \to f^g$ défini par $f^g(x) = f(gx)$, et, par dualité, sur les distributions, par $(g,\Delta) \to g\Delta$ défini par $(g\Delta)(f) = \Delta(f^g)$ pour $f \in \mathcal{S}$. Soit ω une représentation de G de dimension 1. On considère le problème $P(X,G,\omega)$: <u>Déterminer toutes les distributions</u> (tempérées !) Δ <u>telles que</u> $g\Delta = \omega(g)^{-1}\cdot\Delta$ pour tout $g \in G$. Généralisation évidente au cas où ω est une représentation de G dans un espace Y, la distribution Δ devant alors prendre ses valeurs dans Y.

1. Le problème local. Soit K un corps local (commutatif) ; on prend $X = K$, $G = K^{\times}$ (groupe multiplicatif de K, opérant sur K de manière évidente). On prend sur K une mesure de Haar, notée dx, et sur $K^{\times}$ une mesure de Haar notée $d^{\times}x$. On écrit, pour $a \in K^{\times}$, $d(ax) = |a|_K\, dx$, et $|0|_K = 0$. (N.B. si $K = \mathbb{C}$, $|x|_K$ n'est pas la valeur absolue usuelle $|x|$, mais $|x|^2 = x\bar{x}$). On a $d^{\times}x = \mu|x|_K^{-1}dx$ avec $\mu > 0$. On peut normaliser dx, $d^{\times}x$ de diverses manières (cf. infra). On vérifie immédiatement que tout homomorphisme ω de $K^{\times}$ dans $\mathbb{R}_+^{\times}$ est de la forme $x \to |x|_K^{\sigma}$ avec $\sigma \in \mathbb{R}$; donc, pour tout homomorphisme ω de $K^{\times}$ dans $\mathbb{C}^{\times}$, il y a $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $|\omega(x)| = |x|_K^{\sigma}$; on écrit alors $\sigma = \sigma(\omega)$. On désigne par ω_s l'homomorphisme $x \to |x|_K^s$, pour tout $s \in \mathbb{C}$; donc $\omega_0(x) = 1$ pour tout x.

On considère le problème $P(K,K^{\times},\omega)$ qu'on notera $P(K,\omega)$ pour abréger. Soit Δ une solution de ce problème ; quand on prend pour f une fonction à support compact dans $K^{\times}$ (qu'on prolonge à K par continuité), on voit que $f \to \Delta(f)$ est une distribution dans $K^{\times}$, relativement invariante par $K^{\times}$ (elle prend le facteur $\omega(a)$ par une translation à gauche a dans $K^{\times}$) ; en la régularisant par convolution dans $K^{\times}$, on trouve, comme il est bien connu, que c'est une mesure de la forme $c\omega(x)d^{\times}x$ dans $K^{\times}$, avec $c \in \mathbb{C}$. Il s'ensuit que, si Δ, Δ' sont deux solutions et que Δ ne soit pas de support $\{0\}$, il y a $c \in \mathbb{C}$ tel que $\Delta' - c\Delta$ soit de support $\{0\}$. Si K est à valuation discrète, il n'y a pas d'autres distributions de support $\{0\}$ que les multiples $c\delta_0$ de la distribution de Dirac (masse 1 au point 0) ; celle-ci est solution du problème $P(K,\omega_0)$; cela implique déjà que, dans ce cas, il y a (à un facteur près) au plus une solution de $P(K,\omega)$ pour $\omega \neq \omega_0$. Si $K = \mathbb{R}$, les distributions de support $\{0\}$ sont de la forme $\Sigma c_i D^i$, avec $c_i \in \mathbb{C}$, $D = d/dx$; si $K = \mathbb{C}$, ce sont $\Sigma c_{ij} D^i \bar{D}^j$, avec $c_{ij} \in \mathbb{C}$, $D = \partial/\partial x$; dans l'un et l'autre cas, une telle distribution ne peut être solution d'un problème $P(K,\omega)$ que si tous les c_i (resp. c_{ij}) sont 0 sauf un seul ; sur $\mathbb{R}$, D^i est solution de $P(\mathbb{R},\omega)$ avec $\omega(x) = x^{-i}$; sur $\mathbb{C}$, $D^i\bar{D}^j$ est solution de $P(\mathbb{C},\omega)$ avec $\omega(x) = x^{-i}\bar{x}^{-j}$; en dehors de ces ω, il y a donc, à un facteur près, au plus une solution pour $P(K,\omega)$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour que l'intégrale $\int |x|_K^\sigma dx$, prise dans un voisinage compact de 0, soit $< +\infty$, il faut et il suffit que $\sigma > -1$ (notoire pour $\mathbb{R}$, facile pour les autres cas). Par suite, pour que l'intégrale

$$(1) \qquad \Delta_\omega(f) = \int_{K^\times} f(x)\omega(x)d^\times x = \int_K f(x)\omega(x).\mu|x|_K^{-1}dx$$

soit absolument convergente quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{S}$, il faut et il suffit que $\sigma(\omega) > 0$. Lorsqu'il en est ainsi, elle définit évidemment une solution de $P(K,\omega)$; de plus, celle-ci est la seule, à un facteur près, car on a $\sigma(\omega) \leqq 0$ dans tous les cas où $P(K,\omega)$ a une solution de support $\{0\}$.

Pour obtenir une solution pour $\sigma(\omega) \leqq 0$, on dispose de trois méthodes :

(a) Fourier. Soit χ un caractère non trivial du groupe additif K ; on identifie alors K avec son "dual topologique" (le dual au sens de la théorie des groupes localement compacts) en posant $\langle x,y \rangle = \chi(xy)$, de sorte que la transformée de Fourier de f est $f^*(y) = \int f(x)\chi(xy)dx$; il convient de prendre pour dx la mesure de Haar "self-duale" par rapport à χ, c'est-à-dire celle pour laquelle la formule d'inversion de Fourier, et la formule de Plancherel, sont valables (sans facteur constant) ; naturellement cette mesure dépend de χ (cf. infra). Si Δ est une distribution, sa transformée de Fourier Δ^* est donnée par $\Delta^*(f) = \Delta(f^*)$. Il est immédiat que, si Δ est solution de $P(K,\omega)$, Δ^* est solution de $P(K,\omega_1\omega^{-1})$, et réciproquement. Donc $(\Delta_\omega)^*$ est la solution unique de $P(K,\omega_1\omega^{-1})$, à un facteur près, pour $\sigma(\omega) > 0$. Comme $\sigma(\omega_1\omega^{-1}) = 1 - \sigma(\omega)$, on obtient ainsi une solution (unique) chaque fois que $\sigma(\omega) < 1$. On notera que, pour $0 < \sigma(\omega) < 1$, $\omega' = \omega_1\omega^{-1}$, $\Delta_{\omega'}$ et $(\Delta_\omega)^*$ sont toutes deux définies, et ne peuvent différer que par un facteur scalaire, ce qui pose le problème de la détermination de ce facteur.

(b) Prolongement analytique. On prend $s \in \mathbb{C}$, et, au lieu de ω, on prend $\omega_s\omega$; (1) définit une solution, pour $Re(s) > -\sigma(\omega)$; on peut espérer alors que celle-ci, considérée comme fonction de s à valeurs distributionnelles, peut se prolonger dans tout le plan, et que ce prolongement continue à donner une solution du problème. En fait, il en est bien ainsi ; le prolongement est partout méromorphe, avec des pôles correspondant exactement aux ω pour lesquels $P(K,\omega)$ a une solution de support $\{0\}$.

En dehors de ces ω, on désignera encore par Δ_ω la distribution obtenue par prolongement de (1) ; la question se pose de nouveau de trouver le facteur scalaire par lequel $(\Delta_\omega)^*$ diffère de $\Delta_{\omega'}$, pour $\omega' = \omega_1\omega^{-1}$, pour tout ω cette fois (en dehors des pôles).

(c) Méthode dite de la "partie finie" (ou de la "valeur principale") de (1) considérée comme intégrale singulière. On peut considérer d'ailleurs que c'est là une méthode pour effectuer le prolongement analytique mentionné dans (b) ; de ce point de vue, (c) est un cas particulier de (b).

Commençons par le cas de K à valuation discrète ; soient R l'anneau des "entiers" de K, P l'idéal maximal de R (R et P sont donnés par $|x|_K \leqq 1$ resp. $|x|_K < 1$) ; soit $\pi \in R$ tel que $P = \pi R$. Soit ν le plus grand entier tel que le caractère χ qu'on s'est donné sur K soit 1 sur $P^{-\nu}$; en appliquant Fourier à la fonction caractéristique de R, on voit immédiatement que la mesure de Haar "self-duale" dx sur K est celle pour laquelle $\int_R dx = q^{-\nu/2}$, où $q = [R:P]$. Faisons d'abord le prolongement analytique de Δ_ω pour $\omega = \omega_s$, $s \in \mathbb{C}$; écrivons $\Delta(s)$ au lieu de Δ_{ω_s} et considérons l'intégrale

$$(2) \qquad \Delta'(s)(f) = \int_{K^\times}(f(x) - f(\pi^{-1}x))\omega_s(x)d^\times x$$

$$= \mu\int_K (f(x)-f(\pi^{-1}x))|x|_K^{s-1}\,dx \quad .$$

Comme f est localement constante, la fonction à intégrer est 0 au voisinage de 0, donc l'intégrale a toujours un sens. D'autre part, pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, on a

$$\Delta'(s)(f) = \int_{K^\times} f(x)\omega_s(x)d^\times x - \int_{K^\times} f(\pi^{-1}x)\omega_s(x)d^\times x$$

$$= (1 - q^s)\Delta(s)(f).$$

Ces formules donnent évidemment le prolongement analytique de $\Delta(s)$ dans tout le plan. D'autre part, dans la dernière intégrale de (2), on peut, puisque f est localement constante et à support compact, remplacer $|x|_K^{s-1}$ par la fonction égale à $|x|_K^{s-1}$ sur $P^{-m} - P^n$, où m, n sont assez grands, et à 0 dans P^n et en dehors de P^{-m} ; c'est là une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'ensembles P^i, dont les transformées de Fourier sont évidentes. Appliquant Plancherel (ou plus exactement la bilinéarisation de

Plancherel) à l'intégrale en question, on l'exprime alors au moyen d'une intégrale portant sur f^*, ce qui donne la transformée $\Delta'(s)^*$ de $\Delta'(s)$. On trouve :

$$\Delta'(s)^* = q^{(s-1/2)\nu}\Delta'(1-s) \quad ,$$

d'où aussitôt, si l'on veut, la formule donnant $\Delta(s)^*$ au moyen de $\Delta(1-s)$. On notera que, comme on l'a annoncé précédemment, $\Delta(s)$ a un pôle en $s=0$, ce qui correspond à la mesure de Dirac. On conviendra désormais de normaliser la mesure $d^\times x$ sur $K^\times$ de telle sorte que le sous-groupe compact $R^\times = R-P$ des éléments inversibles de R soit de mesure 1 pour $d^\times x$. Dans ces conditions, on vérifie facilement que $\Delta'(0) = \delta_0$, et aussi que $\Delta'(s)(\phi_R) = 1$ pour tout s si ϕ_R est la fonction caractéristique de R.

Pour que ω soit de la forme ω_s, il faut et il suffit que ω soit 1 sur $R^\times$; on dit alors que ω est non ramifié, et que son conducteur est R. Sinon, on dit que ω est ramifié, et P^f s'appelle le conducteur de ω si f est le plus petit entier $\geqq 1$ tel que ω soit 1 sur le sous-groupe $1+P^f$ de $R^\times$. Dans ce cas, l'intégrale (1), prise sur $K-P^n$, est indépendante de n dès que n est assez grand ; la valeur de cette intégrale pour n assez grand sera prise pour "valeur principale" de l'intégrale (1) sur K quand celle-ci n'est pas absolument convergente ; cela définit une distribution $\Delta(\omega)$, solution de $P(K,\omega)$, qui prolonge analytiquement (1) au sens (b). On calcule Fourier à peu près comme ci-dessus (en intégrant toujours sur les "couronnes" P^i-P^{i+1}). On obtient :

$$\Delta(\omega)^* = \omega(\pi)^{-\nu-f}\gamma(\omega)\Delta(\omega_1\omega^{-1}) \quad ,$$

où $\gamma(\omega)$ est une "somme de Gauss" dépendant seulement des valeurs prises par ω sur $R-P$, et du choix de π ; $\gamma(\omega)$ ne change donc pas si on remplace ω par $\omega_s\omega$.

Pour $K = \mathbb{R}$, on prendra $\chi(x) = e^{2\pi i x}$; la mesure "self-duale" est alors la mesure de Lebesgue usuelle, dx. Pour $R = \mathbb{C}$, on prendra $\chi(x) = e^{2\pi i(x+\bar{x})}$; la mesure self-duale est $|dx\wedge d\bar{x}|$. On peut mettre ω , d'une manière et d'une seule, sous la forme $\omega(x) = |x|^a|x|^s$ pour $K = \mathbb{R}$, avec $a = 0$ ou 1, $s \in \mathbb{C}$, et $\omega(x) = x^{-a}\bar{x}^{-b}(x\bar{x})^s$ avec a,b entiers $\geqq 0$, a ou $b = 0$, $s \in \mathbb{C}$, pour $K = \mathbb{C}$. La distribution $\Delta(\omega)$ est alors $\mathrm{Pf}(\omega(x)d^\times x)$ où Pf désigne la "partie finie" bien connue des analystes, sauf pour $K = \mathbb{R}$ et $s = 0,-2,-4,\ldots$, et pour $K = \mathbb{C}$ et $s = 0,-1,-2,\ldots$, qui correspondent aux pôles de $\Delta(\omega)$, et, comme il convient, aux ω pour lesquels il existe une distribution de support $\{0\}$; dans ces pôles, on reconnaît ceux de $\Gamma(s/2)$ resp. de $\Gamma(s)$, ce qui conduit à poser $\Delta'(\omega) = \Gamma(s/2)^{-1}\Delta(\omega)$ resp. $= \Gamma(s)^{-1}\Delta(\omega)$. Les analystes savent apparemment obtenir la transformée de Fourier de $\mathrm{Pf}(\omega(x)d^{\times}x)$ par calcul direct ; on peut aussi, puisqu'on sait déjà que $\Delta(\omega)^{*}$ est de la forme $c\Delta(\omega_1\omega^{-1})$, obtenir le facteur c en prenant la valeur de la distribution $\Delta(\omega_1\omega^{-1})$ pour la fonction $f(x) = x^a e^{-x^2}$ resp. $x^a \bar{x}^{-b} e^{-x\bar{x}}$, ce qui se ramène immédiatement à l'intégrale qui définit la fonction gamma, et $\Delta(\omega)$ pour f^{*} qui est de même forme que f. Le résultat s'écrit :

$$\Delta'(\omega)^{*} = (\pi i)^a \, \pi^{(1/2)-s} \Delta'(\omega_1\omega^{-1}) \qquad (K = \mathbb{R}),$$

$$\Delta'(\omega)^{*} = (2\pi i)^{a+b}(2\pi)^{1-2s}\Delta'(\omega_1\omega^{-1}) \qquad (K = \mathbb{C}).$$

2. Le problème global. Soit k un corps de nombres algébriques, ou bien un corps de fonctions algébriques de dimension 1 sur un corps fini. On note A_k l'anneau des adèles de k ; le groupe des éléments inversibles $A_k^{\times}$ de A_k est alors le groupe des idèles de k (sa topologie n'étant pas celle qui est induite sur $A_k^{\times}$ par celle de A_k, mais celle qui est induite par celle de $A_k \times A_k$ sur l'image de $A_k^{\times}$ dans $A_k \times A_k$ au moyen de l'application $x \to (x, x^{-1})$). On identifie k avec un sous-anneau discret de A_k, et $k^{\times}$ avec un sous-groupe discret de $A_k^{\times}$, de la manière usuelle. On considère exclusivement des homomorphismes ω de $A_k^{\times}$ dans $\mathbb{C}$ qui prennent la valeur 1 sur k ; pour un tel ω, on considère le problème $P(A_k, A_k^{\times}, \omega)$, qu'on note pour abréger $P'(k, \omega)$.

On notera k_v l'une des complétions de k (par rapport à une valuation, discrète ou non) ; v s'appelle une place ; presque toutes les places sont "finies" (i.e. à valuation discrète) ; pour une place finie, on note r_v l'anneau des entiers de k_v, p_v son idéal maximal. Alors A_k est union ("limite inductive") des produits $\prod k_v \times \prod r_v$, où le premier produit est étendu à un ensemble fini de places, comprenant toutes les places "infinies", et le second produit à l'ensemble de toutes les autres places. Un adèle s'écrit donc $x = (x_v)$, avec $x_v \in r_v$ pour presque tout v. Sur A_k, on prend un caractère non trivial, égal à 1 sur k ; on peut écrire $\chi(x) = \prod \chi_v(x_v)$. La mesure self-duale est la "mesure de Tamagawa", pour laquelle le groupe (compact) A_k/k est de mesure 1. Tout ω, égal à 1 sur $k^\times$ comme il a été convenu, s'écrit de même $\omega(x) = \prod \omega_v(x_v)$. L'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz-Bruhat sur A_k contient toutes les fonctions f de la forme $f(x) = \prod f_v(x_v)$, où f_v est une fonction de Schwartz-Bruhat sur k_v pour tout v, et est la fonction caractéristique de r_v pour presque tout v ; les combinaisons linéaires de telles fonctions sont partout denses dans $\mathcal{S}$. Soit Δ une solution de $P'(k,\omega)$; en prenant $\Delta(f)$ avec $f = \prod f_v$, et laissant fixes toutes les fonctions f_v sauf une seule, on voit facilement qu'on définit une solution Δ_v de $P(k_v,\omega_v)$, et que réciproquement Δ est définie par les Δ_v ; on a $\Delta(f) = \prod \Delta_v(f_v)$, ce qu'on écrira $\Delta = \prod \Delta_v$. Réciproquement, donnons-nous ω ; du fait que ω est continu sur $A_k^\times$, il s'ensuit que ω_v est non ramifié pour presque tout v. Pour chaque v, choisissons une solution Δ_v de $P(k_v,\omega_v)$ de sorte qu'on ait $\Delta_v(\phi_{r_v}) = 1$ pour presque tout v, ϕ_{r_v} étant comme au n° 1 la fonction caractéristique de r_v ; autrement dit, pour presque toute place finie v où ω_v est non ramifié, on écrit $\omega_v(x) = |x|_v^s$, et on prend pour Δ_v la solution $\Delta'(s)$ définie au n° 1. Pour $f = \prod f_v$, on prendra alors $\Delta(f) = \prod \Delta_v(f_v)$; il est facile de vérifier que Δ se prolonge, par linéarité et continuité, à une distribution sur A_k. Cela démontre l'existence, et l'unicité à un facteur près, d'une solution de $P'(k,\omega)$; sa transformée de Fourier Δ^* est donnée par $\Delta^* = \prod \Delta_v^*$.

Pour $a \in A_k^\times$, on définit $|a|$ par $d(ax) = |a|dx$, où dx est la mesure de Tamagawa. Si $a = (a_v)$, on a $|a| = \prod |a_v|_v$. Si $a \in k^\times$, $x \to ax$ est un automorphisme de A_k qui induit un automorphisme sur k et détermine donc un automorphisme sur le groupe compact A_k/k, d'où $|a| = 1$ ("formule du produit" d'Artin). On posera $\omega_s(x) = |x|^s$ pour $s \in \mathbb{C}$; pour tout ω, il y a $\sigma = \sigma(\omega) \in \mathbb{R}$ tel que $|\omega| = \omega_\sigma$. Comme dans le cas local, si Δ est solution de $P'(k,\omega)$, Δ^* est solution de $P'(k,\omega_1\omega^{-1})$.

En un sens évident, on prendra pour mesure de Haar $d^\times x$ sur $A_k^\times$ le produit des mesures $d^\times x$ relatives aux k_v (normalisées, pour les places finies v, comme il a été dit au n° 1, c'est-à-dire de sorte que $r_v^\times$ soit de mesure 1). On considère l'intégrale

(3) $$\Delta(\omega)(f) = \int_{A_k^\times} f(x)\omega(x)d^\times x$$

où f est une fonction de Schwartz-Bruhat sur A_k. Pour $f = \prod f_v$, elle s'écrit comme produit des intégrales analogues relatives aux $k_v^\times$, qui sont celles mêmes qu'on a étudiées au n° 1. De plus, ce calcul fait voir que (3) est absolument convergent, quelle que soit f, pour $\sigma(\omega) > 1$; quand il en est ainsi, elle définit une solution $\Delta(\omega)$ de $P'(k,\omega)$. D'autre part, on peut calculer (3) en sommant $f(x)\omega(x)$ sur les classes modulo $k^\times$ dans $A_k^\times$, puis intégrant sur $A_k^\times/k^\times$. La somme ne différant d'une somme sur k que par le terme $f(0)$, on peut lui appliquer la formule de Poisson ; c'est l'idée de Tate-Iwasawa. Elle donne le prolongement analytique de (3) à toutes les valeurs de ω sauf ω_0 et ω_1 qui sont des pôles (pour lesquels on a respectivement les solutions $\Delta = \delta_0$ et $\Delta = dx$), ainsi que la transformée de Fourier de $\Delta(\omega)$, qui est $\Delta(\omega_1\omega^{-1})$ sans facteur scalaire, ou, si l'on préfère, avec un facteur égal à 1.

Mais d'autre part, comme on l'a montré, $\Delta(\omega)$ s'écrit aussi comme produit infini de solutions locales Δ_v (les facteurs scalaires dans celles-ci étant ajustés convenablement, et Δ_v étant de la forme $\Delta'(s)$ pour presque tout v). Comme les facteurs scalaires qui apparaissent lorsqu'on prend la transformée de Fourier de chaque Δ_v sont connus d'après le n° 1, on en conclut que le produit de ces facteurs est 1. Ce résultat n'est pas autre chose que l'équation fonctionnelle classique, à la fois pour ζ_k et pour toutes les fonctions L du corps **k**. Par exemple, on obtient le résultat relatif à ζ_k en prenant $\omega = \omega_s$ dans (3). Pour toute place v de k, on prend les solutions locales $\Delta'(s)$ du n° 1 ; notons-les $\Delta'_v(s)$. Les formules du n° 1 donnent alors, quand $\Delta(\omega_s)$ est défini par (3), c'est-à-dire pour $Re(s) > 1$:

$$\prod \Delta'_v(s) = \pi^{r_1(1/2-s)} (2\pi)^{r_2(1-2s)} \prod(1 - q_v^{-s}) . \Delta(\omega_s) ,$$

où r_1 (resp. r_2) est le nombre de places pour lesquelles $k_v = \mathbb{R}$ (resp. $k_v = \mathbb{C}$), qui est bien entendu 0 si k est de caractéristique $p > 1$, et le produit infini est étendu aux places finies, avec $q_v = [r_v : p_v]$. Tenant compte des résultats du n° 1, il s'ensuit que ζ_k se prolonge dans tout le plan et satisfait à l'équation fonctionnelle bien connue.

3. Questions ouvertes. On peut commencer par se proposer d'étendre ce qui précède à une algèbre simple sur k, ayant k pour centre. Le problème se décompose en deux parties : problèmes locaux, problème global. Quant à celui-ci

il n'y a aucune difficulté s'il s'agit d'une algèbre à division sur k (un corps gauche de centre k) ; la méthode de Tate-Iwasawa s'applique tout aussi bien à l'intégrale (3) ; en revanche, s'il y a des diviseurs de 0, leur présence crée, dans le passage du groupe multiplicatif au groupe additif qui est nécessaire pour pouvoir appliquer Poisson, une difficulté provisoirement insurmontable.

Quant au problème local, la méthode indiquée au n° 1 s'applique très bien à une algèbre à division sur un corps local K. Malheureusement, la localisation d'une algèbre à division sur k introduit des algèbres simples sur les corps k_v qui sont loin d'être des corps gauches, puisque bien au contraire ce sont, pour presque toutes les places v, des algèbres de matrices sur k_v.

Il serait très intéressant de traiter le problème local pour toute algèbre simple sur un corps local. Chose curieuse, l'existence de solutions résulte immédiatement de l'application de Tate-Iwasawa au problème global pour une algèbre à division, puisqu'on a vu plus haut que toute solution globale Δ détermine une solution locale Δ_v pour toute place v. J'ai cru comprendre que Stein avait obtenu une démonstration directe pour $M_n(\mathbb{C})$, ainsi qu'une formule explicite pour la transformation de Fourier dans ce cas ; j'ai cru comprendre aussi que Cartier avait une démonstration directe d'existence pour $M_n(\mathbb{C})$ et $M_n(\mathbb{R})$. A ma connaissance, on ne sait rien actuellement sur la question d'unicité.

Naturellement, le problème se pose aussi de savoir si on peut espérer attacher des distributions, locales d'une part, globales de l'autre, à d'autres types de fonctions zêta.