PAUL-ANDRÉ MEYER

Démonstration probabiliste d'une identité de convolution

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 361, p. 245-259
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__245_0>

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n° 361 Juin 1969

DÉMONSTRATION PROBABILISTE D'UNE IDENTITÉ DE CONVOLUTION

(d'après H. KESTEN)

par Paul-André MEYER

J'expose ci-dessous une partie d'un article de KESTEN sur les points polaires des processus à accroissements indépendants dans $\underline{\underline{R}}^n$. Je suis de près, non pas l'article de KESTEN lui-même, mais un exposé sur ce sujet fait à Strasbourg par BRETAGNOLLE, qui a bien allégé la démonstration. Ma contribution propre dans tout ceci est nulle.

L'article de KESTEN est très intéressant, mais très technique, et ne saurait être exposé ici sans trop ennuyer les non probabilistes. La petite partie que j'expose n'est pas moins technique, mais je la présente en manière de défi. En effet, dans le cas particulier des processus à accroissements indépendants sur $\underline{\underline{R}}_+$, le théorème de KESTEN est équivalent à un résultat analytique d'énoncé simple, dont aucune autre démonstration n'est connue pour l'instant (bien qu'un certain nombre de bons analystes s'y soient essayés). Je crois pour ma part qu'il s'agit d'un résultat très profond, et que la découverte d'une méthode d'approche sans probabilités entraînerait des progrès considérables en "analyse fine" (*).

I. FORME ANALYTIQUE ET FORME PROBABILISTE.

On se place sur $\underline{\underline{R}}_+$, et on considère une fonction s , décroissante et continue à droite, telle que $s(0) = +\infty$, $s(+\infty) = 0$, localement sommable au voisinage de 0 . Le problème consiste à trouver une mesure positive w sur $\underline{\underline{R}}_+$ telle que

(1) $$\int_0^r s(r-u)w(du) = 1 \qquad \text{pour tout } r > 0 .$$

(*) Aux dernières nouvelles (Juillet 69), Lennart CARLESON vient de trouver une démonstration analytique.

On peut naturellement se poser le même problème lorsque $s(0)$ est fini, mais il admet alors une solution élémentaire simple. Voir CHUNG [1] : c'est CHUNG qui a posé le problème, et en a résolu les cas abordables.

La méthode naturelle d'attaque consiste à utiliser la transformation de Laplace : si nous posons $\hat{s}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}s(t)dt$, $\hat{w}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}w(dt)$, (1) s'écrit $\hat{w}(p) = 1/p\hat{s}(p)$. Il est facile de voir que le second membre est une fonction complètement monotone de p , d'où l'existence d'une mesure positive w satisfaisant à (1) presque partout. L'unicité d'une telle mesure est aussi facile à établir. C'est ici que les choses deviennent amusantes, car il est très difficile de franchir le pas entre "presque partout" et "partout". Le théorème de KESTEN que nous allons démontrer s'énonce tout simplement en disant que (1) est une identité.

Naturellement, le lemme de Fatou nous donne l'inégalité $\int_0^r s(r-u)w(du) \leq 1$ partout. Nous désignerons par $1-\eta(r)$ le premier membre. Nous allons maintenant donner une interprétation probabiliste de η . Soit λ la mesure sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $s(r) = \lambda(]r,\infty[)$; les hypothèses faites sur s entraînent que la fonction

$$g(p) = \int_0^\infty (1-e^{-px})\lambda(dx)$$

est partout finie. D'après un théorème bien connu de LEVY, il existe alors un semi-groupe de convolution (μ_t) sur $\mathbb{R}_+$ donné par la formule suivante, où le ^ désigne toujours la transformation de Laplace :

$$\hat{\mu}_t(p) = e^{-tg(p)} .$$

Il est alors facile de démontrer, par transformation de Laplace, que w est la mesure potentiel du semi-groupe

$$w = \int_0^\infty \mu_t \, dt \quad , \quad \hat{w}(p) = \frac{1}{g(p)} .$$

Construisons maintenant sur un espace probabilisé (Ω,P) le processus (X_t), issu de 0, markovien, admettant (μ_t) comme semi-groupe de transition. Nous pouvons supposer que toutes les trajectoires du processus (X_t) sont des fonctions croissantes et continues à droite de t. Dans ces conditions, on peut montrer (voir par ex. un exposé dans le séminaire de Strasbourg de l'an dernier) que

> pour tout $r > 0$, $\eta(r)$ est la probabilité pour que le processus (X_t) rencontre le point r.

Et nous obtenons ainsi la forme probabiliste du théorème de KESTEN : ce théorème exprime que les points de $\mathbb{R}_+$ sont tous polaires pour ces processus. C'est exclusivement sur cette forme probabiliste que nous allons travailler maintenant.

II. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE KESTEN.

Les petits lemmes initiaux.

LEMME 1.- *La loi* μ_t *est diffuse pour tout* $t > 0$. *La mesure* w *est diffuse.*

C'est une propriété générale des processus à accroissements indépendants à mesure de LEVY non bornée. Nous ne la démontrerons pas ici.

En voici une conséquence importante pour la suite :

DÉFINITION.- *Soient* $t > 0$, *et* $q \in]0,1[$; *nous posons*

$$d_t(q) \;=\; \inf\{\, u : \mu_t[0,u] \geq q \,\}$$

(on écrira aussi $d(t,q)$: pour $q = \frac{1}{2}$, c'est la médiane de μ_t). D'après le lemme 1, on a $\mu_t[0,d_t(q)] = q$.

LEMME 2.- $\dfrac{X_t}{t} \to 0$ *en probabilité lorsque* $t \to 0$.

Il suffit de montrer que $E[\exp(-\frac{X_t}{t})] \to 1$, ou que $-\log E[\ldots] \to 0$, ou enfin que $tg(\frac{1}{t}) \to 0$. Mais cela vaut $t\int(1.-e^{-x/t})\lambda(dx) \leq t\int(\frac{x}{t})\wedge 1\ \lambda(dx) = \int x\wedge t\ \lambda(dx)$. On applique le th. de Lebesgue.

CONSÉQUENCE.- Pour tout $q \in]0,1[$ fixé, $\frac{d(t,q)}{t} \to 0$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $P\{\frac{X_t}{t} < \varepsilon\}$ voisin de 1 pour t petit, donc $d_t(q) \leq \varepsilon t$.

LEMME 3.- $P\{\text{rencontrer } [d_t(q),d_t(q')]\} \geq q' - q$ si $0 < q < q' < 1$.

En effet, la probabilité au premier membre majore $P\{X_t \in [d_t(q),d_t(q')]\} = q' - q$ (lemme 1).

Le lemme suivant, composé de petits sous-lemmes relatifs au potentiel w , est vraiment essentiel pour la suite ! Il est très facile.

LEMME 4.- a) $w[0,d_t(q)] \geq qt$;

b) $w[s,s+d_t(q)] \geq qt\pi(s)$ pour tout s ;

c) $w[0,d_t(q)] \leq \frac{t}{1-q}$;

d) $w[s,s+d_t(q)] \leq \frac{pt}{1-q}$, où $p = P\{\text{rencontrer } [s,s+d_t(q)]\}$;

e) pour tout $d \geq 0$, $w[s,s+d] \leq w[0,d]$.

DÉMONSTRATION.- e) est le principe du maximum : le potentiel de l'intervalle $[s,s+d]$ atteint son maximum en un point de l'intervalle, et il est clair (les trajectoires étant croissantes) que ce point est le point s . La valeur du potentiel de $[s,s+d]$ au point s est $w[0,d]$.

a) est évident : on a $X_t \leq d_t(q)$ sur un ensemble de probabilité q , donc le temps S passé dans $[0,d_t(q)]$ dépasse t sur un ensemble de probabilité q , et $E[S] = w[0,d_t(q)]$ dépasse qt ; b) découle aussitôt de a) et de la propriété de Markov forte, appliquée au temps de rencontre de $\{r\}$.

Pour établir c), on remarque que $E[S] = w[0,d_t(q)]$ est majoré par $\sum_n tP\{S \geq nt\}$; or pour qu'on ait $S \geq nt$, il faut que tous les pas entre les instants 0 et t , t et $2t$ ... $(n-1)t$ et nt aient été $\leq d_t(q)$, donc $P\{S \geq nt\} \leq q^n$, d'où aussitôt c). On en déduit d) en appliquant la propriété de Markov forte au temps d'entrée dans $[s, s + d_t(q)]$.

Enfin, il reste un dernier lemme, qui n'est pas exactement un "petit lemme initial" : c'est une des clés de la démonstration.

LEMME 5.- <u>Soit</u> $r > 0$; <u>soit une suite d'intervalles</u> $J_n = [a_n, b_n]$ <u>de</u> $\underline{\underline{R}}_+$, <u>possédant les propriétés suivantes</u>

$$\lim_n b_n = 0$$

$$P\{\text{rencontrer } J_n\} \geq c > 0 \quad \underline{\text{pour tout}}\ n .$$

<u>Il existe alors une suite de points</u> s_n , <u>telle que</u>

$$s_n \in J_n \qquad \underline{\text{pour tout}}\ n$$

$$\liminf_n \eta(r - s_n) \geq \eta(r) .$$

DÉMONSTRATION.- Supposons le contraire : il existe alors une suite (J'_n) extraite de (J_n) , telle que

$$\limsup_n \sup_{x \in J'_n} \eta(r-x) < \eta(r) .$$

Quitte à supprimer quelques termes au début, on peut supposer que

$$\sup_{x \in \bigcup_n J'_n} \eta(r-x) < \eta(r) .$$

Or la fonction égale à $\eta(r-x)$ pour $x < r$, à 0 pour $x \geq r$, probabilité de rencontre de r en partant de x , est <u>excessive</u>. La relation précédente entraîne donc que $\bigcup_n J'_n$ est <u>effilé</u> en 0 . Or ceci est absurde : en effet, la probabilité de rencontrer cet ensemble avant de rencontrer $[s,\infty[$ est au moins c , quel que soit $s > 0$. D'autre part, comme λ est non bornée, le temps de rencontre de $[s,\infty[$ tend vers 0 avec s (les trajectoires du processus (X_t) quittent aussitôt 0). Donc la probabilité de rencontrer immédiatement $\bigcup_n J'_n$ en partant de 0 est au moins c , elle est égale à 1 , et l'ensemble n'est pas effilé en 0 .

Nous aurons besoin, à la fin de la démonstration, de la variante suivante : supposons que J_n , au lieu d'être l'intervalle $[a_n,b_n]$ qui se rapproche de 0 , soit une réunion d'intervalles $J_1^n,\dots,J_{k_n}^n$ tous contenus dans $[a_n,b_n]$, et tels que $P\{\text{rencontrer } J_i^n\} \geq c$ pour tout n et tout $i \leq k_n$. Alors on peut trouver dans chaque J_i^n un point s_i^n , de telle sorte que

$$\lim_n \inf \inf_{1 \leq i \leq k_n} \eta(r - s_i^n) \geq \eta(r) .$$

C'est une conséquence immédiate du lemme 5 (raisonner par l'absurde).

Démonstration du théorème de KESTEN dans le "cas facile".

Nous dirons que nous sommes dans le cas facile si :

quels que soient q , q' tels que $0 < q < q' < 1$, le rapport

$$\frac{d(t,q')}{d(t,q)} \to +\infty , \quad t \to 0 .$$

Nous sommes dans le cas difficile, par conséquent, s'il existe deux nombres q et q' $(0 < q < q' < 1)$ et une suite t_i tendant vers 0 , tels que

$$\lim_i \frac{d(t_i,q')}{d(t_i,q)} = a < +\infty .$$

Pour démontrer le théorème dans le cas facile, donnons-nous un entier N , posons $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{2}$, et intercalons entre p et q des nombres :

$$p < p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \dots < p_N < q_N < q .$$

Prenons aussi une suite t_i quelconque, décroissant vers 0 , et pour tout i

considérons les N intervalles

$$J_1^i = [d(t_i,p_1),d_{t_i}(q_1)] \;\ldots\; J_N^i = [d(t_i,p_N),d(t_i,q_N)] \;.$$

Nous avons $P\{\text{rencontrer } J_k^i\} \geq \inf_j (q_j - p_j) > 0$, quels que soient i et k . Donc, d'après le lemme 5 (ou sa variante, qui est triviale dans ce cas du fait qu'on a un nombre fixe d'intervalles à chaque fois), nous pouvons trouver, pour i assez grand, et $k = 1,\ldots,N$

$$s_k^i \in [d(t_i,p_k),d(t_i,q_k)] \quad \text{tel que} \quad \eta(r - s_k^i) \geq (1 - \varepsilon)\eta(r) \;.$$

Considérons maintenant les N intervalles, situés à gauche de r :

$$I_1^i = [r - s_1^i \,,\, r - s_1^i + d(t_i,p)] \;\ldots\; I_N^i = [r - s_N^i \,,\, r - s_N^i + d(t_i,p)] \;.$$

Je dis que pour i assez grand ces intervalles sont tous disjoints, et contenus dans $[r - d(t_i,q),r]$. Ce dernier point est évident, car ils sont tous contenus dans $[r - d(t_i,q_N) \,,\, r - d(t_i,p_1) + d(t_i,p)]$. Pour vérifier qu'ils sont disjoints, il suffit de montrer que

$$r - d(t_i,p_{k+1}) + d(t_i,p) \leq r - d(t_i,q_k) \quad \text{pour tout } k$$

si i est assez grand : or c'est clair, car $d(t_i,q_k) + d(t_i,p)$ est beaucoup plus petit que $d(t_i,p_{k+1})$ pour i grand, puisqu'on est dans le cas facile.

Ecrivons alors que $w[r - d(t_i,q),r]$ majore $\sum_k w[r - s_k^i \,,\, r - s_k^i + d(t_i,p)]$. Le premier nombre est au plus égal à $t_i/(1 - q) = 2t_i$ (lemme 4, d)). Chacun des termes de la somme vaut au moins $(1 - \varepsilon)\eta(r)t_i p = \frac{1 - \varepsilon}{4}\eta(r)t_i$, (lemme 4, b)), et il y a N termes, donc

$$2t_i \;\geq\; \frac{1 - \varepsilon}{4}\eta(r)Nt_i \;.$$

Divisons par t_i , remarquons que N est arbitraire, il vient que $\eta(r) = 0$. La démonstration est achevée dans le cas facile.

Nous allons maintenant nous placer dans le cas difficile, supposer que $\eta(r) \neq 0$, et en tirer une laborieuse contradiction.

Préparation au cas difficile.

Nous supposons donc que $\frac{d(t_i,q')}{d(t_i,q)} \to a < +\infty$. Nous désignerons par c un nombre (fini) $> a$.

Posons $Y_{t_i} = \frac{X_{t_i}}{d_{t_i}(q)}$ et désignons par ν_i la loi de Y_{t_i} . Quitte à remplacer la suite (t_i) par une suite extraite, nous pouvons supposer que

la suite (ν_i) converge vaguement vers une mesure ν (a priori, ν peut avoir une masse ≤ 1).

Nous allons montrer en fait que ν a une masse égale à 1 , et même une moyenne finie.

a) Soit $a < c' < c$. Pour i assez grand, on a

$$\nu_i[1,c'] = P\{X_{t_i} \leq c'd_{t_i}(q')\} - P\{X_{t_i} < d_{t_i}(q)\} \geq q' - q$$

donc, à la limite, $\nu[1,c'] \geq q' - q$. Le support de ν contient un point $x \in [1,c']$, donc le support de la puissance de convolution ν^{*k} contient kx . Tout intervalle de longueur c contenant un point kx dans son intérieur, nous voyons que :

pour tout intervalle $[x,x+c]$, il existe $k>0$ tel que $\nu^{*k}]x,x+c[= a_x > 0$.

Mais alors, pour tout i assez grand nous avons $\nu_i^{*k}]x,x+c[\geq \frac{1}{2} a_x$, ou encore $P\{X_{kt_i} \in]xd(t_i,q),(x + c)d(t_i,q)[\} \geq \frac{1}{2} a_x$. A fortiori

pour tout x , on a pour tout i assez grand

$$P\{\text{rencontrer } [xd(t_i,q),(x + c)d(t_i,q)]\} \geq \tfrac{1}{2} a_x > 0 .$$

D'après le lemme 5, dès que i est assez grand, nous pouvons trouver un $s \in [xd(t_i,q),(x + c)d(t_i,q)]$, tel que $\eta(r - s) \geq (1 - \varepsilon)\eta(r)$.

b) Fixons un entier N, et désignons par k un entier qui varie de 0 à $N-1$. Considérons les N intervalles J_k^i

$$J_0^i = [0, cd(t_i,q)] \quad , \quad J_1^i = [2cd(t_i,q), 3cd(t_i,q)]$$
$$J_{N-1}^i = [2(N-1)cd(t_i,q), (2N-1)cd(t_i,q)] \; .$$

Nous prenons dans chacun d'eux un point s_k^i tel que $\eta(r-s_k^i) \geq (1-\varepsilon)\eta(r)$, (lemme 5) et nous regardons les N intervalles

$$I_k^i = [r-s_k^i \; , \; r-s_k^i + d(t_i,q)] \; .$$

Comme $c > 1$, ces intervalles sont tous disjoints, et contenus dans l'intervalle $[r-(2N-1)cd(t_i,q) \, , \, r + cd(t_i,q)] = I^i$. Ecrivons que $w(I^i) \geq \sum_k w(I_k^i)$:

$$w[0,2Ncd(t_i,q)] \geq w(I^i) \geq \Sigma\, w(I_k^i) \geq N(1-\varepsilon)\eta(r)qt_i \quad (\text{ i assez grand})$$

ou encore

$$\liminf_i \frac{w[0,2Ncd(t_i,q)]}{t_i} \geq NA \qquad (\; A = (1-\varepsilon)q\eta(r) > 0 \;)$$

ceci pour tout N. Désignons par w^{ν} la mesure potentiel $\sum_0^{\infty} \nu^{*k}$, de même la mesure potentiel w^{ν_i}. Le processus $\frac{X_t}{d(t_i,q)}$ passe un temps moyen $\geq NAt_i$ dans l'intervalle $[0,2Nc]$, et le processus $\frac{X_{tt_i}}{d(t_i,q)}$ un temps moyen $\geq NA$, pour tout i assez grand. Comme $t_i \to 0$, la marche aléatoire $\frac{X_{kt_i}}{d(t_i,q)}$ y passe presque le même temps moyen, si i est assez grand, et donc

$$\liminf_i w^{\nu_i}[0,2Nc] \geq NA \qquad \text{pour tout } N$$

et par conséquent, par convergence vague

$$w^{\nu}[0,2Nc] \geq NA \qquad \text{pour tout } N \, .$$

Or on sait (théorème facile du renouvellement au sens de Cesaro) que si ν a une masse < 1, $w^{\nu}[0,n] = o(n)$: donc ν a une masse égale à 1. De plus, par le même théorème, $w^{\nu}[0,n]/n$ tend vers $1/K \int_0^{\infty} x\nu(dx)$, où K est la période : il en résulte aussitôt que ν a une moyenne finie.

c) Je dis maintenant qu'il existe des nombres s_i tendant vers 0 , et des constantes $A_i > 0$, tels que X_{s_i}/A_i converge en p. vers 1 . En effet, soient $Z_1,\dots,Z_n$ des variables aléatoires indépendantes de la loi ν , et soit θ leur espérance commune. D'après la loi faible des grands nombres, la variable aléatoire $\frac{Z_1+\dots+Z_n}{\theta n}$ est très proche de 1 en probabilité. D'autre part, si $i \to \infty$, $\frac{X_{t_i}}{d(t_i,q)}$ est très proche de Z_1 en loi. Comme on a affaire à un processus à accroissements indépendants, on voit que pour i grand $\frac{X_{nt_i}}{\theta n d(t_i,q)}$ est très proche de 1 en p. . C'est alors un jeu de construire pour tout n un i_n assez grand pour que : nt_{i_n} tende vers 0 en décroissant, $\frac{X_{nt_{i_n}}}{\theta n d(t_{i_n},q)}$ tende vers 1 en p. . Il ne reste plus qu'à poser $s_n = nt_{i_n}$, $A_n = n\theta d(t_{i_n},q)$.

d) Mais alors il est immédiat de vérifier que le rapport $\frac{d(s_i,q)}{A_i} \to 1$ pour tout $q \in]0,1[$. Autrement dit, nous sommes arrivés à remplacer notre suite initiale t_i par une nouvelle suite s_i , de telle sorte que

(3) si $0 < q < q' < 1$ $\quad \frac{d(s_i,q')}{d(s_i,q)} \to 1$

et $\frac{X_{s_i}}{d(s_i,q)} \to 1$ en p. (pour tout $q \in]0,1[$).

e) Ecrivons cette dernière convergence (en loi vers ε_1) au moyen des transformées de Laplace : il vient

$$\text{pour tout } p , \qquad \exp[-s_i g(\frac{p}{d_{s_i}(q)})] \to e^{-p} \quad ;$$

en élevant cela à l'exposant t , il vient d'abord que

(4) $$\frac{X_{ts_i}}{d(s_i,q)} \to t \quad \text{en loi (ou en p.) quel que soit } t > 0 .$$

De toute suite qui converge en probabilité, on peut extraire une suite qui converge p.s.. Quitte à remplacer la suite (s_i) par une suite extraite au moyen du procédé diagonal, nous pouvons donc supposer que

$$(4') \qquad \text{pour presque tout } \omega\,, \quad \frac{X_{ts_i}(\omega)}{d(s_i,q)} \to t \quad \text{pour tout } t \text{ rationnel} \,;$$

mais il s'agit de fonctions croissantes, et la fonction limite est continue : il y a donc en fait convergence pour tout t réel.

De plus, il est bon de se rappeler que <u>si des fonctions croissantes convergent simplement vers une fonction croissante continue</u>, <u>elles convergent uniformément sur tout compact</u>.

En particulier, écrivons que sur l'intervalle $[0,K]$, la fonction $t \mapsto X_{ts_i}/d(s_i,q)$ n'a plus de sauts d'amplitude 1 pour i assez grand : il vient que sur $[0,Ks_i]$ $X_.$ n'a plus de saut d'amplitude $d(s_i,q)$. La trajectoire rencontre alors tout intervalle $[x\,,\,x+d(s_i,q)]$. Comme $d(s_i,q)/s_i \to 0$, quitte à remplacer K par un nombre un peu plus grand, on obtient le résultat suivant

$$(5) \qquad \text{pour tout } K \quad \inf_{0\le x\le Ks_i} P\{\text{rencontrer } [x\,,\,x+d(s_i,q)]\} \underset{i\to\infty}{\to} 1 \,.$$

f) Enfin, introduisons la mesure w_i définie par

$$(6) \qquad \frac{w[0\,,\,xd(s_i,q)]}{s_i} = w_i[0,x] \,.$$

Sa transformée de Laplace est $\dfrac{1}{s_i g(\frac{p}{d(s_i,q)})}$ qui tend vers $\frac{1}{p}$, comme on l'a vu plus haut. Ainsi

$$(6') \qquad w_i[0,x] \to x$$

(convergence vague vers une mesure diffuse). Ici encore, il s'agit de fonctions croissantes, et la convergence est donc uniforme sur tout compact.

Nous passons maintenant à la démonstration proprement dite. DÉSORMAIS, NOUS PRENDRONS $q = \frac{1}{2}$, NOUS ÉCRIRONS À NOUVEAU t_i AU LIEU DE s_i , ET NOUS POSERONS $d(t_i,\frac{1}{2}) = d_i$.

Démonstration de la partie difficile.

Nous aurons besoin d'un petit théorème combinatoire, bien connu sous le nom de théorème de SCHNIRELMANN : Soit C un ensemble d'entiers, contenant 0 . Appelons densité de SCHNIRELMANN (densité simplement, pour la suite) de C sur $[0,n]$ le nombre

$$\inf_{1 \leq m \leq n} \frac{\mathrm{Card}(C \cap [0,m])}{m} .$$

Le théorème dit alors que si C a une densité sur $[0,n]$ au moins égale à a , D une densité au moins b , alors $C + D$ a une densité $\geq 1-(1-a)(1-b)$ sur $[0,n]$.

Il ne s'agit pas du tout d'un résultat difficile ! Pour la démonstration, voir HALBERSTAM et ROTH, Sequences, page 3.

On passe à la démonstration proprement dite :

a) On fixe un nombre $B > 1$: B sera choisi plutôt grand. p est un entier lié à B par la relation

$$1 - (1 - \frac{1}{8B})^p \geq \frac{1}{2} \quad ;$$

si B est grand, p peut être pris voisin de $8B/\log 2$.

b) Nous regardons la fonction continue de x

$$g_i(x) = \frac{w(0,xBd_i)}{t_i}$$

et nous désignons par x_i la plus petite racine ≥ 1 de l'équation $g_i(x) = x$. Comme $g_i(x)$ converge uniformément vers $Bx > x$ sur tout intervalle $[1,K]$ (formule (6')), x_i sort de tout intervalle compact lorsque $i \to \infty$ (si elle existe !). Mais d'autre part, soit $h > 0$ arbitrairement petit : pour $x = h/t_i$ on a

$$g_i(x) = \frac{w(0, hB\frac{d_i}{t_i})}{t_i} \leq \frac{h}{t_i} = x \qquad \text{pour } i \text{ assez grand ;}$$

donc il y a bien une racine entre 1 et h/t_i pour i assez grand. Comme h est arbitrairement petit, nous avons établi les trois propriétés suivantes :

$$(7) \qquad \frac{w(0, x_i B d_i)}{t_i} = x_i \quad ; \quad x_i \to \infty \quad ; \quad x_i t_i \to 0 \ .$$

c) Nous désignons par $[\![u]\!]$ la partie entière de $u \in \mathbb{R}_+$. Posons

$$J_k^i = [k d_i \, , (k+1) d_i] \qquad p_k^i = P\{\text{rencontrer } J_k^i\}$$

$$D^i = \{k : p_k^i \geq \frac{1}{8B}\} \ .$$

LEMME.- <u>La densité de</u> D^i <u>sur</u> $[0 \, , [\![x_i B]\!]]$ <u>est au moins</u> $\frac{1}{8B}$.

DÉMONSTRATION.- Soit m un entier $\leq x_i B$. Nous avons

$$x_i t_i = w[0, x_i B d_i] \leq \sum_{j=0}^{[\![x_i B/m]\!]} w[jmd_i, (j+1)md_i]$$

$$\leq \left(\frac{x_i B}{m} + 1\right) w[0, md_i] \leq \frac{2x_i B}{m} w[0, md_i]$$

(lemme 4, e)). Ainsi

$$w[0, md_i] \geq \frac{mt_i}{2B} \ .$$

Soit $C = D^i \cap [0,m]$, et soit c son cardinal. On a $w(I_k^i) \leq p_k^i . 2t_i$ (lemme 4, d)) donc le premier membre est majoré par

$$m.2t_i . \frac{1}{8B} + c.2t_i.1$$

(le premier terme majore la contribution des $k \notin C^i$, le second celle des $k \in C^i$). Il en résulte aussitôt $2c \geq \frac{1}{4B}$, et le résultat.

d) Appliquons maintenant le "théorème de SCHNIRELMANN" : si nous posons $E^i = D^i + D^i + \dots + D^i$ (p fois), la densité de E^i sur $[0, [x_iB]]$ est au moins $1 - (1 - \frac{1}{8B})^p \geq \frac{1}{2}$. Donc (pour i assez grand)

<u>la moitié au moins des entiers</u> $k \leq [x_iB]$ <u>s'écrivent sous la forme</u> $k = k_1 + \dots + k_p \quad (k_j \in D^i)$.

Mais dans ces conditions il est très facile de vérifier (récurrence sur p) que

$$P\{\text{rencontrer } [kd_i, (k+p)d_i]\} \geq p^i_{k_1} p^i_{k_2} \cdots p^i_{k_p} \geq \left(\frac{1}{8B}\right)^p .$$

Il existe donc au moins un des entiers $j = k, k+1 \dots k+p-1$ tels que

$$P\{\text{rencontrer } [jd_i, (j+1)d_i]\} \geq \frac{1}{p}\left(\frac{1}{8B}\right)^p .$$

Mais nous avons vu que, lorsque $i \to \infty$

$$\inf_{0 \leq x \leq pd_i} P\{\text{rencontrer } [x, x+d_i]\} \to 1 \qquad \text{(formule (5))}$$

ainsi, une trajectoire qui rencontre $[jd_i, (j+1)d_i]$ a une probabilité très voisine de 1 de rencontrer $[(k+p-1)d_i, (k+p)d_i]$, dès que i est assez grand. D'où finalement le résultat suivant :

<u>Pour la moitié au moins des entiers</u> $k \leq [x_iB]$. <u>la probabilité de rencontrer</u> $[(k+p-1)d_i, (k+p)d_i]$ <u>est supérieure à</u> $\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{8B}\right)^p$, <u>dès que</u> i <u>est assez grand</u>.

Nous savons que p est borné par KB , où K est une certaine constante. Il existe donc au plus KB intervalles, parmi ceux énumérés ci-dessus, qui sortent de $[0, x_iBd_i]$: mais $x_i \to \infty$, donc KB est négligeable devant x_iB . Nous pouvons donc récrire l'énoncé :

<u>Pour au moins</u> $x_iB/3$ <u>entiers</u> k <u>tels que</u> $1 < k < [x_iB]$, <u>la probabilité de rencontrer</u> $[kd_i, (k+1)d_i]$ <u>est au moins</u> $(8B)^{-p}/2p$.

Nous omettrons encore un intervalle sur deux, de manière à avoir des entiers non consécutifs : nous aurons ainsi un système de $x_i B/6$ intervalles J_j^i non consécutifs, avec $j > 1$, $j < x_i B - 1$, et tels que $p_j^i \geq (8B)^{-p}/2p$. D'après le lemme 5, nous pouvons trouver dans chacun d'eux un s_j^i tel que $\eta(r - s_j^i) \geq (1 - \epsilon)\eta(r)$.

Considérons alors les intervalles

$$I_j^i = [r - s_j^i , r - s_j^i + d_i]$$

il y en a au moins $x_i B/6$, ils sont tous contenus dans $I = [r - x_i Bd_i , r]$, et ils sont tous disjoints. On a donc

$$x_i t_i = w[0, x_i Bd_i] \geq w(I) \geq \sum_j w(I_j^i) \geq \frac{x_i B}{6} \cdot (1 - \epsilon)\eta(r) \cdot \tfrac{1}{2} t_i$$

ou encore

$$1 \geq \frac{1 - \epsilon}{12} \eta(r) B .$$

Cela entraîne $\eta(r) = 0$, car B est arbitraire. La démonstration est achevée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. L. CHUNG - Sur une équation de convolution, C. R. Acad. Sci. 260 (1965), p. 4665-4667 et p. 6794-6796.

[2] H. KESTEN - Hitting probabilities of Single Points for Processes with Stationary Independent Increments, (à paraître).