CHARLES GOULAOUIC

Sur la théorie spectrale des opérateurs elliptiques (éventuellement dégénérés)

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 360, p. 231-244
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__231_0>

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n° 360 Juin 1969

SUR LA THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES (ÉVENTUELLEMENT DÉGÉNÉRÉS)

par Charles GOULAOUIC

On se propose d'étudier la croissance des valeurs propres pour une classe d'opérateurs différentiels elliptiques ou elliptiques dégénérés.

Dans le cas du problème de Dirichlet et de Neumann pour le laplacien dans un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, un équivalent quand T tend vers l'infini du nombre de valeurs propres majorées par T a été obtenu vers 1949 par S. Minakshisundaram [11] (sa méthode qui consiste à étudier la fonction de Green de l'équation de la chaleur associée, a été reprise dans un cadre plus général par R. Arima et S. Mizohata [4]). L. Gårding [7] et F. Browder [6] ont, vers 1951-1953, étendu ces résultats au cas des opérateurs différentiels uniformément elliptiques et auto-adjoints, et récemment des estimations plus précises du comportement asymptotique des valeurs propres de tels opérateurs elliptiques ont été obtenues par S. Agmon et Y. Kannai [3] et améliorées par L. Hörmander [9].

On utilise ici de nombreux résultats de S. Agmon [1], [2], sur la théorie spectrale et une méthode voisine de celle utilisée par L. Gårding [7] et F. Browder [6] : pour étudier le spectre de l'opérateur B (supposé positif par exemple), on considère le comportement asymptotique quand t tend vers l'infini du noyau de Green associé à l'opérateur $B + tI$, et on en déduit des résultats sur la croissance des valeurs propres en utilisant des théorèmes taubériens. L'étude "locale" du comportement asymptotique du noyau de Green repose essentiellement sur un résultat de décroissance des solutions de l'équation $Bu + tu = 0$ par rapport au paramètre t quand t tend vers l'infini. L'étude globale utilise des majorations du noyau de Green qui résultent de théorèmes de Sobolev.

On obtient, pour des opérateurs elliptiques et elliptiques dégénérés que l'on précisera, un équivalent de la i-ème valeur propre quand i tend vers l'infini.

Pour d'autres opérateurs elliptiques dégénérés, on obtient seulement un encadrement de la croissance des valeurs propres, plus précis toutefois que celui qui pourrait être obtenu par la formule de Courant-Fisher.

I. Lemmes de majoration.

Soient Ω un ouvert borné de $\underline{\underline{R}}^n$, l'espace euclidien réel de dimension n, et B un opérateur différentiel dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω, d'ordre $2m > n$, que l'on écrit :

$$B = B(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} b_\alpha(x) D^\alpha ,$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \underline{\underline{N}}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$ et $D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}$;
on note

$$B'(x,D) = \sum_{|\alpha| = 2m} b_\alpha(x) D^\alpha$$

et on suppose :

(H_o) Les coefficients de B sont de classe C^∞ sur Ω et B est un opérateur proprement elliptique d'ordre $2m$ en tout point de Ω.

(H_1) Pour tout $x \in \Omega$ et pour tout ξ non nul dans $\underline{\underline{R}}^n$, on a :

$$B'(x,\xi) + |B'(x,\xi)| \neq 0 .$$

Ces hypothèses entraînent en particulier (cf. [1]) :

LEMME 1.1.- <u>Quels que soient le réel</u> $p \in]1,\infty[$ <u>et l'ouvert</u> Ω_1 <u>tel que</u> $\overline{\Omega_1}$ <u>soit une variété à bord de classe</u> C^{2m} <u>et</u> $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$, <u>il existe</u> $\lambda > 0$ <u>et</u> $C > 0$ <u>tels que</u> : <u>pour tout</u> $t \geq \lambda$, $B + tI$ <u>est un isomorphisme de</u> $W^{2m,p}(\Omega_1) \cap W_o^{m,p}(\Omega_1)$ <u>sur</u> $L^p(\Omega_1)$ <u>et on a, pour tout</u> $u \in W^{2m,p}(\Omega_1) \cap W_o^{m,p}(\Omega_1)$:

$$\|u\|_{W^{2m,p}(\Omega_1)} + t\|u\|_{L^p(\Omega_1)} \leq C\|(B+t)u\|_{L^p(\Omega_1)} .$$

La notation $W^{k,p}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev $\{u \in L^p(\Omega)$; $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq k\}$ muni de la norme habituelle, et $W_o^{k,p}(\Omega)$ désigne l'adhérence dans $W^{k,p}(\Omega)$ de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact dans Ω. Pour $p = 2$, ces notations seront aussi remplacées par $H^k(\Omega)$ et $H_o^k(\Omega)$. L'injection canonique est notée I.

On remarque que si l'opérateur B vérifie les hypothèses (H_o) et (H_1), son adjoint formel B* vérifie aussi ces hypothèses.

La méthode utilisée ici pour étudier les noyaux de Green repose essentiellement sur le résultat :

PROPOSITION 1.2.- <u>Soient</u> Ω_1 <u>et</u> Ω_2 <u>deux ouverts vérifiant</u> $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2 \subset \Omega$, k <u>et</u> p <u>deux entiers positifs ou nuls</u>. <u>Il existe des constantes</u> $c > 0$ <u>et</u> $\lambda \geq 0$, <u>telles que</u> : <u>pour tout</u> $t \geq \lambda$ <u>et pour tout</u> $u \in L(\Omega_2)$ <u>et vérifiant</u> $Bu + tu = 0$ <u>dans</u> Ω_2, <u>on ait</u> :

$$\|u\|_{k,\Omega_1} \leq c\, t^{-p} \|u\|_{o,\Omega_2}$$

(<u>on note</u> $\|\ \|_{k,\Omega}$ <u>la norme dans</u> $H^k(\Omega)$).

La démonstration de cette proposition se fait par une méthode "d'ouverts emboités" qui est détaillée dans [8].

II. <u>Noyau de Green</u>. <u>Comportement asymptotique local</u>.

1. On considère un opérateur non borné $(B,D(B))$ dans $L^2(\Omega)$ associé à l'opérateur différentiel B, et que l'on notera aussi B lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible.

On suppose :

(H_2) $$H_o^{2m}(\Omega) \subset D(B) \subset H^m(\Omega) .$$

(H_3) Il existe $t_o \geq 0$ tel que, pour tout $t \geq t_o$, $B + tI$ soit un isomorphisme de $D(B)$ sur $L^2(\Omega)$.

Ces hypothèses entraînent que, pour tout $t \geq t_o$, on peut représenter l'opérateur $(B + tI)^{-1}$ par un noyau de Green G_t qui vérifie, pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $f \in D(B)$,

(1) $$f(x) = \int_\Omega G_t(x,y)(B + t)f(y)dy .$$

Cette relation implique :

(2) $$\overline{(B^* + t)}G_t(x, \ ) = \delta_x \qquad (\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)),$$

et le noyau G_t est C^∞ dans le complémentaire de la diagonale de $\Omega \times \Omega$ et continu sur $\Omega \times \Omega$.

On a pour tout réel $p \in [1,2]$ l'égalité :

(3) $$\| G_t(x, \ )\|_{L^q(\Omega)} = \sup_{f \in D(B)} \frac{|f(x)|}{\|(B + t)f\|_{L^p(\Omega)}} \qquad \text{où } p^{-1} + q^{-1} = 1 .$$

D'où on peut déduire (cf. [8]) :

LEMME 2.1.- <u>Quels que soient les réels</u> $p \in [1,2]$ <u>et</u> $\alpha > \frac{n}{2pm} - 1$ <u>et quel que soit l'ouvert</u> Ω_1 <u>tel que</u> $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$, <u>il existe</u> $\lambda \geq 0$ <u>et</u> $C > 0$ <u>tels que, pour tout</u> $x \in \Omega_1$ <u>et pour tout</u> $t \geq \lambda$, <u>on ait</u>

$$\| G_t(x, \ )\|_{L^q(\Omega_1)} \leq Ct^\alpha \qquad \underline{\text{avec}} \ q^{-1} + p^{-1} = 1 .$$

2. <u>Cas où</u> B <u>est auto-adjoint.</u> D'après l'hypothèse (H_3), il est nécessairement semi-borné inférieurement ; il admet une suite de valeurs propres $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ qui tendent vers l'infini avec i et une suite de fonctions propres $(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ associées aux $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$, qui sont continues sur Ω et constituent une base orthonormale de l'espace $L^2(\Omega)$.

Pour tout $t \geq t_o$ et $x \in \Omega$, on peut développer $G_t(x,\ )$ suivant la base $(\overline{\omega_i})_{i \in \mathbb{N}}$, et on démontre que l'on obtient aussi l'égalité ponctuelle dans $\Omega \times \Omega$:

$$G_t(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i + t)^{-1}\, \omega_i(x)\, \overline{\omega_i(y)} \ . \tag{4}$$

On peut aussi, pour $t \geq t_o$, représenter l'opérateur $(B + t)^{-\frac{1}{2}}$ par un noyau de Green g_t et on montre que, pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$G_t(x,x) = \|g_t(x,\ )\|^2_{L^2(\Omega)} \ ,$$

et il en résulte :

$$G_t(x,x) = \sup_{f \in D(B)} \frac{|f(x)|}{(Bf + tf, f)_{L^2(\Omega)}} \ . \tag{5}$$

3. Comportement du noyau de Green sur le complémentaire de la diagonale.

Dans tout ouvert de Ω qui ne contient pas x, on a $(\overline{B^* + t})G_t(x,\ ) = 0$. On en déduit en utilisant le lemme 2.1 (avec $p = 2$) et la proposition 1.2, puis le théorème de Sobolev, le résultat :

PROPOSITION 2.3.- Quel que soit le compact K de $\Omega \times \Omega$ contenu dans le complémentaire de la diagonale, la fonction (définie pour t assez grand) :

$$t \longmapsto \sup_{(x,y) \in K} |G_t(x,y)|$$ est à décroissance rapide quand t tend vers l'infini.

4. Comparaison des noyaux de Green de deux opérateurs ayant même symbole.

Soient $x \in \Omega$ et Ω_1 un ouvert tel que $x \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega$. On note G^1_t le noyau de Green associé au problème de Dirichlet pour $B + tI$ dans $L^2(\Omega_1)$, pour t assez grand (cf. lemme 1.1). La fonction $H_t(x,\ )$, définie par $H_t(x,y) = G_t(x,y) - G^1_t(x,y)$ pour tout y dans Ω_1, vérifie :

$$(\overline{B^* + t})H_t(x,\ ) = 0 \qquad \text{dans } \Omega_1 \ .$$

On vérifie qu'il existe $C > 0$ et $t_1 \geq 0$ tels que, pour tout $t \geq t_1$, on ait $\| H_t(x, \ ) \|_{o,\Omega_1} \leq C$. On déduit alors de la proposition 1.2 et du théorème de Sobolev, le résultat :

PROPOSITION 2.4.- <u>Pour tout ouvert</u> Ω_2 <u>tel que</u> $\overline{\Omega_2} \subset \Omega_1$, <u>la fonction</u> (<u>définie pour</u> t <u>assez grand</u>) $t \longmapsto \sup\limits_{y \in \Omega_2} |G_t(x,y) - G_t^1(x,y)|$ <u>est à décroissance rapide quand</u> t <u>tend vers l'infini</u>.

5. <u>Comportement asymptotique du noyau de Green en tout point de la diagonale de</u> $\Omega \times \Omega$.

Soit $x_o \in \Omega$; on note $B^o = B(x_o,D)$ l'opérateur à coefficients constants obtenu en prenant pour coefficients les valeurs en x_o des coefficients de B. Pour x et y dans Ω et t assez grand, on note

$$E_t(x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (t + \overline{B^*(x_o,\xi)})^{-1} e^{i(y-x).\xi} \, d\xi \ ;$$

on a :

$$\overline{(B^o + t)^*} \, E_t(x, \ ) = \delta_x \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} (t^{1 - n/2m} E_t(x_o,x_o)) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + B'(x_o,\xi))^{-1} \, d\xi \ .$$

De même :

PROPOSITION 2.5.- <u>Pour tout</u> $x \in \Omega$, <u>on a</u>

$$\lim_{t \to +\infty} (t^{1 - n/2m} G_t(x,x)) = \ell(x)$$

<u>avec</u> $\ell(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + B'(x,\xi))^{-1} \, d\xi$.

On donne l'idée de la démonstration (en supposant B auto-adjoint pour simplifier les notations) :

$$D = G_t(x_o,x_o) - E_t(x_o,x_o) = \langle G_t(x_o, \ ) , (B + t)\varphi(G_t(x_o, \ ) - E_t(x_o, \ ))\rangle \ ,$$

où φ est une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ égale à 1 sur un voisinage de x_o, dont le support est noté K. La fonction $t \mapsto D - \langle G_t(x_o, \ ), \varphi(B^o - B)E_t(x_o, \ )\rangle$ est à décroissance rapide quand t tend vers l'infini. En majorant $\| (B^o - B)E_t(x_o, \ ) \|_{L^p(K)}$ et $\| G_t(x_o, \ ) \|_{L^q(K)}$ avec $p \in [1, \frac{n}{n-1}[$ et $q^{-1} + p^{-1} = 1$, on obtient que $G_t(x_o, x_o)$ et $E_t(x_o, x_o)$ sont équivalents quand t tend vers l'infini.

6. Cas où B est auto-adjoint.

Il résulte de la proposition 2.5 et de (4) que :

PROPOSITION 2.6.- *Si* B *est auto-adjoint et vérifie les hypothèses* $(H_o), \ldots, (H_3)$, *on a* :

1) *Pour tout* $x \in \Omega$, $\lim_{t \to +\infty} t^{1 - n/2m} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_j + t)^{-1} |\omega_j(x)|^2 = \ell(x)$.

2) *Pour* x *et* y *dans* Ω, $x \neq y$, *la fonction* $t \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_j + t)^{-1} \omega_j(x)\overline{\omega_j(y)}$ *est à décroissance rapide quand* t *tend vers l'infini.*

En utilisant un théorème taubérien, on en déduit :

PROPOSITION 2.7.- 1) *Pour tout* $x \in \Omega$, *on a* :

$$\lim_{T \to +\infty} \left(T^{-n/2m} \sum_{\lambda_j < T} |\omega_j(x)|^2\right) = h(m,n)\ell(x)$$

avec $h(m,n) = \frac{2m}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2m}$.

2) *Pour* x *et* y *dans* Ω, $x \neq y$, *on a, pour tout* $\epsilon > 0$,

$$\lim_{T \to +\infty} \left(T^{-\epsilon} \sum_{\lambda_j < T} \omega_j(x) \overline{\omega_j(y)}\right) = 0 .$$

Le théorème taubérien utilisé peut s'énoncer sous la forme :

LEMME 2.8.- *Soient* σ *une fonction croissante de* $[0,\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$, $a \in]0,1[$ *et* $C \geq 0$. *On suppose que* :

$$\int_0^\infty (\lambda + t)^{-1} d\sigma(\lambda) = Ct^{a-1} + o(t^{a-1}) \quad \underline{\text{quand}} \quad t \to +\infty .$$

Alors :

$$\sigma(\lambda) = C \frac{\sin \pi a}{\pi a} \lambda^a + o(\lambda^a) \qquad \underline{\text{quand}} \quad \lambda \quad \underline{\text{tend vers l'infini}}.$$

Ce résultat peut se trouver dans [2].

III. Estimations globales. Croissance des valeurs propres.

On suppose encore B auto-adjoint, et donc semi-borné (remarquons que l'on peut, pour un opérateur B qui serait auto-adjoint mais non semi-borné, obtenir par ce qui suit, la croissance des valeurs absolues des valeurs propres en considérant B^2 au lieu de B).

On passe du comportement asymptotique local à un comportement asymptotique global en utilisant une majoration de $G_t(x,x)$ et le théorème de Lebesgue.

On peut, en considérant éventuellement $B + t_o$ au lieu de B , supposer $t_o = 0$ dans l'hypothèse (H_3) et on déduit de (5) :

$$(6) \qquad G_t(x,x) = \sup_{f \in D(B^{\frac{1}{2}})} \frac{|f(x)|^2}{\| B^{\frac{1}{2}} f\|^2_{o,\Omega} + t\|f\|^2_{o,\Omega}} .$$

1. Cas où $D(B) \subset H^{2m}(\Omega)$ (et Ω assez régulier pour que le théorème d'inclusion de Sobolev y soit valable).

Il existe alors une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in \Omega$, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $f \in D(B^{\frac{1}{2}})$, on ait :

$$(7) \qquad |f(x)|^2 \leq Ct^{n/2m - 1} (\| B^{\frac{1}{2}} f\|^2_{o,\Omega} + t\| f\|^2_{o,\Omega}) .$$

En utilisant (6), on en déduit :

$$(8) \qquad \sup_{\substack{t \geq 0 \\ x \in \Omega}} |G_t(x,x)| \leq Ct^{n/2m - 1} .$$

On déduit alors de la proposition 2.6 que :

$$(9) \qquad \lim_{t \to +\infty} \left(t^{1-n/2m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j + t}\right) = \int_\Omega \ell(x)dx \; .$$

Par application du théorème taubérien déjà cité, on obtient :

$$(10) \qquad \lim_{T \to +\infty} \left(T^{-n/2m} \sum_{\lambda_j < T} 1\right) = h(m,n) \int_\Omega \ell(x)dx$$

et le résultat "classique" :

PROPOSITION 3.1.- _Soit_ B _un opérateur auto-adjoint vérifiant_ $(H_o),\ldots,(H_3)$, _dont les valeurs propres sont désignées par_ $(\lambda_j)_{j\in \underline{\underline{N}}}$. _Quand_ j _tend vers l'infini_, λ_j _est équivalent à_ $Cj^{2m/n}$ _avec_ $C = \left(h(m,n) \int_\Omega \ell(x)dx\right)^{-2m/n}$.

2. _Cas où_ $D(B)$ _n'est pas contenu dans_ $H^{2m}(\Omega)$.

C'est en particulier le cas d'opérateurs elliptiques dégénérés ; la méthode précédente ne s'adapte pas sans modifications.

Par le théorème de Fatou-Lebesgue, on déduit de la proposition 2.7 l'inégalité :

$$(11) \qquad \underline{\lim}_{T \to +\infty} \left(T^{-n/2m} \sum_{\lambda_j < T} 1\right) \geq h(m,n) \int_\Omega \ell(x)dx \quad \text{(éventuellement infini).}$$

Il y a lieu de distinguer deux cas :

a) _Cas où_ ℓ _n'est pas intégrable sur_ Ω .

On déduit de (11) que $\left(T^{-n/2m} \sum_{\lambda_j < T} 1\right)$ tend vers l'infini avec T , d'où il résulte :

PROPOSITION 3.2.- _Si la fonction_ ℓ , _définie par_ $\ell(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\underline{\underline{R}}^n} (1 + B(x,\xi))^{-1} d\xi$ _n'est pas intégrable sur_ Ω , _on a_ :

$$\lambda_j = o(j^{2m/n}) \quad \text{quand } j \text{ tend vers l'infini.}$$

b) Cas où ℓ est intégrable sur Ω .

De l'inégalité (11), on tire encore une majoration de la croissance des valeurs propres :

PROPOSITION 3.3.- *Si la fonction* ℓ *est intégrable, on a* :

$$\varlimsup_{j \to +\infty} (\lambda_j . j^{-2m/n}) \leq (h(m,n) \int_\Omega \ell(x)dx)^{-2m/n} .$$

Si on peut encore majorer $t^{1 - n/2m}\, G_t(x,x)$ par une fonction intégrable sur Ω indépendante de t , le théorème de Lebesgue donne un équivalent de λ_j quand j tend vers l'infini, qui est le même que dans la proposition 3.1.

Sinon, on cherche une minoration de la croissance des valeurs propres. On a toujours un résultat donné par la formule de Courant-Fisher par exemple, sachant seulement que l'on a $D(B) \subset H^m(\Omega)$.

On peut obtenir des résultats plus précis, en utilisant au mieux la relation (6) pour obtenir une majoration de $G_t(x,x)$. Cela peut se déduire de théorèmes d'inclusion analogues au théorème de Sobolev, mais dans des espaces avec poids.

Pour illustrer ce qui précède, on peut considérer un exemple d'opérateur dégénéré.

3. Etude d'un exemple.

On considère l'opérateur différentiel dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$A = \sum_{0 \leq |i|, |j| \leq 1} D_i(a_{ij}\, \varphi\, D_j) ,$$

où φ *est une fonction* C^∞ *dans* $\underline{\underline{R}}^n$ *et vérifiant* :

$\Omega = \{x \in \underline{\underline{R}}^n ; \varphi(x) > 0\}$; $\partial\Omega = \{x \in \underline{\underline{R}}^n ; \varphi(x) = 0\}$ <u>et</u> $d\varphi(x) \neq 0$ <u>pour tout</u> $x \in \partial\Omega$. <u>Les fonctions</u> a_{ij} <u>sont</u> C^∞ <u>sur</u> $\bar{\Omega}$ <u>et il existe</u> $\alpha > 0$ <u>tel que pour tout</u> $\xi \in \underline{\underline{R}}^n$ <u>et pour tout</u> $x \in \bar{\Omega}$, <u>on ait</u> : $\mathrm{Re}\left(\sum_{|i| = |j| = 1} a_{ij}(x)\xi^i\xi^j\right) \geq \alpha|\xi|^2$.

Soit $D(A) = \{u \in H^1(\Omega) ; \varphi u \in H^2(\Omega)\}$.

On pose $B = A^m$ avec m pair et on vérifie (cf. [5]) que l'on a :

$$D(B) = \{u \in H^m(\Omega) ; \varphi^m u \in H^{2m}(\Omega)\} .$$

Pour $2m > n$, $(B,D(B))$ vérifie les hypothèses $(H_0),\ldots,(H_3)$. Si de plus, on suppose A formellement auto-adjoint, $(B,D(B))$ est un opérateur non borné auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$.

De la croissance des valeurs propres de B , on déduit évidemment celle des valeurs propres de A et on démontre le résultat suivant :

PROPOSITION 3.4.- <u>Si</u> $(\lambda_j)_{j\in\underline{\underline{N}}}$ <u>désigne la suite croissante des valeurs propres de l'opérateur</u> A , <u>on a</u> :

1) <u>Pour</u> $n = 1$, λ_j <u>est équivalent à</u> Cj^2 <u>quand</u> j <u>tend vers l'infini</u>, <u>avec</u>

$$C = \pi^{-1} \int_\Omega (a_{11}(x)\varphi(x))^{-\frac{1}{2}}\, dx .$$

2) <u>Pour</u> $n > 1$, <u>on a d'une part</u> :

$$\lambda_j = o(j^{2/n}) \quad \text{\underline{quand} } j \text{ \underline{tend vers l'infini}},$$

<u>et d'autre part</u>, <u>pour tout</u> $\varepsilon > 0$:

$$(\lambda_j . j^{\varepsilon - 1/_{n-1}}) \quad \text{\underline{tend vers l'infini avec} } j .$$

<u>Démonstration de la proposition 3.4</u> (<u>début</u>).

Un calcul simple donne :

$$\ell(x) = \varphi(x)^{-n/2}\, k(x) ,$$

où k est une fonction continue strictement positive sur $\bar{\Omega}$; il en résulte que ℓ n'est intégrable sur Ω que pour $n = 1$.

Pour terminer la démonstration, nous avons besoin d'un lemme d'inclusion :

LEMME 3.5.- Avec les hypothèses ci-dessus sur φ et r entier $> \frac{n}{4}$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in \Omega$, tout $t > 0$ et tout $u \in H^r(\Omega)$ et tel que $\varphi^r u \in H^{2r}(\Omega)$, on ait :

$$t^{1 - n/4r}\, \varphi(x)^{n/2} |u(x)|^2 \leq C(\| \varphi^r u\|^2_{2r,\Omega} + \|u\|^2_{r,\Omega} + t\|u\|^2_{o,\Omega}) .$$

Pour la démonstration de ce lemme, qui est très technique, on renvoie à [8].

Suite de la démonstration de la proposition 3.4.

D'après le lemme 3.5 et la connaissance de $D(B)$, on obtient :

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in D(B^{\frac{1}{2}})$, on ait :

$$\sup_{\substack{t>0\\ x\in\Omega}} t^{1 - n/2m} \varphi(x)^{n/2} \; |f(x)|^2 \leq C(\|f\|^2_{D(B^{\frac{1}{2}})} + t\|f\|^2_{o,\Omega}) ,$$

donc d'après (6), il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$\sup_{\substack{t>0\\ x\in\Omega}} (\varphi(x)^{n/2} \; t^{1 - n/2m} \; G_t(x,x)) \leq C_1$$

d'où le résultat annoncé pour $n = 1$.

Par ailleurs, le théorème de Sobolev habituel dit qu'il existe $C_2 > 0$ telle que

$$\sup_{\substack{t>0\\ x\in\Omega}} (t^{1 - n/m} \; G_t(x,x)) \leq C_2 .$$

D'où, pour tout $\alpha \in]\frac{n}{2m}, \frac{n}{m}]$, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} (t^{1-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_j^m + t)^{-1}) = 0$$

et on termine à l'aide du théorème taubérien déjà utilisé.

Remarque.- Dans [5], on a utilisé ces résultats pour montrer que l'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est isomorphe à l'espace s des suites à décroissance rapide : on développe les éléments de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ suivant les fonctions propres de l'opérateur A et on peut conclure parce que la croissance des valeurs propres de l'opérateur A est polynômiale. Evidemment, pour cette application, il n'est pas nécessaire d'avoir un résultat aussi précis que la proposition 3.5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON - On the eigenfunctions and the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. pure and Applied Math., t. 15 (1962), p. 119-147.

[2] S. AGMON - Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand Math. Studies, 1965.

[3] S. AGMON and Y. KANNAI - On the asymptotic behaviour of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators, Israel J. Math., 5 (1967), p. 1-30.

[4] R. ARIMA et S. MIZOHATA - Propriétés asymptotiques des valeurs propres des opérateurs elliptiques auto-adjoints, J. Math. Kyoto Univ., 4-1 (1964), p. 245-259.

[5] M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC - Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Arch. Rat. Mec. Anal., (à paraître).

[6] F. E. BROWDER - Le problème des vibrations pour un opérateur aux dérivées partielles self-adjoint et du type elliptique à coefficients variables, C. R. Acad. Sci. Paris, 236 (1953), p. 2140-2142.

[7] L. GÅRDING - The asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators, Math. Scand., I (1953), p. 237-255.

[8] C. GOULAOUIC - Séminaire Schwartz, 1968/1969.

[9] L. HÖRMANDER - The spectral function of an elliptic operator, (à paraître).

[10] J.-L. LIONS et E. MAGENES - Problèmes aux limites non homogènes, Dunod-Paris (1968).

[11] S. MINAKSHISUNDARAM - A generalization of Epstein zeta functions, Can. J. of Math., vol. 1, 4 (1949), p. 320-327.