JEAN-PIERRE SCHREIBER

Nombres de Pisot et travaux d'Yves Meyer

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 379, p. 269-279

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__269_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 379 Mai-Juin 1970

NOMBRES DE PISOT ET TRAVAUX D'YVES MEYER

par Jean-Pierre SCHREIBER

Pour tout réel θ supérieur à 2 , l'ensemble E_θ des sommes $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \theta^{-k}$, où ε_k prend les valeurs 0 ou 1 , est un compact du type ensemble de Cantor. Ces ensembles ont été très étudiés en analyse de Fourier (cf. [1]), et on sait que la nature algébrique du nombre θ joue un rôle important dans certains problèmes : par exemple R. Salem et A. Zygmund ([9]) ont achevé de montrer, en 1955, qu'une condition nécessaire et suffisante pour que E_θ ne porte aucune mesure dont la transformée de Fourier s'annule à l'infini est que θ soit un nombre de Pisot (voir [1], chap. V et VI et [9]).

En 1956, Carl Herz a montré que, si $\theta = 3$, E_θ est un ensemble de synthèse spectrale, (cf.[10], p. 166). Le même résultat est vrai si θ est un nombre de Pisot. Pour le montrer, Yves Meyer a récemment introduit un type d'ensembles sur $\mathbf{R}$, les modèles, que nous allons décrire succintement.

§ 0. Quelques définitions et notations.

- Un nombre de Pisot (resp. de Pisot ou de Salem) est un entier algébrique réel, de module strictement supérieur à 1 et dont les conjugués sur $\mathbf{Q}$ sont de module strictement inférieur à 1 (resp. inférieur ou égal à 1).

- On désigne par $A(\mathbf{R})$ l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions intégrables sur $\mathbf{R}$, et on pose $\|f\|_{A(\mathbf{R})} = \|\hat{f}\|_{(L^1(\mathbf{R}))}$, où $\hat{f}$ désigne, comme toujours dans la suite, la transformée de Fourier de f. Pour un fermé E de $\mathbf{R}$, $A(E)$ est l'algèbre des restrictions à E des fonctions de $A(\mathbf{R})$, munie de la norme quotient.

- Une pseudo-mesure S est une distribution dont la transformée de Fourier $\hat{S}$ appartient à $L^{\infty}(\mathbf{R})$. On note $PM(E)$ l'espace des pseudo-mesures portées par le fermé E et $PM_o(E)$ l'espace des pseudo-mesures à support compact dans E. Selon un usage commode, on notera $\int f(t)\, d\, S(t)$ la valeur de la pseudo-mesure S appliquée à la fonction f de $A(\mathbf{R})$.

§ 1. La notion de modèle dans $\mathbf{R}$.

Soit n un entier supérieur à 1 et, dans le produit $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$, soit D un sous-groupe fermé isomorphe à $\mathbf{Z}^n$, dont la projection sur $\mathbf{R}$, $\pi(D)$, est dense dans $\mathbf{R}$ et dont la projection sur $\mathbf{R}^{n-1}$, $\pi'(D)$, est dense dans $\mathbf{R}^{n-1}$.

DÉFINITION.- Pour tout ensemble K relativement compact de $\mathbf{R}^{n-1}$, on désigne par Λ^K l'ensemble des projections $\pi(d)$, sur $\mathbf{R}$, des points d de D dont la projection $\pi'(d)$, sur $\mathbf{R}^{n-1}$, appartient à K.

Un ensemble tel que Λ^K, (défini par la donnée de n, D et K), s'appelle un modèle.

PROPOSITION 1 (simple exercice de topologie générale).- a) On a

$$\delta = \inf\{ |\lambda - \lambda'| \; ; \; \lambda \in \Lambda^K , \lambda' \in \Lambda^K , \lambda \neq \lambda' \} > 0 .$$

On dira que δ est le pas du modèle Λ^K.

b) Si K est d'intérieur non vide dans $\mathbf{R}^{n-1}$, il existe un réel $\ell > 0$, tel que $\Lambda^K + [0,\ell] = \mathbf{R}$. C'est-à-dire que Λ^K est alors relativement dense dans $\mathbf{R}$, au sens de Bohr.

Exemple.- Posons $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\tilde{\theta} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, et soit I un intervalle compact de $\mathbf{R}$. L'ensemble des réels de la forme $m + n\theta$, où m et n sont des entiers relatifs assujetis à la condition $m + n\tilde{\theta} \in I$ est un modèle.

Généralisons un peu cet exemple :

§ 2. Nombres de Pisot et modèles.

Soit θ un entier algébrique réel de degré n, soient $\theta_2, \dots, \theta_r$ ses conjugués réels et $\theta_{r+1}, \bar{\theta}_{r+1}, \dots, \theta_{r+s}, \bar{\theta}_{r+s}$, ses conjugués complexes, deux à deux complexes conjugués $(n = r + 2s)$. Pour tout entier $k \geq 0$, considérons les éléments δ_k de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$

$$\delta_k = (\theta^k, (\theta_2^k, \dots, \theta_r^k, \mathrm{Re}\, \theta_{r+1}^k, \mathrm{Im}\, \theta_{r+1}^k, \dots, \mathrm{Re}\, \theta_{r+s}^k, \mathrm{Im}\, \theta_{r+s}^k)) .$$

(Re z et Im z désignent les parties réelles et imaginaires de z.)

Les éléments $\delta_0, \dots, \delta_{n-1}$, forment un système de n vecteurs indépendants dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ et donc engendrent un groupe libre D isomorphe à $\mathbf{Z}^n$. On vérifie que les projections de D sur $\mathbf{R}$, $\pi(D)$, et de D sur $\mathbf{R}^{n-1}$, $\pi'(D)$, sont denses.

THÉORÈME 1.- a) Si θ est un nombre de Pisot ou de Salem ($|\theta| > 1$ et $|\theta_j| \leq 1$. pour $2 \leq j \leq r + s$), l'ensemble $\{\theta^k\}_{k \geq 0}$ est un modèle.

b) Si θ est un nombre de Pisot ($|\theta| > 1$ et $|\theta_j| < 1$ pour $2 \leq j \leq r + s$) , l'ensemble des sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, où ε_k vaut 0 ou 1, est un modèle.

Pour a), du fait que pour tout j, $2 \leq j \leq r + s$, les suites $\{\theta_j^k\}_{k \geq 0}$ satisfont la même relation de récurrence linéaire à coefficients entiers que la suite $\{\theta^k\}_{k \geq 0}$, on déduit que θ^k est la projection sur $\mathbf{R}$ du point δ_k. Or, la projection de δ_k sur $\mathbf{R}^{n-1}$ a toutes ses coordonnées inférieures ou égales à 1 en module, et donc est dans un compact fixe.

De même pour b), puisque si θ est de Pisot $\left|\sum_{k\geq 0} \varepsilon_k \theta_j^k\right| \leq \frac{1}{1-|\theta_j|}$.

§ 3. Une formule de Poisson avec reste et quelques conséquences.

La formule de Poisson dit que la mesure portée par $\mathbf{Z}$ et donnant la masse 1 à tout point de $\mathbf{Z}$ (mesure de Haar de $\mathbf{Z}$) a pour transformée de Fourier une mesure, qui lui est d'ailleurs proportionnelle. Nous allons voir que si Λ^K est un modèle et si m est la mesure portée par Λ^K et donnant à chaque point de Λ^K la masse 1 , on peut trouver (proposition 2) des mesures α petites en un certain sens (proposition 3), telles que $m + \alpha$ soit portée par un modèle et ait pour transformée de Fourier, (au sens des distributions tempérées), une mesure.

Soit V un voisinage compact de l'adhérence de K dans $\mathbf{R}^{n-1}$. Soit φ une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}^{n-1}$, à support dans V , valant 1 sur K . Soit enfin μ la mesure portée par $\pi(D)$ et définie par

$$\mu(\pi(d)) = \varphi(\pi'(d)) , \qquad \text{pour tout } d \text{ dans } D .$$

PROPOSITION 2 ([6], théorème 7, p. 29).- <u>La transformée de Fourier de</u> μ <u>est une mesure</u> $\hat{\mu}$, <u>qui vérifie la condition</u> :

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}} \int_n^{n+1} d\,|\hat{\mu}|(t) < \infty .$$

Remarquons d'abord que, dans le groupe $\hat{\mathbf{R}} \times \widehat{\mathbf{R}^{n-1}}$, dual de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ (et isomorphe à $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$), l'orthogonal de D ([9], déf. 2.2.1), $D^{\perp}$ vérifie les mêmes propriétés que D : isomorphe à $\mathbf{Z}^n$ et de projections denses. On sait, d'autre part, que la transformée de Fourier de la mesure de Haar, ν , de D est (à un facteur de normalisation près) la mesure de Haar de $D^{\perp}$; (si on veut, c'est la formule de Poisson pour D).

Désignant alors par $\widetilde{\varphi}$ la fonction définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ par $\widetilde{\varphi}(x,y) = \varphi(y)$, pour tout x de $\mathbf{R}$ et tout y de $\mathbf{R}^{n-1}$, on calcule aisément $\hat{\mu}$ à partir de la transformée de Fourier de $\widetilde{\varphi}.\nu$. C'est la décroissance rapide de $\hat{\varphi}$ qui donne la propriété $\sup_{n \in \mathbf{Z}} \int_n^{n+1} d|\hat{\mu}|(t) < \infty$.

En écrivant $\mu = m + \alpha$, on peut préciser en quel sens la mesure α peut être, en certains cas, considérée comme petite :

PROPOSITION 3.- Si K est un compact dont la frontière est de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^{n-1}$), à tout ε positif, on peut associer un voisinage V de K et une fonction φ (notations de la proposition 2) de manière que

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} d|\alpha|(t) < \varepsilon .$$

Ce raffinement résulte de ce qu'on peut majorer la densité supérieure d'un modèle Λ^U par une constante fois la mesure de Lebesgue de l'adhérence de U ([6], lemme, p. 31) :

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{\operatorname{card}\{[-T,T] \cap \Lambda^U\}}{T} \leq C \operatorname{mes} U .$$

On peut déduire de cette proposition des résultats concernant la répartition uniforme modulo a de certaines suites d'entiers ([6], [7]), dont nous ne citerons que le plus spectaculaire :

THÉORÈME 2 ([6], théorème 9, p. 35).- Si K est un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$, contenu dans $\mathbf{R}$, de dimension finie ou dénombrable sur $\mathbf{Q}$, il existe une suite d'entiers $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ telle que pour tout x réel les deux conditions suivantes soient équivalentes :

a) $(x\lambda_k)_{k\geq 1}$ est une suite équi-répartie modulo 1.

b) x n'appartient pas à K.

Voyons plutôt une application de la proposition 1 à l'analyse de Fourier.

DÉFINITION.- On appellera pas intérieur du modèle Λ^K , la borne supérieure des pas des modèles Λ^V , prise sur l'ensemble des voisinages compacts V de $\bar{K}$.

THÉORÈME 3.- Si Λ^K est un modèle et ℓ un nombre positif strictement inférieur au pas intérieur de Λ^K , il existe une constante C et une constante C' telles que si S est une pseudo-mesure à support compact dans $\Lambda^K + [0,\ell]$, la mesure T , portée par Λ^K et définie par $T(\{\lambda\}) = \int_{\lambda+[0,\ell]} d\,S(t)$ vérifie

1) $\|\hat{T}\|_\infty \leq C\|\hat{S}\|_\infty$;

2) $\forall\ \xi \in \mathbf{R}$, $|\hat{T}(\xi) - \hat{S}(\xi)| \leq C|\xi|\ \|\hat{S}\|_\infty$.

En effet, soit V un voisinage compact de l'adhérence de K tel que le pas de Λ^V soit strictement supérieur à ℓ : soit $\ell + 2a$ ce pas. Comme pour la proposition 2, on peut alors construire une mesure μ portée par Λ^V et donnant la masse 1 à chaque point de Λ^K . Soit aussi h une fonction indéfiniment dérivable réelle, à support dans $]-a,a+\ell[$, et valant 1 sur un voisinage de $[0,\ell]$.

On peut alors écrire $S = (h * \mu).S$, puisque $h * \mu$ vaut 1 sur un voisinage du support de S . Mais on peut aussi écrire, par définition de T :

$$T = (\check{h} * S).\mu \quad , \qquad\qquad \text{avec } \check{h}(x) = h(-x) .$$

On a donc, d'une part

$$\hat{T}(\xi) = \int (\bar{\hat{h}}.\hat{S})(\xi - t)d\hat{\mu}(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_n^{n+1} (\bar{\hat{h}}.\hat{S})(\xi - t)d\hat{\mu}(t) ,$$

d'où

$$|\hat{T}(\xi)| \leq \|\hat{S}\|_\infty \left(\sup_{n\in\mathbf{Z}} \int_n^{n+1} d|\hat{\mu}|(t)\right) \sum_{n\in\mathbf{Z}} \sup_{\xi-(n+1)\leq t\leq \xi-n} |\hat{h}(t)| ,$$

donc $|\hat{T}(\xi)| \leq C\,\|\hat{S}\|_\infty$ puisque $\hat{h}$ est à décroissance rapide.

D'autre part,

$$\hat{T}(\xi) - \hat{S}(\xi) = \int \hat{S}(\xi - t)(\bar{\hat{h}}(\xi - t) - \hat{h}(t))\, d\hat{\mu}(t) ,$$

soit

$$|\hat{T}(\xi) - \hat{S}(\xi)| \leq \|\hat{S}\|_\infty \left(\sup_{n \in \mathbf{Z}} \int_n^{n+1} d|\hat{\mu}|(t)\right) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \sup_{n \leq t \leq n+1} |\hat{h}(t-\xi) - \hat{h}(t)| ;$$

ce qui, du fait que $\hat{h}$ a une dérivée à décroissance rapide, est majoré par $C'|\xi|\,\|\hat{S}\|_\infty$.

Un énoncé dual du théorème 3 est le suivant :

THÉORÈME 4.- Λ^K , ℓ et C étant définis comme au théorème 3, à toute fonction f de $A(\mathbf{R})$, on peut associer une fonction $\tilde{f}$ de $A(\mathbf{R})$ telle que

1) si $\lambda \in \Lambda^k$ et $0 \leq x \leq \ell$, on ait $\tilde{f}(\lambda + x) = f(\lambda)$.
2) $\|\tilde{f}\|_{A(\mathbf{R})} \leq C\|f\|_{A(\mathbf{R})}$.

Cela peut se démontrer directement en posant $\tilde{f} = h * (f.\mu)$.

§ 4. Application à la synthèse spectrale.

THÉORÈME 5.- Soient θ un nombre de Pisot supérieur à 2 et E_θ l'ensemble des sommes infinies $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$ ($\varepsilon_k = 0$ ou 1) . Il existe une suite $(\underline{T}_p)_{p \geq 1}$ d'endomorphismes de $PM(E_\theta)$, et une constante C telles que

1) $\forall\, S \in PM(E_\theta)$, $\underline{T}_p(S)$ est une mesure à support fini.
2) $\|\widehat{\underline{T}_p(S)}\|_\infty \leq C\|\hat{S}\|_\infty$.
3) $\widehat{\underline{T}_p(S)} \xrightarrow[p \to \infty]{} \hat{S}$, uniformément sur tout compact.

Ce théorème donne pour E_θ une forme forte de la propriété de synthèse spectrale (voir les définitions dans [1], chap. IX).

Soient, pour tout $p \geq 1$, Λ_p l'ensemble des sommes $\sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k \theta^k$ et Λ la réunion des Λ_p . On a, pour tout p , $\theta^p E = \Lambda_p + E_\theta$. Le théorème 5 sera une conséquence du suivant :

THÉORÈME 6.- Soit $PM_o(\Lambda + E_\theta)$ l'espace des pseudo-mesures à support compact dans $\Lambda + E_\theta$. Il existe un ensemble fini F dans E_θ , des constantes C et C' et un endomorphisme $\underline{T}$ de $PM_o(\Lambda + E_\theta)$ tels que :

1) Si $S \in PM_o(\lambda + E_\theta)$, $\underline{T}(S)$ est une mesure portée par $\lambda + F$; $(\lambda \in \Lambda)$.
2) $\|\widehat{\underline{T}(S)}\|_\infty \le C\|\hat{S}\|_\infty$.
3) $|\widehat{\underline{T}(S)}(\xi) - \hat{S}(\xi)| \le C'\|\hat{S}\|_\infty |\xi|$.

Pour déduire le théorème 5 du théorème 6, appelons $\tau_p(S)$ l'image de la pseudo-mesure S par l'homothétie sur $\mathbb{R}$ de rapport θ^p ; autrement dit $\tau_p S(x) = S(\theta^{-p}x)$. Partant de l'endomorphisme $\underline{T}$ donné par le théorème 6 et posant $\underline{T}_p = \tau_p^{-1} \circ \underline{T} \circ \tau_p$, on vérifie (grâce à la condition 1) du théorème 6) que $\underline{T}_p$ est un endomorphisme de $PM(E_\theta)$. Les conditions 1), 2), 3) du théorème 5 sont alors des conséquences immédiates des conditions 1), 2), 3) du théorème 6.

Le théorème 6 utilise seulement le fait que si θ est un nombre de Pisot, Λ est un modèle. On peut d'ailleurs l'énoncer, tel quel, avec pour Λ un modèle quelconque et pour E_θ un compact quelconque de $\mathbb{R}$.

Donnons le schéma de la démonstration ([7]).

a) Dans le cas où le pas intérieur δ de Λ est strictement supérieur au diamètre ℓ de E_θ , on peut prendre pour F l'ensemble réduit à 0 et définir, pour tout S de $PM_o(\Lambda + E_\theta)$, $\underline{T}(S)$ comme la mesure portée par Λ et définie par $\underline{T}(S)(\{\lambda\}) = \int_{\lambda + E_\theta} d\,S(t)$. Le théorème 6 se réduit alors au théorème 3.

b) Dans le cas général, on se ramène au cas précédent en remplaçant le modèle Λ par des modèles Λ_i dont la réunion contient Λ et tels que chaque Λ_i ait un pas intérieur supérieur à ℓ . La technique de cette décomposition est assez délicate : il s'avère nécessaire de découper aussi E_θ en morceaux et d'introduire un ensemble fini F pour faire porter la mesure $\underline{T}(S)$ par $\Lambda + F$.

§ 5. Modèles et ensembles harmonieux.

Si G est un groupe localement compact abélien, on appelle caractère faible sur G un homomorphisme non nécessairement continu de G dans le groupe $\mathbf{T}$ des nombres complexes de module 1 . Pour bien distinguer, on appellera caractères forts les caractères continus.

DÉFINITION.- Un ensemble Λ de G est dit harmonieux si tout caractère faible de G est limite uniforme sur Λ de caractères forts ([5], chap. I).

On a alors le théorème :

THÉORÈME 7.- Tout modèle Λ^K de $\mathbf{R}$ est un ensemble harmonieux de $\mathbf{R}$.

La restriction à Λ^K d'un caractère faible sur $\mathbf{R}$ est déterminée par la donnée d'un caractère sur le groupe discret D , c'est-à-dire par un élément de $\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}}^{n-1}/D^\perp$ (voir notations au § 2). Le plongement canonique de $\hat{\mathbf{R}}^{n-1}$ dans $\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}}^{n-1}/D^\perp$ associe donc à tout élément de $\hat{\mathbf{R}}^{n-1}$ un caractère sur D . Soient $\varepsilon > 0$ et V_ε un voisinage de l'origine dans $\hat{\mathbf{R}}^{n-1}$ tel que si $\chi \in V_\varepsilon$ et si $y \in K$, on ait $|\langle\chi,y\rangle - 1| < \varepsilon$; ($\langle\chi,y\rangle$ est la valeur au point y du caractère χ sur $\mathbf{R}^{n-1}$). Comme $\hat{\mathbf{R}} \times V_\varepsilon$ recouvre $\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}}^{n-1}$ modulo $D^\perp$, tout élément de $\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}}^{n-1}$ est somme d'un élément de V_ε et d'un élément de $\hat{\mathbf{R}}$, modulo $D^\perp$. Donc tout caractère faible sur $\mathbf{R}$ est, sur Λ^K , somme d'un caractère fort et d'un caractère différent de l'unité de moins de ε sur Λ^K .

COROLLAIRE.- <u>Si</u> θ <u>est un nombre de Pisot ou de Salem</u>, <u>l'ensemble des puissances</u> $\{\theta^k\}_{k \geq 0}$ <u>est un ensemble harmonieux</u>.

Par une démonstration directe, on démontre la réciproque de ce corollaire.

THÉORÈME 8 ([2]).- <u>Si</u> θ <u>est un réel non nul</u>, <u>une condition nécessaire et suffisante pour que</u> $\{\theta^k\}_{k \geq 0}$ <u>soit harmonieux est que</u> θ <u>soit de Pisot ou de Salem</u>.

Pour plus de propriétés des ensembles harmonieux nous renvoyons à [5] et [6]. Citons seulement, pour conclure un résultat bien remarquable :

THÉORÈME 9.- <u>Tout ensemble harmonieux et relativement dense de</u> $\mathbb{R}$ (<u>au sens de Bohr</u>, cf. prop. 1, b)) <u>est contenu dans un modèle ou dans un sous-groupe discret de</u> $\mathbb{R}$ (voir [5], chap. I, ou [6]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. KAHANE et R. SALEM - Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann, Paris.

[2] Y. MEYER - Une caractérisation des nombres de Pisot, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 63-64, 8 janvier 1968.

[3] Y. MEYER - Problème de l'unicité et de la synthèse en analyse harmonique, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 275-276, 29 janvier 1968.

[4] Y. MEYER - Nombres de Pisot et analyse harmonique, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 267, p. 196-198.

[5] Y. MEYER - Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique, Studia Mathematica, XXXIV, 1970, p. 127-147.

[6] Y. MEYER - Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique, Cours Peccot 1969, Lecture Notes in Mathematics n° 117, Springer-Verlag, 1970.

[7] Y. MEYER - Nombres algébriques et analyse harmonique, Annales Sci. de l'E.N.S., t. 3 (1970), fasc.1, p. 75-110 ; fasc. 2, p. 235-246.

[8] R. SALEM - Algebraic numbers and Fourier analysis, Heath, 1963.

[9] R. SALEM et A. ZYGMUND - Sur un théorème de Piatetčki-Shapiro, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 240 (1955), p. 2040-2042 ; et Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant, loc. cit., p. 2281-2283.

[10] W. RUDIN - Fourier analysis on groups, Interscience publishers, New York-London, 1962.