PIERRE EYMARD

Algèbres A_p et convoluteurs de L^p

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 367, p. 55-72
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__55_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 367 Novembre 1969

ALGÈBRES A_p ET CONVOLUTEURS DE L^p

par Pierre EYMARD

Soit G un groupe localement compact, et soit $A(G)$ l'ensemble des fonctions $u = f * \check{g}$, où $f \in L^2(G)$, $g \in L^2(G)$. Si G est abélien, de groupe dual $\hat{G}$, il résulte du théorème de Plancherel que $A(G)$ est une <u>algèbre</u> pour le produit ordinaire des fonctions, celle des transformées de Fourier de fonctions de $L^1(\hat{G})$. Si G n'est pas abélien, on peut encore montrer, par des méthodes hilbertiennes, que $A(G)$ est une algèbre : elle est étudiée dans [3] sous le nom d'algèbre de Fourier du groupe G.

Que se passe-t-il si l'on remplace $L^2(G) * L^2(G)$ par $L^p(G) * L^q(G)$, où $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$? On ignore si on obtient encore ainsi une algèbre, voire un espace vectoriel. Mais Carl S. Herz a montré, par des techniques de produit tensoriel topologique, que l'ensemble $A_p(G)$ des fonctions :

(1) $$u = \sum_{k=1}^{\infty} f_k * \check{g}_k \ , \quad \text{où} \quad f_k \in L^p(G) \ , \ g_k \in L^q(G) \ , \ \sum_{k=1}^{\infty} \| f_k\|_p \, \| g_k\|_q < +\infty \ ,$$

est une <u>algèbre</u> pour le produit ordinaire des fonctions. Même pour $G = \mathbf{R}$, ce résultat est nouveau. Il ouvre la voie à des recherches inspirées de l'analyse harmonique : théorie des idéaux, synthèse harmonique, calcul symbolique, etc..., dans l'algèbre $A_p(G)$. D'autre part, par le biais de la dualité, $A_p(G)$ est liée aux convoluteurs de $L^p(G)$; on peut donc espérer que son étude éclairera la question des multiplicateurs de Fourier de L^p.

Nous décrirons ici les premiers résultats obtenus sur les $A_p(G)$, avec des indications succinctes sur les démonstrations. Les principaux d'entre eux, notamment ceux des paragraphes 3, 4 et 8.3, sont dûs à C. S. Herz, et non publiés actuellement. Aux paragraphes 6 et 7, le conférencier a généralisé des résultats connus quand $p = 2$. On consultera aussi [2] et [14]. A la fin de l'exposé, nous dresserons une liste de problèmes.

1. Notations.

G désigne un groupe localement compact et dx une mesure de Haar à gauche sur G. Pour $1 < p < +\infty$, on considère les espaces $L^p(G)$ relativement à dx ; on pose $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. L'espace $\mathcal{C}(G)$ est celui des fonctions complexes continues sur G ; $\mathcal{K}(G)$ l'espace de celles qui sont à support compact ; $\mathcal{C}_o(G)$ de celles qui tendent vers 0 à l'infini ; $\mathcal{M}^1(G)$ est l'ensemble des mesures de Radon bornées sur G. La masse-unité au point $a \in G$ est notée ε_a.

Si f est une fonction sur G, et si b, $x \in G$, on pose :

$$\check{f}(x) = f(x^{-1}) \quad ; \quad f_b(x) = f(xb) .$$

Le dual de l'espace de Banach produit tensoriel projectif $L^p(G) \hat{\otimes} L^q(G)$ s'identifie à l'espace de Banach $\mathcal{L}[L^q(G)]$ des opérateurs bornés sur $L^q(G)$, par la formule d'accouplement

$$\langle T , \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k , Tg_k)$$

si $T \in \mathcal{L}[L^q(G)]$ et $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \otimes g_k \in L^p \hat{\otimes} L^q$, où $f_k \in L^p$, $g_k \in L^q$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \| f_k \|_p \| g_k \|_q < \infty$. Sur $\mathcal{L}[L^q]$ nous appellerons "ultrafaible" la topologie faible de cette dualité.

2. Rappel sur les groupes aménables.

Pour l'énoncé de certains théorèmes, nous supposerons, le cas échéant, que le groupe localement compact G est aménable. Cela signifie (cf. par exemple [5], [12], [16]) qu'il possède les propriétés équivalentes qui suivent :

(i) G a la propriété du point fixe ;

(ii) il existe sur $L^{\infty}(G)$ une moyenne invariante ;

(iii) la représentation triviale de G est faiblement contenue, au sens de J. M. G. Fell, dans la représentation régulière gauche de G ;

(iv) pour tout compact $K \subset G$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact V de mesure > 0 tel que $\text{mes}(KV) \leq (1 + \varepsilon)\text{mes}(V)$.

Les groupes compacts, les groupes abéliens et, plus généralement, résolubles sont aménables. Les groupes discrets libres à $n \geq 2$ générateurs, les groupes de Lie connexes semi-simples non compacts ne sont pas aménables.

3. $A_p(G)$ est une algèbre.

3.1. L'espace vectoriel $A_p(G)$ défini au préambule est de Banach pour la norme

$$\|u\|_{A_p} = \inf_{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \|g_k\|_q \quad .$$

$A_p(G)$ n'est autre que l'image de $L^p(G) \hat{\otimes} L^q(G)$ par l'application P, de norme 1, définie par :

$$P\varphi(x) = \int_G \varphi(xz, z)dz \qquad (\varphi \in L^p \hat{\otimes} L^q, \ x \in G) .$$

On a $A_p \subset \mathscr{C}_o$ et $\|u\|_{A_p} \geq \|u\|_{\infty}$.

Si u est une fonction sur G, la fonction Mu est définie sur $G \times G$ par

$$Mu(x, y) = u(xy^{-1}) .$$

Des applications analogues à P et M ont été utilisées systématiquement par N. Th. Varopoulos dans [21].

DÉFINITION.- $B_p(G)$ (resp. $\underline{B}_p(G)$) est l'algèbre de Banach des fonctions continues bornées sur G qui sont des multiplicateurs de $A_p(G)$ (resp. telles que Mu soit un multiplicateur de $L^p \hat{\otimes} L^q(G)$), avec la norme d'opérateur de multiplication.

On a évidemment $\underline{B}_p \subset B_p$ et $\|u\|_{B_p} \leq \|u\|_{\underline{B}_p}$, à cause de l'identité :

$$P[M(u).\varphi] = u.P\varphi \qquad (u \in \underline{B}_p \ ; \ \varphi \in L^p \hat{\otimes} L^q) .$$

THÉORÈME 1.- Soit σ une représentation continue d'un groupe localement compact H dans un groupe localement compact G . Alors l'application $u \mapsto u \circ \sigma$ applique $A_p(G)$ dans $\underline{B}_p(H)$, en abaissant les normes.

Par linéarité et densité, on se ramène à voir que, si $f , g \in \mathcal{K}(G)$ et $j , k \in \mathcal{K}(H)$, $\psi = M[(f * \check{g}) \circ \sigma](j \otimes k) \in L^p \hat{\otimes} L^q(H)$, et $\|\psi\|_{L^p \hat{\otimes} L^q(H)} \leq \|f\|_{L^p(G)} \|g\|_{L^q(G)} \|j\|_{L^p(H)} \|k\|_{L^q(H)}$. Or on constate que ψ peut s'écrire sous forme d'intégrale à valeurs vectorielles

$$\psi = \int_G [(f_z \circ \sigma)j \otimes (g_z \circ \sigma)k]dz$$

où la fonction sous le signe somme, à valeurs dans $L^p \hat{\otimes} L^q(H)$, est continue et intégrable, car, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\int_G \|[(f_z \circ \sigma)j] \otimes [(g_z \circ \sigma)k]\|_{L^p \hat{\otimes} L^q(H)} dz \leq \int_G \|(f_z \circ \sigma)j\|_{L^p(H)} \|(g_z \circ \sigma)k\|_{L^q(H)} dz$$
$$\leq (\int_G \|(f_v \circ \sigma)j\|^p_{L^p(H)} dv)^{1/p} (\int_G \|(g_w \circ \sigma)k\|^q_{L^q(H)} dw)^{1/q}$$
$$= (\int_G \int_H |f(\sigma x . v)j(x)|^p \, dx \, dv)^{1/p} (\int_G \int_H |g(\sigma y . w)k(y)|^q \, dy \, dw)^{1/q}$$
$$= \|f\|_{L^p(G)} \|g\|_{L^q(G)} \|j\|_{L^p(H)} \|k\|_{L^q(H)} .$$

COROLLAIRE.- Soit G un groupe localement compact, et soit $1 < p < +\infty$. Alors $A_p(G)$ est une ALGÈBRE de Banach pour le produit ordinaire des fonctions.

Il suffit d'appliquer le théorème 1, avec $H = G$ en prenant pour σ la représentation identique, et d'utiliser l'inclusion $\underline{B}_p \subset B_p$.

Remarques.- 1) L'algèbre de Banach $A_2(G)$ coïncide avec l'algèbre de Fourier $A(G)$ étudiée dans [3].

2) Supposons G aménable. En s'appuyant sur 2 (iv), il est facile de voir qu'alors $u \mapsto u \circ \sigma$ se prolonge en une application de $B_p(G)$ dans $B_p(H)$. De plus, dans ce cas, on montre que les algèbres normées $\underline{B}_p(G)$ et $B_p(G)$ coïncident, et que l'application identique de $A_p(G)$ dans $B_p(G)$ est isométrique.

3) Supposons H aménable et σ propre. Alors on déduit de 2 (iv) que $u \mapsto u \circ \sigma$ applique $A_p(G)$ dans $A_p(H)$.

4) Soit à nouveau G quelconque, soit H un sous-groupe fermé de G , et prenons pour σ l'injection canonique de H dans G . Dans ce cas, on peut dire plus : l'application de restriction de $A_p(G)$ à H applique $A_p(G)$ sur $A_p(H)$. Pour la démonstration, on se ramène au cas où G est séparable et l'on utilise une section borélienne de G/H dans G .

3.2. Signalons encore la

PROPOSITION.- La boule-unité de $\underline{B}_p(G)$ est fermée dans l'espace $\mathcal{C}(G)$ muni de la topologie de la convergence compacte sur G .

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(L^q)$ engendré par les opérateurs T_{f_o,g_o} de rang 1 sur L^q définis par la formule

$$T_{f_o,g_o}(g) = [\int_G f_o(x)g(x)dx]g_o \qquad (f_o , g_o \in \mathcal{K}(G)) .$$

Le dual de l'espace normé E s'identifie à $L^p \hat{\otimes} L^q$, et, si $\varphi \in L^p \hat{\otimes} L^q$, on a :

(2) $$\langle \varphi , T_{f_o,g_o} \rangle = \iint_{G\times G} f_o(y)g_o(x)\varphi(x,y)dx\, dy .$$

La boule-unité K de $L^p \hat{\otimes} L^q$ est compacte pour la topologie τ faible de dualité avec E . Soient alors des $u_\alpha \in \underline{B}_p$, $\|u_\alpha\|_{\underline{B}_p} \leq 1$, qui tendent vers une fonction u pour la convergence compacte sur G . Soit $\varphi \in K$. Les Mu_α tendent vers Mu uniformément sur tout compact de $G \times G$, d'où l'on déduit, d'après (2), que $(Mu)\varphi$ est une τ-valeur d'adhérence dans K des $(Mu_\alpha)\varphi$.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> $u \in \mathcal{K}(G)$, <u>et soient des</u> $u_\alpha \in A_p(G)$, <u>telles que</u> $\|u_\alpha\|_{A_p} \leq 1$, <u>et qui tendent vers</u> u <u>pour la convergence compacte sur</u> G . <u>Alors</u> $u \in A_p(G)$.

4. <u>Le dual de l'espace de Banach</u> $A_p(G)$.

Notons $Cv_p(G)$ l'ensemble des <u>convoluteurs</u> de $L^p(G)$, i.e. des $T \in \mathcal{L}[L^p(G)]$ tels que, pour tous f , $g \in \mathcal{K}(G)$, on ait $T(f * g) = Tf * g$. Si $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$, on désignera par $\rho(\mu)$ le convoluteur $f \mapsto \mu * f$. On notera $PM_p(G)$ (PM pour "pseudo-mesures") l'adhérence ultrafaible dans $Cv_p(G)$ de l'ensemble des opérateurs $\rho(f)$, $f \in L^1(G)$.

THÉORÈME 2.- 1) <u>L'espace de Banach dual de</u> $A_p(G)$ <u>s'identifie à l'espace de Banach</u> $PM_q(G)$ <u>par la formule d'accouplement</u>

$$\langle T , u \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k , Tg_k) ,$$

<u>où</u> $T \in PM_q(G)$ <u>et où</u> $u \in A_p(G)$ <u>est donnée sous la forme</u> (1). <u>La topologie faible de dualité</u> $\sigma(A'_p , A_p)$ <u>se transporte alors en la topologie ultrafaible des opérateurs</u>. <u>De plus, si</u> $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$, <u>on a</u> $\langle \rho(\mu) , u \rangle = \int_G u(x)d\mu(x)$.

2) <u>Supposons</u> G <u>quelconque, mais</u> $p = 2$, <u>ou supposons</u> p <u>quelconque, mais</u> G

aménable. Alors on a $PM_p(G) = Cv_p(G)$ et, plus précisément, tout $T \in Cv_p(G)$ est limite ultrafaible d'opérateurs $\rho(f_i)$, où $f_i \in L^1(G)$ et où $\|\rho(f_i)\|_{Cv_p} \leq \|T\|_{Cv_p}$.

N'insistons pas sur le 1), facile à prouver (cf. par exemple [17]). Le cas $p = 2$ du 2) résulte du théorème de commutation et du théorème de densité de Kaplansky (cf. [3], p. 210). Donnons quelques détails sur le 2), pour p quelconque et G aménable.

Soit $h \in L^p(G)$. On dira que h est un élément "borné" de L^p, s'il existe une constante C_h telle que, pour tout $f \in \mathcal{K}(G)$, on ait $\|h * f\|_p \leq C_h \|f\|_p$. Alors h définit un convoluteur de L^p, que nous notons $\rho(h)$. Si $T \in Cv_p$, $T(h)$ est encore un élément "borné" de L^p, et $\rho(Th) = T \circ \rho(h)$.

Par des calculs analogues à la démonstration du théorème 1, on montre que, si h est "borné", et si f, g, j, k sont quatre fonctions mesurables bornées à support compact sur G, on a la formule :

$$(3) \qquad \langle \rho[(j * \check{k})h], f \otimes g \rangle = \langle \rho(h), [M(j * \check{k})](f \otimes g) \rangle .$$

Soit alors $T \in Cv_p(G)$. Suivant une idée due à Figa-Talamanca [4] dans le cas abélien, on va procéder à une double régularisation de T.

Premier pas : T est limite forte, donc ultrafaible, d'opérateurs $\rho(h_i)$, où les h_i sont des éléments "bornés" de L^p, et où $\|\rho(h_i)\|_{Cv_p} \leq \|T\|_{Cv_p}$.

Pour le voir, il suffit de prendre des $e_i \in \mathcal{K}(G)$ tels que $\|e_i\|_1 \leq 1$ et qui soient une approximation de l'unité dans L^p, puis de poser $h_i = T(e_i)$.

Second pas : On est ainsi ramené au cas où $T = \rho(h)$, h élément "borné" de L^p. Puisque G est aménable, d'après 2 (iv), pour tout compact $K \subset G$ et tout $\varepsilon > 0$, soit V un compact de mesure > 0 tel que $\operatorname{mes}(KV) \leq (1 + \varepsilon)^p \operatorname{mes}(V)$. Alors, si l'on pose :

$$u_{\varepsilon,K} = [(1+\varepsilon)\text{mes } V]^{-1}\ \chi_{KV} * \chi_V \ ,$$

où la notation χ est pour "fonction caractéristique", on a $\| u_{\varepsilon,K}\|_{A_p} = 1$. On déduit de (3) que, pour tout $\varphi \in L^p \hat{\otimes} L^q$,

$$\langle \rho(u_{\varepsilon,K}h) , \varphi\rangle = \langle \rho(h) , M(u_{\varepsilon,K})\varphi\rangle \ .$$

Il en résulte que les $\|\rho(u_{\varepsilon,K}h)\|_{Cv_p}$ restent bornés par $\|\rho(h)\|_{Cv_p}$, et, comme $u_{\varepsilon,K}h \in L^1(G)$, il reste à voir que $\lim\limits_{\varepsilon,K} \rho(u_{\varepsilon,K}h) = \rho(h)$ ultrafaiblement dans Cv_p , ce qui n'offre pas de difficulté.

5. Caractérisations des groupes G aménables, en termes de $A_p(G)$ et de $Cv_p(G)$.

Pour la démonstration du théorème suivant, nous renvoyons à [16], chapitre 8 ; [12] et [13].

THÉORÈME 3.- Soit G un groupe localement compact, et soit $1 < p < +\infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) G est aménable ;

$(2)_p$ dans l'algèbre de Banach $A_p(G)$ il existe une unité approchée (bornée par 1 en norme) ;

$(3)_p$ pour toute mesure μ positive bornée sur G , on a $\|\rho(\mu)\|_{Cv_p} = \|\mu\|_1$;

$(4)_p$ si une mesure positive convole $L^p(G)$ dans $L^p(G)$, c'est une mesure bornée.

Dans le cas du groupe non-aménable $G = SL(2,\mathbb{R})$, R. A. Kunze et E. M. Stein ont obtenu dans [10] le résultat suivant, plus fort que la négation de $(4)_2$:

soit $G = SL(2,\mathbb{R})$ et $1 \le r < 2$; alors, pour tout $k \in L^r(G)$, $f \mapsto k * f$ est un convoluteur de $L^2(G)$.

Leur démonstration utilise explicitement la formule de Plancherel pour $SL(2,\mathbb{R})$. Il serait intéressant d'examiner si ce phénomène "d'hyper-non-aménabilité" a lieu pour une classe plus vaste de groupes, par exemple ceux qui sont semi-simples de centre fini.

6. Synthèse harmonique pour $A_p(G)$: généralités.

6.1. $A_p(G)$ est une algèbre de fonctions continues tendant vers 0 à l'infini sur G. Son spectre de Gelfand s'identifie à G. Si G est abélien, ce fait découle simplement des inclusions $\mathcal{F}L^1(\hat{G}) = A_2(G) \subset A_p(G) \subset \mathcal{C}_o(G)$, qui résultent, via le théorème 2, du théorème de Riesz-Thorin. Si G est quelconque, on le voit en reprenant la démonstration faite dans [3], p. 220-222, pour le cas $p = 2$, c'est-à-dire en s'appuyant essentiellement sur le lemme suivant, dont l'origine remonte à H. Helson [6] :

LEMME (de contraction des supports).- Soit X l'espace vectoriel engendré par les fonctions $f * g$, où f et g sont fonctions caractéristiques de compacts dans G. Soit $T \in Cv_p(G)$ un convoluteur tel que, pour toute $u \in X$, le support de la fonction Tu soit contenu dans le support de u. Alors $T = \lambda I$, où λ est une constante et I l'opérateur identique.

Sur sa définition, on voit facilement que l'algèbre $A_p(G)$ est régulière au sens de Chilov.

En posant $\langle uT , v\rangle = \langle T , uv\rangle$, pour $T \in PM_p$ et $u , v \in A_q$, on fait de $PM_p(G)$ un $A_q(G)$-module. On appelle support d'un $T \in PM_p(G)$ l'ensemble (fermé dans G) des $a \in G$ tels que l'opérateur $\rho(\varepsilon_a)$ soit limite ultrafaible dans $\mathcal{L}(L^p)$ d'opérateurs u_iT, où $u_i \in A_q(G)$. Si c'est le cas, on peut même montrer que $\rho(\varepsilon_a)$ est limite ultrafaible d'opérateurs u_iT, où $\|u_iT\|_{Cv_p} \leq 1$. Pour que $a \in \mathrm{supp}(T)$, il faut et il suffit que, pour tout voisinage V de a, il existe une $u \in A_q(G)$ (resp. une

$u \in X$), à support dans V , et telle que $\langle T , u\rangle \neq 0$.

Soit E un fermé dans G . C'est, par définition, un ensemble de synthèse pour $A_q(G)$ si les hypothèses $T \in PM_p(G)$ et $\mathrm{supp}(T) \subset E$ impliquent que T soit limite ultrafaible de combinaisons linéaires d'opérateurs $\rho(\varepsilon_x)$, où $x \in E$. Par le lemme de contraction des supports, il est immédiat de voir que tout ensemble réduit à un point est de synthèse. De plus, en imitant les démonstrations faites pour $p = 2$ dans [3], chapitre 4, on obtient la formulation suivante du théorème de Ditkin-Chilov pour $A_q(G)$:

Soit $T \in PM_p(G)$ tel que la frontière de $\mathrm{supp}(T)$ ne contienne pas d'ensemble parfait non vide.

1) Soit $u \in A_q(G)$. Si u est identiquement nulle sur $\mathrm{supp}(T)$, alors $uT = 0$.

2) Si, de plus, G est aménable, T est limite ultrafaible de combinaisons linéaires d'opérateurs $\rho(x)$, où $x \in \mathrm{supp}(T)$.

6.2. Au passage, notons une application du théorème de synthèse ponctuelle à la détermination des convoluteurs isométriques de $L^p(G)$, pour $p \neq 2$. Dans ce cas, S. K. Parrott [15] et R. S. Strichartz [19] montrent qu'il n'y a pas d'autres convoluteurs isométriques que les $\lambda\rho(\varepsilon_a)$, où $a \in G$ et $|\lambda| = 1$. On peut simplifier leur démonstration comme suit, tout au moins si le convoluteur isométrique T est dans $PM_p(G)$. Un lemme de Banach (cf. [11]) énonce que, si $u , v \in L^p$ et si $p \neq 2$, on a l'égalité de la "médiane" :

$$\|u + v\|_p^p + \|u - v\|_p^p = 2\|u\|_p^p + 2\|v\|_p^p$$

si et seulement si $u(x)v(x) = 0$ presque partout. Par synthèse ponctuelle on est ramené à voir que, dans le support de T , il n'y a pas deux points distincts a

et b. Si c'était le cas, il existerait un voisinage V_1 de a et un voisinage V_2 de b, d'intersection vide. Soit $\check{u}$ (resp. $\check{v}$) une fonction appartenant à X, à support dans V_1 (resp. V_2), telle que $\langle T, \check{u}\rangle = Tu(e) \neq 0$ (resp. telle que $Tv(e) \neq 0$). On aurait $uv = 0$, donc $(Tu)(Tv) = 0$ d'après le lemme de Banach, d'où contradiction.

7. Synthèse harmonique pour $A_p(G)$: cas de $G = \mathbf{R}^n$.

7.1. Pour énoncer des résultats plus précis, nous supposons maintenant que $G = \mathbf{R}^n$. Alors, d'après Riesz-Thorin, on a $Cv_p = Cv_q \subset Cv_2$. La cotransformation de Fourier $\bar{\mathcal{F}}$ applique bijectivement Cv_p sur l'espace M_p des multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p$. On a $M_p \subset M_2 = L^\infty$. Sur M_p nous utilisons les deux topologies transférées par $\bar{\mathcal{F}}$ de Cv_p : celle de la norme, et l'ultrafaible.

Soit $T \in Cv_p$ et $f = \bar{\mathcal{F}}T$. Le support de T coïncide avec le support de la distribution T, et n'est autre que le spectre de f au sens usuel, i.e. l'ensemble $sp(f)$ des $a \in \mathbf{R}^n$ tels que $\exp(2\pi i a.x)$ soit limite faible dans L^∞ de combinaisons linéaires de translatées de f. Dire qu'un fermé E de $\mathbf{R}^n$ est de synthèse revient à dire que toute $f \in M_p$ dont le spectre soit inclus dans E est limite ultrafaible de combinaisons linéaires des $\exp(2\pi i\lambda.x)$, où $\lambda \in E$. Ainsi tout théorème de synthèse pour A_p conduit à un théorème d'approximation de multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p$ par des polynômes trigonométriques.

7.2. On a d'abord un résultat du type de Beurling-Pollard :

THÉORÈME 4.- Si S est un fermé de $\mathbf{R}^n$ et si $\varepsilon > 0$, soit S_ε l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^n$, $x \notin S$, tels que $\mathrm{dist}(x,S) \leq \varepsilon$. Si u est une fonction, posons $\omega_\varepsilon(u) = \sup_{x \in S_\varepsilon} |u(x)|$.

<u>Soit</u> $f \in M_p(\mathbb{R}^n)$ <u>telle que</u> $sp(f) \subset S$. <u>Soit</u> $u \in A_p(\mathbb{R}^n)$ <u>telle que</u> :

$$\begin{cases} u(x) = 0 \quad \underline{\text{si}} \quad x \in S \ ; \\ \liminf\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{[\omega_\varepsilon(u)]^q}{\varepsilon^n} \operatorname{mes}[S_\varepsilon \cap \operatorname{supp}(u)] = 0 \ . \end{cases}$$

<u>Alors la distribution</u> $u(\mathcal{F}f)$ <u>est nulle</u>.

Grâce à l'unité approchée de A_p , on peut supposer u à support compact. Si χ_ε est la fonction caractéristique du cube $|t_k| \leq \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$; $k = 1 , \ldots , n$, on pose :

$$\Delta_\varepsilon = \frac{n^n}{\varepsilon^{2n}} \chi_\varepsilon * \chi_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \hat{\Delta}_\varepsilon = \overline{\mathcal{F}}\Delta_\varepsilon \ .$$

Alors $\hat{\Delta}_\varepsilon \in L^1 \cap L^\infty$ et $\|\Delta_\varepsilon\|_p \leq C\,\varepsilon^{-\frac{n}{q}}$, où C est une constante indépendante de ε . De plus, les $\hat{\Delta}_\varepsilon(x)$ tendant vers 1 uniformément sur tout compact, on a :

$$(5) \qquad \langle \mathcal{F}f , u \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}u(x)\, f(x)\, \hat{\Delta}_\varepsilon(x)\, dx \ .$$

On a $\operatorname{supp}[\mathcal{F}(f\hat{\Delta}_\varepsilon)] \subset S \cup S_\varepsilon$, donc, d'après la formule de Plancherel et l'inégalité de Hölder, on a, en posant $T = \mathcal{F}f$:

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}u(x)\, f(x)\, \hat{\Delta}_\varepsilon(x)\, dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} u(t)\, \mathcal{F}(f\hat{\Delta}_\varepsilon)(t)\, dt\right| \\ &= \left|\int_{S_\varepsilon \cap \operatorname{supp}(u)} u(t)\, \mathcal{F}(f\hat{\Delta}_\varepsilon)(t)\, dt\right| = \left|\int_{S_\varepsilon \cap \operatorname{supp}(u)} u(t)[T(\Delta_\varepsilon)](t)\, dt\right| \\ &\leq \left(\int_{S_\varepsilon \cap \operatorname{supp}(u)} |u(t)|^q dt\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |[T(\Delta_\varepsilon)](t)|^p dt\right)^{1/p} \\ &\leq \|T\|_{Cv_p} \|\Delta_\varepsilon\|_p\, \omega_u(\varepsilon)[\operatorname{mes}(S_\varepsilon \cap \operatorname{supp} u)]^{1/q} \ , \end{aligned}$$

et la conclusion du théorème 4 découle alors de (5) et des hypothèses.

7.3. Nous allons maintenant généraliser le théorème de synthèse de C. S. Herz pour le cercle $(n = 2 , p = 2)$, et le contre-exemple de L. Schwartz $(n \geq 3 , p = 2)$. Mais nous ne savons pas ce qui se passe dans le cas critique $n > 3$, $p = \frac{n-1}{n-2}$.

THÉORÈME 5.- Soit S^{n-1} la sphère-unité $t_1^2 + \ldots + t_n^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit $1 < p \leq 2$.

1) Si $n = 3$, $p = 2$ ou si $n > 3$, $\frac{n-1}{n-2} < p \leq 2$, la sphère S^{n-1} n'est pas un ensemble de synthèse pour $A_p(\mathbb{R}^n)$.

2) Si $n = 1$ ou 2 pour tout p , ou si $n \geq 3$ pour $1 < p < \frac{n-1}{n-2}$, la sphère S^{n-1} est un ensemble de synthèse pour $A_p(\mathbb{R}^n)$.

Pour démontrer le 2), on utilise la méthode de Herz pour le cercle et $A_2(\mathbb{R}^2)$ (cf. [7]) avec quelques complications dues à la dimension n . Pour le 1) on reprend l'idée de Schwartz [18] avec quelques complications dues au fait qu'on doit travailler avec un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p$, et plus seulement avec une fonction bornée.

1) Soit s la mesure superficielle invariante par rotations sur S^{n-1} . Il s'agit de voir que $\varphi = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1}\right) \in M_p$. C'est ce qu'on prouve, pour $\frac{n-1}{n-2} < p \leq 2$, en appliquant un théorème d'interpolation de E. M. Stein [20] sur les familles analytiques d'opérateurs. Pour z complexe, on pose $\varphi_z(t) = (1 + 4\pi^2|t|^2)^{z/2}\varphi(t)$, et l'on définit un opérateur T_z par $T_z(f) = \mathcal{F}(\varphi_z . \overline{\mathcal{F}}f)$. On constate que :

(6) pour $\operatorname{Re} z = \frac{n-3}{2}$, on a $T_z \in Cv_2(\mathbb{R}^n)$,

car dans ce cas φ_z est bornée, puisque $\varphi(t) = O(|t|^{-\frac{n-3}{2}})$ quand $|t| \to +\infty$;

(7) pour $\operatorname{Re} z = -1$, on a $T_z \in Cv_p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 < p < +\infty$,

car alors $T_z = \frac{\partial V_{-z}}{\partial x_1} * s$, où V_{-z} est le potentiel de Bessel d'ordre $-z$.

Par interpolation, on obtient que $T_o = \mathcal{F}\varphi \in Cv_p(\mathbf{R}^n)$ si $\frac{n-1}{n-2} < p \leq 2$.

2) Soit $f \in M_p(\mathbf{R}^n)$ telle que $sp(f) \subset S^{n-1}$. Supposons $1 < p < \frac{n-1}{n-2}$, c'est-à-dire $q > n-1$. En appliquant le théorème 4 à f et à une fonction u indéfiniment dérivable à support compact telle que $u(t) = 1 - |t|^2$ au voisinage de S^{n-1} , on obtient que

$$\Delta f + 4\pi^2 f = 0 , \tag{8}$$

où Δ est le laplacien. On est alors ramené à prouver que toute solution f de (8) qui appartient à M_p est limite ultrafaible de combinaisons linéaires d'exponentielles-solutions. Ce dernier point s'obtient en passant en coordonnées sphériques :

$$t = ru \quad , \quad r = \sqrt{t_1^2 + \ldots + t_n^2} \quad , \quad u \in S^{n-1} ,$$

et en développant $f(ru)$, à r fixé, en séries d'harmoniques sphériques, lesquelles convergent ultrafaiblement vers f au sens des moyennes de Cesaro $(C, n-1)$; on s'appuie de plus sur le fait que ces moyennes sont des transformées de Fourier de mesures à support dans S^{n-1} et qu'elles restent bornées en norme M_p .

8. Résultats divers.

8.1. Dans [2], S. W. Drury montre que l'ensemble triadique de Cantor est de synthèse pour $A_p(\mathbf{R})$. De plus il prouve que seules les fonctions analytiques "opèrent" sur $A_p(\mathbf{T})$. Il généralise en outre un théorème de Beurling et Helson [1] :

si $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est telle que, pour toute $u \in A_p(\mathbf{R})$, on ait $u \circ \sigma \in A_p(\mathbf{R})$, alors $\sigma(x) = ax + b$, où $a , b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

8.2. La construction de Malliavin, sous la forme générale, valable pour une algèbre de Banach commutative régulière semi-simple, que lui a donnée Katznelson ([9], p. 231), s'applique au cas de l'algèbre $A_p(G)$ d'un groupe G compact abélien ; on obtient qu'il y a alors dans $A_p(G)$ des ensembles de non-synthèse. On voit en effet que la condition suffisante (7.2) de l'énoncé de Katznelson vaut pour Cv_p , en interpolant cette condition entre Cv_2 et $Cv_1 = \mathcal{M}^1$.

8.3. C. S. Herz obtient un résultat (non publié) plus général que le théorème 1, à savoir que $u \mapsto u \circ \sigma$ applique $A_p(G)$ dans $\underline{B}_r(H)$ pour $r \le p \le 2$ ou $2 \le p \le r$. Ceci entraîne que, si G est aménable, on a les inclusions $A_2(G) \subset A_p(G) \subset A_r(G)$. Ces inclusions sont évidentes quand G est abélien, d'après Riesz-Thorin.

9. Quelques problèmes.

9.1. En remplaçant $L^p(G)$ et $L^q(G)$ par d'autres espaces E et F de fonctions (ou distributions) sur lesquels G opère convenablement, par une construction du type $P(E \hat{\otimes} F)$ obtenir, puis étudier, des algèbres nouvelles.

9.2. Soit $u \in A_p(G)$. Existe-t-il $f \in L^p(G)$ et $g \in L^q(G)$ tels que $u = f * \check{g}$?

9.3. Soit $u \in A_p(\mathbf{R}^n)$. Si la fonction u est radiale, peut-on choisir, dans la définition (1) de u , les f_k et g_k radiales ?

9.4. Soit G_d le groupe G rendu discret. A-t-on $\underline{B}_p(G) = \underline{B}_p(G_d) \cap \mathcal{C}(G)$?

9.5. Dans le théorème 1, on suppose que $\sigma(H)$ est dense dans G . Alors est-ce que $u \mapsto u \circ \sigma$ est une isométrie de $\underline{B}_p(G)$ dans $\underline{B}_p(H)$?

9.6. Soit $\bar{H}$ le compactifié de Bohr de H et soit σ l'application canonique de H dans $\bar{H}$. Est-ce que $u \mapsto u \circ \sigma$ applique $\underline{B}_p(\bar{H})$ sur $\underline{B}_p(H) \cap PP(H)$?

9.7. Les inclusions des $A_p(G)$ signalées en 8.3 sont-elles valables pour tout groupe G ?

9.8. Si G n'est pas abélien, a-t-on $A_p(G) = A_q(G)$?

9.9. Le 2) du théorème 2 vaut-il sans l'hypothèse que G est aménable ?

9.10. Soit T dans la boule-unité de $PM_p(G)$. Est-ce que T est limite ultra-faible de combinaisons linéaires d'opérateurs $\rho(x)$ situées dans la boule-unité de $PM_p(G)$?

9.11. Quels sont les points extrêmaux de la boule-unité de $PM_p(G)$? Remarque (communiquée au conférencier par G. Kerkyacharian) : Si $p \neq 1$, il y en a d'autres que les $\lambda\rho(\varepsilon_a)$, $|\lambda| = 1$, sinon, d'après le théorème 2 et la formulation barycentrique du théorème de Krein-Milman, on obtiendrait que $PM_p = \mathcal{M}^1$.

9.12. Comparer $B_p(G)$ à l'espace de Banach $C_p(G)$ (resp. $D_p(G)$) des fonctions $u \in \mathcal{C}(G)$ telles que $\|u\|_{C_p} = \sup\limits_{f \in L^1,\ \|\rho(f)\|_{Cv_p} \leq 1} \left|\int_G f(x)u(x)dx\right| < +\infty$ (resp. telles que $\|u\|_{D_p} = \sup\limits_{\|\sum\limits_{\text{finie}} c_n\rho(\varepsilon_{x_n})\|_{Cv_p} \leq 1} |\Sigma c_n u(x_n)| < +\infty$). Pour $p = 2$ et G aménable, il est connu que ces trois espaces de Banach coïncident.

9.13. Un ensemble de synthèse pour $A_2(G)$ l'est-il nécessairement pour $A_p(G)$?

9.14. La sphère-unité S^{n-1} est-elle un ensemble de synthèse pour $A_p(\mathbb{R}^n)$, où $p = \frac{n-1}{n-2}$, $n > 3$? Sous-problème : $\frac{\partial s}{\partial x_1}$ est-il un convoluteur de $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p = \frac{n-1}{n-2}$, $n > 3$?

Si $p = 2$, on sait que les problèmes 2, 3, 9 et 10 ont tous une réponse affirmative, ainsi que les problèmes 4, 5, 6 si l'on suppose de plus les groupes aménables. Par contre, si $p \neq 2$, le conférencier ignore la réponse aux problèmes 2, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, même dans le cas où $G = \mathbb{R}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BEURLING and H. HELSON - Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers, Math. Scand., 1, 1953, p. 120-126.

[2] S. W. DRURY - Studies in regular algebras, Dissertation at the Univ. of Cambridge, 1969.

[3] P. EYMARD - L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math. France, 92, 1964, p. 181-236.

[4] A. FIGA-TALAMANCA - Translation invariant operators in L^p , Duke Math. Journ., 32, 1965, p. 495-501.

[5] F. P. GREENLEAF - Invariant means on topological groups, Van Nostrand, N. Y., 1969.

[6] H. HELSON - Spectral synthesis of bounded functions, Ark. för Mat., 1, 1952, p. 497-502.

[7] C. S. HERZ - Spectral synthesis for the circle, Ann. of Math., 68, 1958, p. 709-712.

[8] C. S. HERZ - Remarques sur la Note précédente de M. Varopoulos, C. R. Acad. Sc. Paris, 260, 1965, p. 6001-6004.

[9] Y. KATZNELSON - An introduction to harmonic analysis, John Wiley and Sons, 1968.

[10] R. A. KUNZE and E. M. STEIN - Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, Amer. J. of Math., 82, 1960, p. 1-62.

[11] J. LAMPERTI - On the isometries of certain function spaces, Pacific J. Math., 8, 1958, p. 459-466.

[12] H. LEPTIN - On locally compact groups with invariant means, Proc. of the A. M. S., 19, 1968, p. 489-494.