

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

J. G. M. MARS

Les nombres de Tamagawa de groupes semi-simples

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 351, p. 79-94

http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__79_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES NOMBRES DE TAMAGAWA DE GROUPEs SEMI-SIMPLES

par J. G. M. MARS

1. Notations.

Dans cet exposé k sera un corps de nombres algébriques. On désignera par k_v les complétés de k et par A l'anneau des adèles de k . On choisit une fois pour toutes un caractère χ de A tel que le bicaractère $\chi(xy)$ de $A \times A$ mette A en dualité avec lui-même de telle sorte que le sous-groupe discret k de A se corresponde à lui-même dans cette dualité. Les caractères χ_v de k_v sont définis par

$$\chi(x) = \prod_v \chi_v(x_v) \quad \text{si } x = (x_v) \in A.$$

Si V est une variété algébrique définie sur k , les ensembles $V_v = V_{k_v}$ et V_A des points de V à valeurs dans k_v resp. A sont munis des topologies induites par la topologie de k_v resp. A ; ce sont des espaces localement compacts. Si V est une variété sans point multiple, si ω est une jauge sur V (c'est-à-dire une forme différentielle de degré maximal sur V , rationnelle sur k , partout régulière et $\neq 0$) et si λ est un système de facteurs de convergence pour V , on note $|\lambda\omega|_A$ la mesure de Tamagawa sur V_A déterminée par ω et λ . Cette mesure coïncide, sur les ensembles de la forme

$$\prod_{v \in S} V_v \times \prod_{v \notin S} V_v^0,$$

avec le produit des mesures locales $\lambda_v |\omega|_v$ dès que S est assez grand; S désigne, bien entendu, un ensemble fini de places de k contenant toutes les places à l'infini et V_v^0 est l'ensemble des points "à coordonnées entières" dans V_v (pour

les détails : voir [5], [6], [7], en particulier [7], paragraphes 3 et 4).

Si G est un groupe algébrique affine défini sur k sans caractère rationnel, le nombre de Tamagawa de G est, par définition, le volume de G_A/G_k pour la mesure de Tamagawa déterminée par une jauge invariante sur G et les facteurs de convergence 1 ; on le note $\tau(G)$. Plus généralement, supposons seulement que G n'admette pas de caractères rationnels définis sur k ; on note $\tau_\lambda(G)$ le volume de G_A/G_k pour la mesure de Tamagawa déterminée par une jauge invariante sur G et un système de facteurs de convergence λ . On sait que $\tau_\lambda(G)$ est fini.

2. Résultats.

On va énoncer, par ordre logique plutôt que historique, les résultats connus jusqu'à présent sur les nombres de Tamagawa des groupes semi-simples.

Tout d'abord on a le théorème d'Ono [4] qui donne le rapport du nombre de Tamagawa d'un groupe semi-simple G et de celui de son recouvrement universel \tilde{G} :

$$\frac{\tau(G)}{\tau(\tilde{G})} = \frac{h^0(\hat{F})}{i^1(\hat{F})}$$

où F est le noyau de l'homomorphisme $\tilde{G} \rightarrow G$,

$$\hat{F} = \text{Hom}(F, \underline{G}_m),$$

$$h^0(\hat{F}) = \text{Card}(H^0(k, \hat{F})),$$

$$i^1(\hat{F}) = \text{Card}(\text{Ker}(H^1(k, \hat{F}) \rightarrow \prod_v H^1(k_v, \hat{F}))).$$

Grâce à ce théorème, on connaîtra le nombre de Tamagawa de tout groupe semi-simple dès qu'on le connaît pour au moins un groupe dans chaque classe d'isogénie (sur k).

Conjecture (Weil). Le nombre de Tamagawa de tout groupe semi-simple simplement connexe est 1 .

Par les travaux de Tamagawa, Weil [7] et [5], Mars [à paraître], $\tau(G)$ est connu pour les groupes classiques ; Demazure ([5], Appendice) a déterminé $\tau(G)$ pour les groupes de type G_2 et Mars [2] pour les groupes de type F_4 et pour certains groupes de type E_6 . De plus, Langlands a calculé le volume du domaine fondamental pour les groupes déployés sur k , ce qui donne le nombre de Tamagawa de ces groupes [1]. Il reste donc à déterminer $\tau(G)$ pour les groupes des types 3D_4 , 6D_4 , E_7 , E_8 et les groupes non traités de type E_6 . Il est probable qu'on peut faire cela en utilisant la méthode de [2], sauf pour E_8 , pourvu qu'on ait le courage de faire les calculs ; comme, en tout cas, on n'atteint pas E_8 , il vaut mieux chercher une méthode générale... Bien entendu, ce sont les travaux classiques de Siegel sur les formes quadratiques qui sont à l'origine de la théorie.

3. L'intégrale $I(\Phi)$.

Soit G un groupe algébrique linéaire défini sur k n'admettant pas de caractères rationnels définis sur k . Soit (ρ, X) une représentation rationnelle de G définie sur k . On considère l'intégrale

$$I(\Phi) = \int_{G_A/G_k} \sum_{\xi \in X_k} \Phi(\rho(g)\xi) d\nu(g)$$

où $d\nu(g)$ est la mesure de Haar sur G_A normée par la condition $\int_{G_A/G_k} d\nu(g) = 1$,

et où Φ est une fonction sur X_A . On a le critère suivant pour la convergence de $I(\Phi)$ ([7], lemme 5).

Soient T un tore déployé sur k maximal de G et P un sous-groupe parabolique défini sur k minimal de G contenant T . On désigne par T_A^+ l'ensemble des $t \in T_A$ tels que $|\alpha(t)| \leq 1$ pour toute racine positive α . Pour tout caractère λ de T , soit m_λ sa multiplicité en tant que poids de ρ , et soit Δ_P le mo-

dule de P . L'intégrale $I(\hat{\Phi})$ est absolument convergente pour toute fonction $\hat{\Phi}$ de Schwartz-Bruhat sur X_A si l'intégrale

$$\int_{T_A^+/T_k} \prod_{\lambda} \sup(1, |\lambda(t)|^{-m_\lambda}) |\Delta_P(t)|^{-1} dt$$

est convergente ; et quand il en est ainsi, I est une mesure positive tempérée sur X_A .

Cela se démontre facilement à l'aide de la théorie de la réduction.

Remarquons que $I(\hat{\Phi})$ ne change pas quand on remplace $\hat{\Phi}(x)$ par :

- 1) $\hat{\Phi}(\alpha x)$ avec $\alpha \in GL(X)_k$ commutant aux $\rho(g)$ ($g \in G$) ;
- 2) $\hat{\Phi}(x)\chi(f(x))$ où f est une fonction régulière sur X définie sur k et invariante par G ;
- 3) $\hat{\Phi}(x)$ pourvu que la représentation (ρ^*, X^*) de G dans le dual de X soit équivalente à (ρ, X) . On choisit alors un k -isomorphisme $\gamma : X \rightarrow X^*$ tel que $\gamma\rho(g) = \rho^*(g)\gamma$ et l'on pose $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}^* \circ \gamma$ où $\hat{\Phi}^*$ est la fonction sur X_A^* transformée de Fourier de $\hat{\Phi}$;
- 4) $\hat{\Phi}(\rho(g)x)$ avec $g \in G_A$.

LEMME.- Soit G un groupe algébrique défini sur k et soit H un sous-groupe k -fermé de G . On suppose G et H unimodulaires. Soit f l'application canonique de G sur $U = G/H$. Supposons que $f(G_A)$ soit ouvert dans U_A . Alors G , H , U admettent des systèmes de facteurs de convergence λ , μ , ν respectivement avec $\lambda = \mu\nu$. De plus, si dg , dh sont des jauges invariantes sur G , H et si $du = dg/dh$ est la jauge invariante par G sur U qui s'en déduit, on a

$$|\lambda dg|_A = |\nu du|_A |\mu dh|_A.$$

Démonstration. L'espace $f(G_A)$ s'identifie à G_A/H_A et $f(G_v)$ s'identifie à G_v/H_v . Comme $f(G_A)$ est ouvert dans U_A , $f(G_v)$ est ouvert dans U_v pour tout v et $f(G_v^0) = U_v^0$ pour presque tout v . On sait que $G_v \rightarrow U_v$ admet, localement, des sections analytiques. Cela implique que $|dg|_v = |du|_v |dh|_v$ et le lemme résulte immédiatement de là.

Dans la situation du début de ce paragraphe, soit ξ_0 un point de X_k et soit H le stabilisateur de ξ_0 dans G ; H est un sous-groupe k -fermé de G . L'application $g \mapsto \rho(g)\xi_0$ de G dans X définit par passage au quotient un k -isomorphisme de G/H sur l'orbite U de ξ_0 . Supposons que H soit unimodulaire et que $\rho(G_A)\xi_0$ soit ouvert dans U_A . D'après le lemme précédent, on peut choisir des systèmes de facteurs de convergence λ, μ, ν pour G, H, U tels que $\lambda = \mu\nu$. Soient $dg, dh, du = dg/dh$ des jauges invariantes. On a, d'après le même lemme et le théorème de Fubini,

$$\int_{G_A/G_k} \sum_{\rho(G_k)\xi_0} \Phi(\rho(g)\xi) |\lambda dg|_A = \tau_{\mu}(H) \int_{\rho(G_A)\xi_0} \Phi |\nu du|_A,$$

si Φ est positive et intégrable sur $\rho(G_A)\xi_0$.

4. Le groupe linéaire spécial et groupe symplectique.

Dans ce paragraphe G désigne soit le groupe linéaire spécial $SL(m, D)$ soit le groupe symplectique $Sp(m, D)$; dans le premier cas, D_k est un corps de centre k , $m \geq 2$ si D est commutatif, $m \geq 1$ sinon, et dans le second cas, $D_k = k$, m est pair, $m \geq 2$. On considère la représentation de G dans $X = D^m$.

Si $m \geq 2$, G possède une orbite ouverte U dans X . Choisissons $\xi_0 \in U_k$, par exemple $\xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Le stabilisateur H de ξ_0 dans G est produit semi-direct de $SL(m-1, D)$ resp. $Sp(m-2, D)$ et d'un groupe unipotent;

H est unipotent si D est commutatif et $m = 2$. Comme la fibration de G par H est localement triviale, on a $G_A \xi_0 = U_A$.

L'intégrale $I(\Phi)$ converge pour tout Φ de Schwartz-Bruhat. D'après le paragraphe 3 on a donc, puisque $X_k = U_k \cup \{0\}$,

$$(1) \quad I(\Phi) = \tau(H)\tau(G)^{-1} \int_{U_A} \Phi |du|_A + \Phi(0).$$

Soit dx une jauge sur X . Alors du est, à un facteur dans k^* près, identique à la restriction de dx à U . Comme, de plus, X et U ont le même système de facteurs de convergence, à savoir 1, la mesure $|du|_A$ sur U_A est la restriction à U_A de la mesure $|dx|_A$ sur X_A et le complémentaire $X_A - U_A$ de U_A est de mesure nulle ([5], lemme 3.4.1). Par conséquent

$$(2) \quad \int_{U_A} \Phi |du|_A = \int_{X_A} \Phi |dx|_A = \hat{\Phi}(0)$$

où $\hat{\Phi}$ désigne la fonction sur X_A définie par

$$\hat{\Phi}(y) = \int_{X_A} \Phi(x) \chi(\text{trd}({}^t yx)) |dx|_A.$$

On voit tout de suite, en appliquant la formule de Poisson à la somme qui figure dans la définition de $I(\Phi)$, qu'on a

$$(3) \quad I(\Phi) = I(\hat{\Phi})$$

pour toute fonction Φ de Schwartz-Bruhat sur X_A . Les formules (1), (2), (3) donnent alors

$$\tau(G) = \tau(H).$$

On en conclut, par récurrence sur m et observant que le nombre de Tamagawa d'un groupe unipotent est 1, qu'on a $\tau(G) = 1$ si D est commutatif. Si D n'est pas commutatif on trouve seulement $\tau(\text{SL}(m, D)) = \tau(\text{SL}(1, D))$ pour tout m . D'autre part, on démontre à l'aide de la fonction- ζ de D_k qu'on a $\tau(\text{SL}(1, D)) = 1$ (voir [5], Th. 3.1.1 (iii), qu'on applique deux fois : une fois à k et une fois à D_k). On a donc $\tau(G) = 1$ pour tous les groupes G considérés dans ce paragraphe.

5. Les autres groupes classiques.

On désigne par G un groupe de l'un des types suivants :

- a) le groupe orthogonal spécial d'une forme quadratique sur k ;
- b) le groupe unitaire spécial d'une forme antihermitienne sur un corps de quaternions sur k , par rapport à l'involution usuelle ;
- c) le groupe unitaire d'une forme hermitienne sur un corps de quaternions sur k , par rapport à l'involution usuelle ;
- d) le groupe unitaire spécial d'une forme hermitienne sur un corps muni d'une involution de 2ème espèce.

Dans tous ces cas, on a une forme F sur un espace $X = D^m$ et G est le sous-groupe de $GL_D(X)$ formé des transformations qui laissent F invariante et dont la norme réduite est 1 . La forme F est toujours supposée être non dégénérée. Dans le cas (a) on a $D_k = k$, dans les cas (b) et (c) D_k est un corps de quaternions de centre k , et dans le cas (d) D_k est un corps dont le centre ℓ est une extension quadratique de k et D_k est muni d'une involution qui induit sur ℓ le k -automorphisme non trivial. F a ses valeurs dans un espace affine I tel que $I_k = k$ dans les cas (a) et (c), $I_k = D_k^-$ resp. D_k^+ dans les cas (b) resp. (d) (où D_k^+ est l'ensemble des invariants de l'involution donnée et D_k^- l'ensemble des éléments qui sont transformés en leur opposé par l'involution). Le groupe G est semi-simple dans les cas suivants :

(a) $m \geq 3$ (b) $m \geq 2$ (c) $m \geq 1$ (d) $m \geq 2$ si D est commutatif, $m \geq 1$ sinon.

Convenons de dire que $x \in D^m$ est de rang maximal si l'on a $M_m(D)x = D^m$. Soit, pour tout $i \in I$, $U(i)$ le sous-ensemble de X formé des points x de rang maximal tels que $F(x) = i$. Dans les cas (a), (b), (c) les $U(i)$ sont des orbites de

G , et si $i \in I_K$, où K est une extension quelconque de k , $U(i)_K$ est soit vide soit une orbite de G_K : cela résulte du théorème de Witt. C'est encore vrai dans le cas (d) si l'on remplace G par le groupe réductif Γ des transformations (de norme quelconque) qui laissent F invariante. Dans tous les cas, si $\xi_i \in U(i)_K$ et si $H(i)$ est le stabilisateur de ξ_i dans G , $H(i)$ est un groupe du même type que G avec $m - 1$ au lieu de m si $i \neq 0$, et $H(0)$ est produit semi-direct d'un groupe du même type que G avec $m - 2$ au lieu de m et d'un groupe unipotent.

L'intégrale $I(\Phi)$ est absolument convergente pour tout Φ dans les conditions suivantes :

- (a) $m \geq 5$ ou $m = 4$, F d'indice ≤ 1 ou $m = 3$, F d'indice 0
- (b) $m \geq 3$ ou $m = 2$, F d'indice 0
- (c) $m \geq 1$
- (d) $m \geq 3$ ou F d'indice 0 .

Considérons d'abord les cas (a), (b), (c). Il résulte de ce qu'on a dit plus haut que la fibration de G par $H(i)$ est localement triviale ; par conséquent, on a $G_A \xi_i = U(i)_A$ et, en appliquant les résultats du paragraphe 3,

$$\int_{G_A/G_K} \sum_{U(i)_K} \Phi(g\xi) |dg|_A = \tau(H(i)) \int_{U(i)_A} \Phi |du|_A.$$

Cette formule est donc valable pour tout $i \in I_K$ tel que $U(i)_K$ soit non vide. En sommant sur i on obtient

$$(4) \quad I(\Phi) = \sum_{i \in I_K} c_i \int_{U(i)_A} \Phi |du|_A + \Phi(0),$$

où $c_i = \tau(H(i))\tau(G)^{-1}$ si $U(i)_K$ est non vide,

$c_i = 0$ si $U(i)_K$ est vide et $U(i)_A$ non vide,

$c_i =$ arbitraire si $U(i)_A$ est vide.

On va maintenant appliquer les propositions 1 et 2 de [7].

PROPOSITION 1.- Soient X et Y des groupes abéliens localement compacts, munis de mesures de Haar dx et dy respectivement. On note Y^* le dual de Y et dy^* la duale de dy . Soit F une application continue de X dans Y satisfaisant à la condition suivante :

(A) quelle que soit la fonction Φ de Schwartz-Bruhat sur X , la fonction F_Φ^* définie par

$$(5) \quad F_\Phi^*(y^*) = \int_X \Phi(x) \langle F(x), y^* \rangle dx$$

est intégrable sur Y^* , et l'intégrale $\int |F_\Phi^*| dy^*$ converge uniformément sur toute partie compacte de l'espace $S(X)$ de Schwartz-Bruhat.

Alors on peut, d'une manière et d'une seule, faire correspondre à tout $y \in Y$ une mesure positive μ_y sur X , de support contenu dans $F^{-1}(y)$, de telle sorte que, pour toute fonction Φ continue à support compact sur X , la fonction F_Φ sur Y définie par $F_\Phi(y) = \int \Phi d\mu_y$ soit continue et satisfasse à $\int F_\Phi dy = \int \Phi dx$. De plus, les μ_y sont des mesures tempérées ; et, pour tout $\Phi \in S(X)$, F_Φ est continu, appartient à $L^1(G)$, satisfait à $\int F_\Phi dy = \int \Phi dx$ et est la transformée de Fourier de F_Φ^* .

PROPOSITION 2.- Soient Y un groupe abélien localement compact, Δ un sous-groupe discret de Y tel que Y/Δ soit compact, et Δ_* le sous-groupe discret de Y^* qui correspond par dualité à Δ . Soient X un groupe abélien localement compact et F une application continue de X dans Y satisfaisant à la condition suivante :

(B) quels que soient $\Phi \in S(X)$ et $y^* \in Y^*$, la série

$$\sum_{\delta^* \in \Delta_*} |F_\Phi^*(y^* + \delta^*)|$$

est convergente et elle l'est uniformément sur toute partie compacte de $S(X) \times Y^*$.

Alors F satisfait à la condition (A) de la proposition 1. De plus, si F_{Φ} désigne de nouveau la transformée de Fourier de la fonction F_{Φ}^* définie par (5), on a, pour toute fonction $\Phi \in S(X)$,

$$\sum_{\delta \in \Delta} F_{\Phi}(\delta) = \sum_{\delta^* \in \Delta^*} F_{\Phi}^*(\delta^*) ,$$

les séries des deux membres étant absolument convergentes.

On applique d'abord la proposition 1 à l'application $F : X_V \rightarrow I_V$. Soit I^* le dual de I et posons

$$F_{\Phi}^*(i^*) = \int_{X_V} \Phi(x) \chi_V([F(x), i^*]) |dx|_V \quad (i^* \in I_V^*) .$$

La condition (A) de la proposition 1 est satisfaite dans les cas suivants :

$$(a) \quad m \geq 3 \quad (b) \quad m \geq 2 \quad (c) \quad m \geq 1 \quad (d) \quad m \geq 2 .$$

On a alors une famille de mesures μ_i sur X_V de support contenu dans $F^{-1}(i)$ telle que

$$(6) \quad \int_{X_V} \Phi |dx|_V = \int_{I_V} |di|_V \int_{X_V} \Phi(x) d\mu_i(x) .$$

Utilisant la propriété d'unicité des μ_i on déduit aussitôt de la relation (6) qu'on a

$$d\mu_{\bar{a}ia} (gxa) = |g|_{X_V} |a|_{X_V} |a|_{I_V}^{-1} d\mu_i(x)$$

pour $g \in G_V$, $a \in D_V^*$ ($|a|_{I_V}$ désigne le module de la transformation $i \mapsto \bar{a}ia$ de I_V , $|a|_{X_V}$ celui de la transformation $x \mapsto xa$ de X_V). En particulier, si $\bar{a}ia = i$:

$$(7) \quad d\mu_i(gxa) = |g|_{X_V} |a|_{X_V} |a|_{I_V}^{-1} d\mu_i(x) .$$

Soit A_i le groupe des éléments a de D_V^* tels que $\bar{a}ia = i$. Alors $F^{-1}(i)$ est réunion d'un nombre fini d'orbites de $G_V \times A_i$; par conséquent, la mesure μ_i s'écrit comme somme de mesures respectivement portées par ces orbites et satisfaisant toutes à la même relation (7) que μ_i . Or, un calcul des modules des sous-groupes de stabilité de $G_V \times A_i$ montre que la seule orbite qui puisse porter une telle mesure est $U(i)$.

D'autre part, si X' est l'ensemble des points de X où l'application $F : X \rightarrow I$ est submersive, on sait qu'il existe une jauge θ_i sur $X' \cap F^{-1}(i)$ telle que $\theta_i(x)$ coïncide au voisinage de chaque point x_0 de $X' \cap F^{-1}(i)$ avec la forme induite sur $X' \cap F^{-1}(i)$ par n'importe quelle forme différentielle $\eta(x)$ dans X satisfaisant au voisinage de x_0 à la relation $dx = \eta(x) \wedge dF(x)$. Notation :

$$(8) \quad \theta_i(x) = \left(\frac{dx}{dF(x)} \right)_i .$$

Quand on prend k_V comme corps de base, ces jauges θ_i sont définies pour tout $i \in I_V$, et on a

$$\int_{X'_V} \Phi |dx|_V = \int_{I_V} |di|_V \int_{X'_V \cap F^{-1}(i)} \Phi |\theta_i|_V$$

pour Φ continue à support compact dans X'_V . Comme $U(i) \subset X'$, on déduit de cette remarque et du fait que μ_i est portée par $U(i)$ que μ_i coïncide avec la mesure $|\theta_i|_V$ sur $U(i)_V$ ($i \in I_V$).

Considérons maintenant l'application adélique $F : X_A \rightarrow I_A$. On veut lui appliquer les propositions 1 et 2. On pose

$$(9) \quad F_{\Phi}^*(i^*) = \int_{X_A} \Phi(x) \chi([F(x), i^*]) |dx|_A \quad (i^* \in I_A^*) .$$

La condition (B) de la proposition 2 est satisfaite dans les cas suivants :

$$(a) \quad m \geq 5 \quad (b) \quad m \geq 4 \quad (c) \quad m \geq 2 \quad (d) \quad m \geq 3 .$$

Prenons pour Φ une fonction de la forme $\Phi(x) = \prod \Phi_v(x_v)$ ($x = (x_v) \in X_A$), où Φ_v est une fonction de Schwartz-Bruhat sur X_v pour tout v , et où, pour presque tout v , Φ_v est la fonction caractéristique de X_v^0 . On a évidemment

$$F_{\Phi}^*(i^*) = \prod_v F_{\Phi_v}^*(i_v^*) \quad \text{pour } i^* = (i_v^*) \in I_A^* ,$$

d'où l'on déduit facilement que la transformée de Fourier F_{Φ} de F_{Φ}^* est le produit des transformées de Fourier F_{Φ_v} des $F_{\Phi_v}^*$. Mais, d'après la proposition 1, on a

$$F_{\Phi}(i) = \int \Phi(x) d\mu_i(x) \quad (i \in I_A)$$

où les μ_i sont des mesures sur X_A . Cela montre que μ_i est le produit des mesures $|\theta_{i_v}|_v$, si $i = (i_v) \in I_A$. Comme 1 est un système de facteurs de convergence pour $U(i)$, on voit que $\mu_i = |\theta_i|_A$ si $i \in I_k$. On obtient donc le résultat suivant.

PROPOSITION.- Soit F_{Φ}^* la fonction sur I_A^* définie par (9) et soit F_{Φ} sa transformée de Fourier. Alors, on a

$$(10) \quad F_{\Phi}(i) = \int_{U(i)_A} \Phi |\theta_i|_A \quad (i \in I_k)$$

où θ_i est la jauge sur $U(i)$ définie par (8). De plus, on a, pour toute fonction Φ de Schwartz-Bruhat sur X_A ,

$$(11) \quad \sum_{i \in I_k} F_{\Phi}(i) = \sum_{i^* \in I_k^*} F_{\Phi}^*(i^*) ,$$

les séries des deux membres étant absolument convergentes.

DÉFINITION.-

$$E(\Phi) = \sum_{i^* \in I_k^*} F_{\Phi}^*(i^*) + \Phi(0) \quad (\Phi \in S(X_A)) .$$

E est une mesure tempérée positive sur X_A possédant les propriétés d'invariance

qu'on va énoncer. Tout d'abord, il est clair que $E(\Phi)$ ne change pas quand on remplace $\Phi(x)$ par :

- 1) $\Phi(\alpha x)$ avec $\alpha \in k^*$;
- 2) $\Phi(x)\chi([F(x), i^*])$ avec $i^* \in I_k^*$.

Ensuite, on a

- 3) $E(\Phi) = E(\hat{\Phi})$ où $\hat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de Φ (on identifie X avec son dual au moyen de F). Pour le voir, on identifie I^* à I au moyen de la forme bilinéaire $\text{trd}(xy)$ sur $D \times D$. On a alors, pour $i \in I_k$, $i \neq 0$,

$$\int_{X_A} \Phi(x) \chi([F(x), i]) |dx|_A = \int_{X_A} \hat{\Phi}(x) \chi([F(x), -i^{-1}]) |dx|_A$$

ce qui entraîne évidemment l'invariance de E par transformation de Fourier.

- 4) $E(\Phi)$ ne change pas quand $\Phi(x)$ est remplacé par $\Phi(gx)$, $g \in G_A$.

THÉORÈME.— Soit E' une mesure tempérée positive sur X_A possédant les propriétés d'invariance énoncées ci-dessus et telle que $E' - E$ soit somme de mesures portées par les $U(i)_A$ pour $i \in I_k$. Alors on a $E' = E$.

C'est un cas particulier du théorème 4 de [7]. On ne reproduira pas la démonstration ici. Elle repose essentiellement sur une estimation de $E''(\Phi_t)$, où $E'' = E' - E$ et où $\Phi_t(x) = \Phi(tx)$ ($x \in X_A$, $t \in A^\times =$ groupe des idèles de k).

Le théorème entraîne la formule de Siegel-Weil :

$$E = I .$$

COROLLAIRE 1 (Principe de Hasse).— Si $U(i)_k$ est vide, $U(i)_A$ est vide.

COROLLAIRE 2 (Nombres de Tamagawa).— On a $\tau(H(i)) = \tau(G)$ pour tout $i \in I_k$ tel que $U(i)_k$ soit non vide.

Ces corollaires résultent immédiatement de la formule de Siegel-Weil lorsqu'on compare la définition de $E(\Phi)$ avec la formule (4) pour $I(\Phi)$ tenant compte des relations (10) et (11) et observant que θ_i et du ne diffèrent que par un facteur dans k^* (puisque'elles sont toutes les deux invariante par G), qu'on a donc

$$|\theta_i|_A = |du|_A .$$

La même méthode s'applique dans le cas (d) quand on prend, au lieu de G , le groupe réductif Γ (qui a un système λ de facteurs de convergence $\neq 1$) et elle donne des résultats analogues.

La formule de Siegel-Weil est alors valable dans les conditions suivantes :

$$(a) \quad m \geq 5 \quad (b) \quad m \geq 4 \quad (c) \quad m \geq 2 \quad (d) \quad m \geq 3 .$$

On en conclut, dans le cas (c), que $\tau(G) = 1$ pour $m \geq 1$, dans les cas (a) et (b) que $\tau(G)$ est indépendant de F et de m ($m \geq 3$ dans le cas (a), $m \geq 2$ dans le cas (b)). Les isomorphismes canoniques pour $m = 3$ dans le cas (a) et pour $m = 2$ dans le cas (b) permettent de déterminer $\tau(G)$ dans ces cas : $\tau(G) = 2$ pour tous les groupes G des types (a) et (b). Enfin, dans le cas (d), la formule de Siegel entraîne que $\tau_\lambda(\Gamma)$ est indépendant de F et de m ($m \geq 1$). Si D est commutatif, on a donc $\tau_\lambda(\Gamma) = \tau_\lambda(Z)$, où Z désigne le centre de Γ . Pour D non commutatif, j'ai démontré qu'on a $\tau_\lambda(\Gamma) = \tau_\lambda(Z)$ en étudiant la forme F en deux variables d'indice 1 (la démonstration est compliquée, parce que $I(\Phi)$ et $E(\Phi)$ sont, pour cette forme F , toutes les deux divergentes ; cf. [3]). On peut en déduire que $\tau(G) = 1$ pour tous les groupes G de type (d) en utilisant le principe de Hasse pour $H^1(k, G)$.

Il y a encore d'autres groupes classiques, à savoir les groupes de la forme $G = R_{K/k}(G')$ où K est une extension finie de k , où G' est un groupe classique de l'un des types considérés ici défini sur K , et où $R_{K/k}$ est l'opérateur de Weil

qui associe à une variété affine définie sur K une variété définie sur k (voir [5], Chap. I). On a $G_k = G'_K$ et $G_A = G'_A$, si A' désigne l'anneau des adèles de K , et le nombre de Tamagawa du k -groupe G est égal au nombre de Tamagawa du K -groupe G' .

6. Groupes exceptionnels.

Soit G le groupe des invariants de la forme cubique F d'une algèbre de Jordan simple exceptionnelle. On définit $I(\Phi)$ comme au paragraphe 3. La définition de $E(\Phi)$ est analogue à celle donnée, au paragraphe 5, pour les groupes classiques, mais il y a plus d'une orbite singulière, et par conséquent, il faut ajouter quelques termes supplémentaires correspondant aux orbites singulières. Dans la formule (9), $\chi([F(x), i^*])$ est maintenant un caractère cubique, dont je ne connais pas la transformée de Fourier. On peut, pourtant, démontrer la formule $E = I$ en estimant explicitement $E(\Phi_t)$ (sans démontrer de théorème d'unicité). Comme parmi les sous-groupes de stabilité figurent tous les groupes de type F_4 et certains groupes classiques, la relation $E = I$ donne le nombre de Tamagawa de G et celui des groupes de type F_4 .

L'étude des autres groupes exceptionnels est laissée au lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. P. LANGLANDS - The volume of the fundamental domain for some arithmetical subgroups of Chevalley groups. Proc. Symp. Pure Math., vol. IX, A. M. S. (1966), 143-148.
- [2] J. G. M. MARS - Les nombres de Tamagawa de certains groupes exceptionnels. Bull. Soc. Math. France, 94 (1966), 97-140.

- [3] J. G. M. MARS - Solution d'un problème posé par A. Weil. C. R. Acad. Sc. Paris, 266 (1968), 484-486.
- [4] T. ONO - On the relative theory of Tamagawa numbers. Ann. of Math., 82 (1965), 88-111.
- [5] A. WEIL - Adèles and algebraic groups. Institute for Advanced Study, Princeton (1961).
- [6] A. WEIL - Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. Acta Math., 111 (1964), 143-211.
- [7] A. WEIL - Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques. Acta Math., 113 (1965), 1-87.

--:--:--