HENRI CARTAN

Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 354, p. 123-138
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__123_0>

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n° 354 Février 1969

SOUS-ENSEMBLES ANALYTIQUES D'UNE VARIÉTÉ BANACHIQUE COMPLEXE

(d'après J.-P. RAMIS)

par Henri CARTAN

1. Germes d'ensembles analytiques.

Soit E un espace de Banach complexe. On a la notion de "germe de sous-ensemble" à l'origine $0 \in E$ (on dira simplement : germe d'ensemble). Un germe d'ensemble X est, par définition, un germe d'ensemble analytique s'il existe $f : E \dashrightarrow F$ (germe d'application holomorphe, à l'origine de E, à valeurs dans un Banach convenable F), tel que $X = f^{-1}(0)$. On dit que X est de définition finie si l'on peut choisir pour F un espace de dimension finie, c'est-à-dire si X est le germe des zéros communs à un nombre fini de germes holomorphes scalaires $f_i : E \dashrightarrow \mathbb{C}$.

Soit $\underline{O}(E)$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes scalaires à l'origine de E. A chaque germe d'ensemble analytique X on associe l'idéal $\underline{I}(X)$ des éléments de $\underline{O}(E)$ qui s'annulent sur X. On peut montrer (Mazet) que l'application $X \mapsto \underline{I}(X)$ est injective : un germe X est entièrement caractérisé par l'idéal $\underline{I}(X)$ qui lui est associé. Bien entendu, on n'obtient pas ainsi tous les idéaux de $\underline{I}(X)$; dans le cas où E est de dimension finie, on sait qu'on obtient de cette façon tous les idéaux égaux à leur racine, c'est-à-dire les intersections finies d'idéaux premiers (l'anneau $\underline{O}(E)$ est alors noethérien). Dans le cas où

E est de dimension infinie, on reviendra sur la caractérisation des idéaux de la forme $\underline{I}(X)$.

Un germe analytique X est dit réductible s'il existe des germes analytiques X_1 et X_2 distincts de X , tels que $X = X_1 \cup X_2$. Sinon, il est dit irréductible. Pour que X soit irréductible, il faut et il suffit que $\underline{I}(X)$ soit un idéal premier (démonstration à peu près triviale). Quels sont les idéaux premiers de la forme $\underline{I}(X)$? Dans le cas où E est de dimension finie, tous les idéaux premiers sont de cette forme : c'est l'un des théorèmes fondamentaux de la théorie classique, et le Nullstellensatz de Hilbert en découle aussitôt. On verra plus loin une réponse à cette question lorsque E est de dimension infinie.

En sens inverse, partons d'un idéal de type fini J de $\underline{O}(E)$; on lui associe un germe d'ensemble analytique, noté $\underline{V}(J)$, défini par l'annulation des fonctions d'un système fini $(f_1,\ldots,f_n)$ de générateurs de J ; ce germe est indépendant du choix du système de générateurs. Si J n'est pas de type fini (ce qui peut malheureusement arriver lorsque E n'est pas de dimension finie, et par suite $\underline{O}(E)$ n'est pas noethérien), il n'est pas possible, en général, de définir $\underline{V}(J)$. Toutefois on peut le faire dans le cas suivant :

DÉFINITION.- Un idéal J est dit géométrique s'il existe un idéal de type fini $I \subset J$, tel que $J \subset \underline{I}(\underline{V}(I))$. On voit alors que $\underline{V}(I)$ est indépendant du choix de I ; on le note $\underline{V}(J)$, et on l'appelle la "variété de l'idéal géométrique J " (c'est un germe d'ensemble analytique !).

Les assertions suivantes sont faciles à vérifier (ou triviales) : tout idéal de type fini est géométrique ; l'idéal $\underline{I}(X)$ d'un germe X de définition finie est géométrique (mais non de type fini, en général) ; la "racine" $\mathrm{Rad}(J)$ d'un idéal géométrique est un idéal géométrique ; la somme, le produit, l'intersection de deux idéaux géométriques J_1 et J_2 est un idéal géométrique, et on a ce qu'on pense :

$$\underline{V}(J_1 + J_2) = \underline{V}(J_1) \cap \underline{V}(J_2) ,$$
$$\underline{V}(J_1 J_2) = \underline{V}(J_1 \cap J_2) = \underline{V}(J_1) \cup \underline{V}(J_2) .$$

2. Décompositions de l'espace E adaptées à un idéal.

On va considérer des décompositions $E = E' \oplus E''$ (somme directe topologique de deux sous-espaces vectoriels fermés E' et E'') dans lesquelles E'' est de dimension finie.

Pour une telle décomposition, on a une suite exacte

$$0 \to E'' \to E \to E' \to 0 ,$$

d'où des homomorphismes d'anneaux

(2.1) $\underline{O}(E') \to \underline{O}(E)$, $\underline{O}(E) \to \underline{O}(E'')$,

dont le premier est injectif, et le second surjectif.

Le cas le plus simple est celui où $\dim E'' = 1$, et c'est dans le cadre d'une telle décomposition que se formule le "théorème de préparation" de Weierstrass, qui est valable, comme on va le voir, lorsque E est de dimension infinie. Lorsque $\dim E'' = 1$, le choix d'une base $\{a\}$ de E'' identifie E à l'ensemble des couples (x,z) , où $x \in E'$ et $z \in \mathbf{C}$. L'anneau $\underline{O}(E)$ contient alors l'anneau des polynômes

$$\underline{O}(E')[z]$$

en z , à coefficients dans $\underline{O}(E')$ (identifié à un sous-anneau de $\underline{O}(E)$ au moyen de (2.1)). Le <u>théorème de préparation</u> (Ramis) dit ceci : si $g \in \underline{O}(E)$ a une restriction à E'' non identiquement nulle, et si p désigne l'ordre de la restriction de g à E'', tout $f \in \underline{O}(E)$ s'écrit d'une seule manière sous la forme

$$f = gq + r ,$$

où $q \in \underline{O}(E)$, et $r \in \underline{O}(E')[z]$ est de degré $< p$. On en déduit que g est équivalent à un "polynôme distingué" $P(z)$ de degré p à coefficients dans $\underline{O}(E')$ ("distingué" signifie que P est unitaire et que ses autres coefficients sont dans l'idéal maximal de $\underline{O}(E')$, c'est-à-dire que leur restriction à E'' est identiquement nulle). Signalons en passant que le théorème de préparation permet à Ramis de montrer que l'anneau $\underline{O}(E)$ est <u>factoriel</u>.

Si (g) désigne l'idéal de $\underline{O}(E)$ engendré par g, on voit que l'homomorphisme d'anneaux

$$\underline{O}(E') \to \underline{O}(E)/(g)$$

déduit de (2.1) est <u>fini</u>, c'est-à-dire fait de $\underline{O}(E)/(g)$ un $\underline{O}(E')$-module de type fini (en fait, un module libre de base $(1, z, \dots, z^{p-1})$).

PROPOSITION 2.1.- Soit J un idéal de $\underline{O}(E)$ ($J \neq \underline{O}(E)$), et soit $E = E' \oplus E''$ une décomposition de E ($\dim E'' < +\infty$). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{O}(E') \to \underline{O}(E)/J$ est fini ;

(ii) le germe $\underline{V}(J) \cap E''$ est réduit à 0.

(N.B. - En toute rigueur, le germe $\underline{V}(J)$ n'est pas défini si J n'est pas un idéal géométrique ; mais cela n'a pas d'importance, car les restrictions à E'' des éléments de J forment un idéal $J'' \subset \underline{O}(E'')$ qui est de type fini, puisque $\dim E''$ est finie. On pose, par définition, $\underline{V}(J) \cap E'' = \underline{V}(J'')$; cette définition est licite, car l'égalité précédente est vraie lorsque l'idéal J est géométrique.)

Démonstration abrégée : l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) nous ramène au cas de la dimension finie, car (i) implique que $\underline{O}(E'')/J''$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et dans ce cas on sait que $\underline{V}(J'') = \{0\}$. Pour montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i), on procède par récurrence sur $n = \dim E''$; si $n = 1$, l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte immédiatement du théorème de préparation ; la récurrence se fait à l'aide du lemme suivant :

LEMME.- Soit une décomposition $E = E' \oplus E''$, avec $\dim E'' = 1$; soit J un idéal de type fini de $\underline{O}(E)$, et soit $g \in J$ dont la restriction à E'' ne soit pas identiquement nulle. Alors il existe un idéal J' de type fini de $\underline{O}(E')$, contenu dans J , tel que $\underline{V}(J')$ soit la projection (sur E') du germe $\underline{V}(J)$ par la projection $E \to E'$ de noyau E'' .

En effet, J est engendré par un polynôme distingué $P(z)$ de degré p et par des polynômes $Q_i(z)$, en nombre fini, de degrés $< p$; d'après la théorie de l'élimination (cf. [6]), l'idéal "résultant" J' est un idéal de $\underline{O}(E')$, de type fini, contenu dans J , et sa variété $\underline{V}(J')$ est la projection de $\underline{V}(J)$ sur E' .

DÉFINITION.- On dira qu'une décomposition $E = E' \oplus E''$ ($\dim E''$ finie) est adaptée à un idéal $J \subset \underline{O}(E)$ si les conditions (i) et (ii) (équivalentes) de la proposition 2.1 sont vérifiées.

PROPOSITION 2.2.- Soit J un idéal de $\underline{O}(E)$, $J \neq \underline{O}(E)$, engendré par p éléments. Pour toute décomposition (E',E'') adaptée à J , la dimension de E'' est au plus égale à p .

(C'est une conséquence facile de la propriété (ii) de la prop. 2.1.)

Dans l'ensemble des décompositions de E , on a la relation d'ordre suivante : (E'_1,E''_1) est "plus grand" que (E',E'') s'il existe un sous-espace F de dimension finie, tel que

$$E''_1 = E'' \oplus F \quad , \quad E' = E'_1 \oplus F \ .$$

Pour qu'une décomposition (E',E'') adaptée à un idéal J soit maximale dans l'ensemble des décompositions adaptées à J , il faut et il suffit que $J \cap \underline{O}(E') = 0$ (c'est évident grâce au théorème de préparation). Une telle décomposition adaptée sera dite décomposition normale pour J . Nous justifions cette terminologie par le fait que le classique "lemme de normalisation" relatif à un idéal $J \subset \underline{O}(E)$, lorsque E est de dimension finie, affirme justement l'existence d'une décomposition $E = E' \oplus E''$ normale pour J (c'est l'analogue du lemme de normalisation dans la théorie des idéaux des anneaux de polynômes à un nombre fini de variables).

PROPOSITION 2.3.- Soit J un idéal de $\underline{O}(E)$ tel qu'il existe un germe analytique de définition finie X , non vide, avec $J \subset \underline{I}(X)$. Alors il existe une décomposition (E',E'') normale pour J .

Démonstration : il suffit d'observer que pour toute décomposition (E'_1,E''_1) adaptée à J , la dimension de E''_1 est au plus égale au nombre des fonctions holomorphes scalaires f_i qui définissent X (cf. prop. 2.2).

On verra plus loin que, réciproquement, si un idéal J possède une décomposition normale, il est contenu dans un idéal géométrique $\neq \underline{O}(E)$, et même, en fait, dans un idéal premier géométrique (th. 6.1).

3. *Etude des idéaux premiers géométriques.*

On va montrer que tout idéal premier géométrique P est de la forme $\underline{I}(X)$, où X est un germe analytique de définition finie. D'une façon précise :

THÉORÈME 3.1.- *Pour un idéal premier* $P \subset \underline{O}(E)$, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *il existe un germe analytique* X *de définition finie, tel que* $P = \underline{I}(X)$ (X est nécessairement *irréductible*) ;

(ii) *l'idéal* P *est géométrique* ;

(iii) P *est contenu dans un idéal géométrique* $\neq \underline{O}(E)$;

(iv) P *possède une décomposition normale* $E = E' \oplus E''$.

Il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ; la prop. 2.3 montre que (iii) $\Rightarrow$ (iv), et il reste à prouver que (iv) $\Rightarrow$ (i). La démonstration (qu'on ne peut donner ici) se recopie sur celle qui est connue dans le cas où E est de dimension finie, mais avec quelques adaptations subtiles. L'un des éléments de cette démonstration est un théorème relatif aux "revêtements ramifiés", qui permet en même temps de donner une *description géométrique* d'un germe analytique irréductible de définition finie (description qui généralise la description classique dans le cas où E est de dimension finie). Voici le résultat en question.

4. *Revêtements ramifiés.*

Soit donnée une décomposition $E = E' \oplus E''$; et soit U un ouvert connexe de E' . Un *revêtement ramifié de base* U , relatif à cette décomposition, est définie par la donnée d'un sous-ensemble X de $p^{-1}(U)$ (où $p : E \to E'$ désigne la projection de noyau E''), tel que

$$p : X \to U$$

possède les propriétés suivantes : il existe un sous-ensemble analytique principal $A \subset U$ (i.e. un sous-ensemble fermé A qui, au voisinage de chacun de ses points, est défini par l'annulation d'une fonction holomorphe scalaire non identiquement nulle), tel que $X' = p^{-1}(U - A)$ soit un revêtement à un nombre fini d de feuillets, que X' soit dense dans X , que, au voisinage de chacun de ses points x' , X' soit le graphe d'une application holomorphe d'un voisinage de $p(x') \in U$ dans E'' , et enfin que, pour tout $a \in A$, il existe un ouvert V contenant a et contenu dans U , et un compact $K \subset E''$, tels que $p^{-1}(V) \cap X'$ soit contenu dans $V \times K$. L'entier d s'appelle le degré du revêtement ramifié ; il ne dépend pas du choix de A .

PROPOSITION 4.1.- Sous les hypothèses précédentes, il existe un système fini de fonctions holomorphes dans $p^{-1}(U)$, et, en fait, des polynômes en les coordonnées de E'' à coefficients holomorphes dans U , dont l'annulation simultanée définit X . En particulier, X est un sous-ensemble analytique de $p^{-1}(U)$ (en chacun de ses points, le germe de X est un germe d'ensemble analytique de définition finie). La fibre de X au-dessus d'un point $a \in A$ se compose d'au plus d points.

Cela dit, la démonstration du théorème 3.1, ou plus précisément de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i), se fait en gros comme suit : on part d'une décomposition $E = E' \oplus E''$ normale pour l'idéal premier P , puis on construit un germe de revêtement ramifié X relatif à cette décomposition, et on montre enfin que P est exactement l'idéal formé des éléments de $\underline{O}(E)$ qui s'annulent sur X .

5. Hauteur et codimension.

Soit P un idéal premier géométrique, et soit $X = \underline{V}(P)$ le germe analytique de définition finie tel que $P = \underline{I}(X)$ (th. 3.1). La description de X comme germe de revêtement ramifié montre que, au-dessus des points de $U - A$ (A : sous-ensemble analytique principal d'un voisinage ouvert assez petit de 0 dans E'), $X' = X \cap p^{-1}(U - A)$ est une sous-variété analytique de X, de codimension égale à $p = \dim E''$. Il s'ensuit que la dimension de E'' est indépendante du choix de la décomposition normale pour P. De plus, on voit sans peine que p est aussi égal à la hauteur de l'idéal premier P, c'est-à-dire à la dimension de Krull de l'anneau de fractions $\underline{O}(E)_P$, qui est noethérien et régulier : p est le plus grand des entiers k tels qu'il existe une suite strictement croissante d'idéaux premiers

$$0 = P_o \subset P_1 \subset \dots \subset P_{k-1} \subset P_k = P .$$

Cet entier p s'appelle aussi la codimension du germe irréductible $\underline{V}(P)$.

6. Idéaux premiers isolés d'un idéal J.

Soit J un idéal (provisoirement quelconque) de $\underline{O}(E)$. La racine Rad J est l'intersection des idéaux premiers contenant J ; c'est aussi l'intersection de ceux de ces idéaux premiers qui sont minimaux dans l'ensemble des idéaux premiers contenant J. Ces éléments minimaux seront appelés les idéaux premiers isolés de l'idéal J. Ils sont de deux sortes : il y a ceux qui sont géométriques, et les autres (qui causent bien du souci).

THÉORÈME 6.1.- Soit J un idéal admettant une décomposition normale $E = E' \oplus E''$, et soit $p = \dim E''$. Alors tout idéal premier géométrique contenant J est de hauteur $\geq p$; les idéaux premiers géométriques de hauteur p, contenant J, sont donc isolés ; ce sont les idéaux premiers P contenant J et tels que $P \cap \underline{O}(E') = \{0\}$. Ces idéaux sont en nombre fini, non nul.

La seule partie non triviale de l'énoncé est l'assertion finale. On la prouve en introduisant le corps des fractions k de $\underline{O}(E')$, et en montrant que si à un idéal I de $\underline{O}(E)$, intersection d'idéaux premiers dont aucun ne rencontre $\underline{O}(E') - \{0\}$, on associe l'idéal I' qu'il engendre dans $\underline{O}(E) \otimes_{\underline{O}(E')} k$, on a $I' \cap \underline{O}(E) = I$.

COROLLAIRE.- Pour toute décomposition $E = E' \oplus E''$ normale pour J , la dimension de E'' est toujours la même : c'est la plus petite des hauteurs des idéaux premiers géométriques contenant J . On l'appellera la hauteur de l'idéal J . Si J ne possède pas de décomposition normale, la hauteur de J est, par définition, infinie.

Cette nouvelle notion de hauteur coïncide avec la notion classique si J est un idéal premier géométrique. Pour voir qu'elle coïncide dans tous les cas, on doit montrer que si P est un idéal premier non géométrique, il existe des idéaux premiers géométriques contenus dans P et de hauteur arbitrairement grande. C'est vrai.

Remarque.- On peut donc, dans l'énoncé du théorème 6.1, supprimer le mot "géométrique" partout où il figure.

DÉFINITION.- Etant donné un germe d'ensemble analytique X on appelle codimension de X , et on note codim X , la hauteur (finie ou infinie) de l'idéal $\underline{I}(X)$.

Pour tout idéal J et tout entier n , on notera $\mathrm{Rad}_n(J)$ l'intersection des idéaux premiers isolés de J dont la hauteur est n . Si J est de hauteur finie p , on a évidemment $\mathrm{Rad}_n(J) = \underline{O}(E)$ pour $n < p$. On va voir que, pour tout n , il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers isolés de J dont la hauteur est n

(le théorème 6.1 l'affirme déjà lorsque $n = p$, hauteur de J). La démonstration du th. 6.1 montre d'ailleurs que $\mathrm{Rad}_p(J)$ se compose des $f \in \underline{O}(E)$ tels qu'il existe un $a \in \underline{O}(E')$, $a \not\equiv 0$, $af \in \mathrm{Rad}(J)$.

Une étude plus poussée de la situation du théorème 6.1 permet de montrer ceci :

LEMME 6.2.- Soit $E = E' \oplus E''$ une décomposition normale pour l'idéal J , avec $\dim E'' = p$. Il existe un élément $b \in \underline{O}(E')$, $b \not\equiv 0$, tel que

(6.1) $$\mathrm{Rad}(J) = \mathrm{Rad}_p(J) \cap \mathrm{Rad}(J + (b)) .$$

Si de plus J est de la forme $\underline{I}(X)$ (où X est un germe d'ensemble analytique), alors

(6.2) $$X = \underline{V}(\mathrm{Rad}_p(\underline{I}(X))) \cup Y ,$$ où Y est le germe formé des points de X où s'annule b .

Il est clair que la hauteur de l'idéal $J_{p+1} = J + (b)$ est $p + 1$. D'après (6.1), les idéaux premiers isolés de J , de hauteur $p + 1$, sont exactement les idéaux premiers de hauteur $p + 1$ qui contiennent J_{p+1} mais ne contiennent pas $\mathrm{Rad}_p(J)$; ils sont donc en nombre fini (éventuellement nul), et l'on a, par une nouvelle application du lemme 6.2 :

$$\mathrm{Rad}\, J = \mathrm{Rad}_p(J) \cap \mathrm{Rad}_{p+1}(J) \cap \mathrm{Rad}\, J_{p+2} ,$$

où J_{p+2} est de hauteur $p + 2$. Par récurrence, on obtient :

THÉORÈME 6.3.- <u>Pour tout idéal</u> J , <u>et tout entier</u> n , <u>l'ensemble des idéaux premiers isolés de</u> J <u>de hauteur</u> n <u>est fini, et on a, pour tout entier</u> k <u>au moins égal à la hauteur de</u> J :

(6.3) $$\mathrm{Rad}\, J = \bigcap_{n<k} \mathrm{Rad}_n(J) \cap \mathrm{Rad}\, J_k ,$$

<u>où</u> J_k <u>est un idéal de hauteur</u> k .

De même, à partir de (6.2), on montre :

THÉORÈME 6.4.- Soit X un germe d'ensemble analytique. Pour tout entier n, notons ${}_nX$ le germe $\underline{V}(\mathrm{Rad}_n(\underline{I}(X)))$, réunion des variétés des idéaux premiers isolés de $\underline{I}(X)$ dont la hauteur est n. Alors, pour tout entier k au moins égal à la codimension de X, on a

$$(6.4) \qquad X = \Big(\bigcup_{n<k} {}_nX\Big) \cup Y_k ,$$

où Y_k est un germe analytique de codimension k.

Le germe ${}_nX$ s'appelle la composante n-codimensionnelle du germe d'ensemble analytique X. C'est une réunion finie de germes irréductibles de codimension n.

7. Cas d'un idéal géométrique.

Supposons que l'idéal J soit géométrique. Alors, dans (6.3), J_k est aussi un idéal géométrique ; donc (6.3) entraîne

$$(6.5) \qquad \underline{V}(J) = \bigcup_{n<k} \underline{V}(\mathrm{Rad}_n(J)) \cup \underline{V}(J_k) .$$

On va voir que, pour k assez grand, $\underline{V}(J_k)$ est contenu dans $\bigcup_{n<k} \underline{V}(\mathrm{Rad}_n(J))$. En effet, supposons que le germe $\underline{V}(J)$ puisse être défini par l'annulation de q fonctions holomorphes scalaires ; et soit I_k un idéal de type fini tel que

$$I_k \subset J_k \subset \underline{I}(\underline{V}(I_k)) .$$

I_k est de même hauteur k que J_k ; puisque I_k est de type fini, on peut considérer le germe $\underline{V}_a(I_k)$ en tout point $a \in E$ assez voisin de l'origine, et on voit facilement que la codimension de ce germe est $\geq k$. S'il existe des a arbitrairement voisins de l'origine tels que $a \in \underline{V}(I_k)$, $a \notin \bigcup_{n<k} \underline{V}(\mathrm{Rad}_n(J))$, le germe $\underline{V}_a(I_k)$ est égal au germe $\underline{V}_a(I)$ d'après (6.5), et comme $\underline{V}_a(I)$ est définissable par l'annulation de q fonctions holomorphes, il s'ensuit que $k \leq q$. Ceci prouve que

$$\underline{V}(J) = \bigcup_{n\leq q} \underline{V}(\mathrm{Rad}_n(J)) ,$$

et ceci est réunion d'une famille <u>finie</u> de germes irréductibles. De plus, pour $k > q$, $\underline{V}(\mathrm{Rad}_k(J))$, qui est contenu dans $\underline{V}(J)$, est contenu dans $\bigcup_{n\leq q} \underline{V}(\mathrm{Rad}_n(J))$, et par suite, en repassant aux idéaux :

$$\mathrm{Rad}_k(J) \supset \bigcap_{n\leq q} \mathrm{Rad}_n(J) .$$

S'il existait un idéal premier isolé de J , de hauteur $k > q$, il contiendrait un idéal premier isolé de hauteur $n \leq q$, ce qui est absurde. Donc $\mathrm{Rad}_k(J) = \underline{O}(E)$ pour $k > q$. En résumé :

THÉORÈME 7.1.- <u>Si un idéal</u> J <u>est géométrique, il ne possède qu'un nombre fini d'idéaux premiers isolés, de hauteur finie, et</u> $\underline{V}(J)$ <u>est la réunion des variétés (irréductibles) de ces idéaux premiers.</u>

COROLLAIRE 7.2.- Tout germe analytique de définition finie est réunion d'une famille finie de germes irréductibles de codimension finie X_i . Une telle décomposition est unique si l'on suppose $X_i \not\subset X_j$ pour $i \neq j$.

<u>Remarque</u>.- X est réunion de ses composantes n-codimensionnelles ${}_nX$, qui sont vides pour n assez grand.

<u>Problème du Nullstellensatz</u> : soit J un idéal géométrique. Le Nullstellensatz est vrai pour J si l'on a

(7.1) $\qquad \underline{I}(\underline{V}(J)) = \mathrm{Rad}\, J$.

Or, on a prouvé que $\underline{I}(\underline{V}(J))$ est l'intersection des idéaux premiers isolés de J <u>dont la hauteur est finie</u>, idéaux qui sont en nombre fini. Pour que la relation (7.1) soit vraie, il faut et il suffit que J <u>ne possède aucun idéal premier isolé de hauteur infinie</u> : c'est évidemment suffisant ; et c'est nécessaire, car (7.1) implique que tout idéal premier isolé de J s'annule sur $\underline{V}(J)$, donc contient un idéal premier isolé de hauteur finie, auquel il est forcément égal.

On n'a pas réussi à prouver l'inexistence d'idéaux premiers isolés de hauteur infinie, même lorsque l'idéal J est de type fini (sauf bien entendu dans des cas très particuliers). Il serait bien agréable de connaître des contre-exemples, s'il y en a.

8. Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique.

Soit U une variété analytique banachique ; un sous-ensemble analytique X de U est, par définition, un sous-ensemble fermé dont le germe, en chacun de ses points, est un germe d'ensemble analytique. Pour chaque $x \in X$, soit ${}_n(X_x)$ la composante n-codimensionnelle du germe X_x ; la réunion des ${}_n(X_x)$ quand x varie (n donné) est un sous-ensemble analytique ${}_nX$ de U de codimension n en chacun de ses points : on l'appelle la composante n-codimensionnelle de X dans U. L'ensemble de ses points <u>réguliers</u> (points en lesquels le germe de ${}_nX$ est une sous-variété (directe) de codimension n) est un ouvert dense dans ${}_nX$; les composantes connexes de cet ouvert ont pour adhérence des sous-ensembles analytiques, qu'on appelle les <u>composantes irréductibles</u> (globales dans U) de codimension n de X. Elles forment une famille localement finie dans U.

Un sous-ensemble analytique X de U est dit <u>de définition finie</u> si chacun de ses germes est de définition finie.

Si $x \in X$, on note $\operatorname{codim}_x X$ la codimension du germe X_x ; si X est de définition finie, la fonction $x \mapsto \operatorname{codim}_x X$ est <u>localement bornée</u> sur X, et réciproquement.

Nous nous bornerons à indiquer une généralisation du théorème de Remmert-Stein (voir par ex. [1]).

THÉORÈME 8.1.- Soient U une variété analytique banachique, X un sous-ensemble analytique de U, et Y un sous-ensemble analytique de $U - X$. Soit $\bar{Y}$ l'adhérence de Y dans U ; disons qu'un point $x \in X$ est <u>régulier pour</u> Y si le germe de $\bar{Y}$ au point x est un germe analytique, sinon $x \in X$ sera dit <u>singulier</u>. Supposons enfin :

(i) pour tout $x \in X$, $\operatorname{codim}_x X \geq p$ (p entier fini donné),

(ii) pour tout $y \in Y$, $\operatorname{codim}_y Y \leq p$.

Alors, <u>l'ensemble</u> Z <u>des</u> $x \in X$ <u>qui sont singuliers pour</u> Y <u>est un sous-ensemble analytique, la codimension de</u> Z <u>est égale à</u> p <u>en chaque point</u> $z \in Z$, <u>et la codimension de</u> $\bar{Y}$ <u>en tout point régulier</u> $x \in X$ <u>est</u> $\leq p$.

COROLLAIRE.- Si on a $\operatorname{codim}_x X > p$ en tout point $x \in X$, alors Z est vide : tout point $x \in X$ est régulier pour Y, donc l'adhérence $\bar{Y}$ est un sous-ensemble analytique de U.

Voici deux applications de ce théorème :

(1) Soit, dans l'espace projectif $P(E)$, un sous-ensemble analytique X tel que $\operatorname{codim}_x X$ soit borné. Alors X est un sous-ensemble algébrique défini par l'annulation d'un système fini de polynômes homogènes (scalaires).

(2) Soit $f : U \to V$ une application holomorphe de variétés analytiques banachiques, et soit $x \in U$ tel que la fibre $f^{-1}(f(x))$ ait une codimension <u>finie</u> p au point x. Alors, pour y assez voisin de x, la codimension de la fibre $f^{-1}(f(y))$ au point y est au moins égale à p.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. C. GUNNING et H. ROSSI - Analytic functions of several complex variables, (Prentice-Hall, 1965).

[2] M. HERVÉ - Several complex variables (local theory), Oxford Univ. Press, 1963.

[3] R. NARASIMHAN - Introduction to the Theory of Analytic Spaces, (Lecture Notes n° 25, 1966).

[4] J.-P. RAMIS - Comptes-Rendus, 267, 1968, p. 732 et p. 879.

Thèse (à paraître).

[5] K. STEIN - (Séminaire H. Cartan, 1953/54, exposés 13 et 14).

[6] B. L. van der WAERDEN - Moderne algebra, chap. 11.