

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LUCIEN SZPIRO

Travaux de Kempf, Kleiman, Laksov sur les diviseurs exceptionnels

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 417, p. 339-353

http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__339_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE KEMPF, KLEIMAN, LAKSOV
 SUR LES DIVISEURS EXCEPTIONNELS

par Lucien SZPIRO

1. Enoncer le théorème de Kempf

Soit C une courbe réduite, irréductible, de type fini et propre sur un corps algébriquement clos k . Pour tout entier d , soit \mathbb{P}_d le schéma de Picard de C qui "paramétrise" les \mathcal{O}_C faisceaux inversibles de degré d . \mathbb{P}_d est, non canoniquement, isomorphe à la jacobienne \mathbb{P}_0 de C . Soient L_d le faisceau de Poincaré sur $C \times \mathbb{P}_d$, $r : C \times \mathbb{P}_d \rightarrow C$ et $\rho : C \times \mathbb{P}_d \rightarrow \mathbb{P}_d$ les projections. Soit g le genre arithmétique de C . Pour tout point rationnel sur k , x dans $\mathbb{P}_d(k)$, on note $L_d(x) = r_*(L_d \otimes \rho^*(k(x)))$. La correspondance $x \mapsto L_d(x)$ de $\mathbb{P}_d(k)$ dans l'ensemble des \mathcal{O}_C faisceaux inversibles de degré d est une bijection.

Si r et d sont deux entiers, on note G_d^r l'ensemble des \mathcal{O}_C modules inversibles \mathcal{L} , de degré d tels que $\dim_k H^0(C, \mathcal{L}) \geq r + 1$; G_d^r est formé de diviseurs exceptionnels si $d - r < g$, i.e. si $H^1(C, \mathcal{L}) \neq 0$.

1.1. Construction des schémas G_d^r

Avec Kleiman et Laksov [7], on va construire un schéma G_d^r , fermé dans \mathbb{P}_d , tel que l'ensemble $G_d^r(k)$ de ses points rationnels sur k soit égal à G_d^r .

Lemme 1.- Il existe deux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$ faisceaux localement libres F et G , de rang constant égal respectivement à $d+1$ et g , et un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$ homomorphisme $m : G \rightarrow F$, tels que, pour tout $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$ faisceau cohérent Q , on ait des isomorphismes, fonctoriels en Q :

$$\begin{aligned} \rho_*(L_d \otimes \rho^*Q) &\simeq \text{Ker}(m^\vee \otimes Q) \\ R^1 \rho_*(L_d \otimes \rho^*Q) &\simeq \text{Coker}(m^\vee \otimes Q) . \end{aligned}$$

Fixons $2g$ points lisses, rationnels sur k , distincts M_1, \dots, M_{2g-1}, M .
 Posons $E = M_1 + \dots + M_d$, $D = E + M$, et, pour tout diviseur K sur C :

$$L(K) = L_d \otimes r^* \mathcal{O}_C(K - E)$$

$$L_K = L_d \otimes r^* \mathcal{O}_{E+K} \quad \text{si } E + K \text{ est effectif.}$$

De la suite exacte fondamentale

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0,$$

on déduit la suite exacte

$$0 \rightarrow L(-M) \rightarrow L_d \rightarrow L_M \rightarrow 0,$$

et donc la suite exacte

$$\rho_*(L(-M)) \rightarrow \rho_*(L_d) \rightarrow \rho_* L_M \xrightarrow{\delta} R^1 \rho_*(L(-M)) \rightarrow R^1 \rho_*(L_d) \rightarrow R^1 \rho_*(L_M).$$

Du théorème de Riemann-Roch et du fait que ρ est propre et plat, on déduit (EGA₂ 7) :

- $\rho_*(L(-M) \otimes \rho^*Q) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}$ faisceau cohérent Q .
- $R^1 \rho_*(L_M \otimes \rho^*Q) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}$ faisceau cohérent Q .
- $\rho_*(L_M)$ est un faisceau localement libre sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}$ de rang $d+1$, constant.
- $R^1 \rho_*(L(-M))$ est un faisceau localement libre sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}$ de rang constant égal à g .

• La suite suivante est exacte, pour tout Q faisceau cohérent sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}$:

$$(*) \quad 0 \rightarrow \rho_*(L_d \otimes \rho^*Q) \rightarrow \rho_* L_M \otimes Q \xrightarrow{\delta \otimes Q} R^1 \rho_*(L(-M)) \otimes Q$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad R^1 \rho_*(L_d \otimes \rho^*Q)$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0.$$

Prenant $G^\vee = R^1 \rho_*(L(-M))$, $F^\vee = \rho_* L_M$ et $m^\vee = \delta$, on obtient le lemme.

Notons maintenant $E' = M_{d+1} + \dots + M_{2g-1}$, $D' = D + E'$, $M' = E' + M$; on obtient le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_C(-D) & \rightarrow & \mathcal{O}_C & \rightarrow & \mathcal{O}_D \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_C(-D) & \rightarrow & \mathcal{O}_C(E') & \rightarrow & \mathcal{O}_{D'} \rightarrow 0 .
 \end{array}$$

On en déduit un autre diagramme commutatif dont les lignes sont exactes en appliquant le foncteur $L_d \otimes r^*$. Donc un troisième diagramme commutatif de la même espèce

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \rho_* L_d & \rightarrow & \rho_* L_M \xrightarrow{\delta} & R^1 \rho_*(L(-M)) & \rightarrow & R^1 \rho_* L_d \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \rho_* L'_d & \rightarrow & \rho_* L_{M'} \xrightarrow{\varepsilon} & R^1 \rho_*(L(-M)) & \rightarrow & R^1 \rho_* L'_d \rightarrow 0 \quad \text{où } L'_d = L(E' + E) .
 \end{array}$$

On a les propriétés suivantes :

- $\rho_* L_M \rightarrow \rho_* L_{M'}$ est scindée ;
- $\rho_* L_{M'} = H$ est un faisceau localement libre de rang constant égal à $2g$ sur \mathbb{P}_d ;
- $R^1 \rho_* L'_d = 0$.

Du morphisme surjectif $\varepsilon : H \rightarrow G^\vee$, on déduit une section α de $B = \text{Grass}_g(H)$ sur \mathbb{P}_d , i.e. $\alpha : \mathbb{P}_d \rightarrow B$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 F^\vee & \xrightarrow{m^\vee} & G^\vee \\
 & \searrow & \nearrow \varepsilon \\
 & & H
 \end{array}$$

et $x \in \mathbb{P}_d(k)$, $x \in \mathbb{G}_d^r$ si et seulement si $\bigwedge^{d+1-r} m^\vee(x) = 0$. Soit $\sigma_{r+1}(F^\vee)$ le schéma spécial de Schubert défini dans B par F^\vee et r .

DÉFINITION.- $\mathbb{G}_d^r = \alpha^{-1}(\sigma_{r+1}(F^\vee))$.

1.2 Propriétés de \mathbb{G}_d^0

\mathbb{G}_d^0 est donc le sous-schéma fermé de \mathbb{P}_d défini par l'annulation de $\bigwedge^{d+1} F^\vee \rightarrow \bigwedge^{d+1} G^\vee$. Soient $Q = \text{Coker}(m)$ et $\mathbb{D}_d = \mathbb{P}_{\mathbb{P}_d}(Q)$. Soit q la projection naturelle de \mathbb{D}_d sur \mathbb{P}_d . Elle se factorise à travers l'immersion de \mathbb{G}_d^0

dans \mathbb{P}_d par un morphisme que nous noterons s ; \mathbb{D}_d "paramétrise" les diviseurs effectifs sur C de degré d ; \mathbb{D}_d est lisse et connexe.

THÉORÈME 1 (Kempf).- Soit d un entier naturel tel que $0 \leq d \leq g-1$. Le morphisme $s : \mathbb{D}_d \rightarrow \mathbb{G}_d^0$ est birationnel ; \mathbb{G}_d^0 est un schéma irréductible, lisse en codimension 1, de Cohen-Macaulay, en particulier normal, de dimension d . Si d est non nul, le cycle de \mathbb{G}_d^0 dans l'anneau de Chow de \mathbb{P}_d représente la $(g-d)$ -ième classe de Chern de $R^1 \rho_*(L_d)$. De plus, si x est un point rationnel sur k de \mathbb{G}_d^0 , la multiplicité de \mathbb{G}_d^0 en x est égale au coefficient binomial :

$$\begin{pmatrix} \dim_k(H^1(C, L_d(x))) \\ \dim_k(H^0(C, L_d(x))) - 1 \end{pmatrix} .$$

On va maintenant donner deux propriétés attachées à la situation décrite qui permettent de montrer le théorème.

La suite exacte, pour tout point $x \in \mathbb{P}_d(k)$:

$$0 \rightarrow m_x/m_x^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_d, x}/m_x^2 \rightarrow k(x) \rightarrow 0$$

où m_x est le faisceau d'idéaux des fonctions dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$ qui s'annulent en x , donne lieu à deux homomorphismes de k -espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} D_x : H^0(C, L_d(x)) &\rightarrow H^1(C, L_d(x)) \otimes m_x/m_x^2 \\ C_x : (m_x/m_x^2)^\vee &\rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) . \end{aligned}$$

C_x est un isomorphisme.

On a d'autre part l'accouplement de Yoneda, qui donne lieu à la dualité de Serre sur C :

$$Y_x : H^0(C, L_d(x)) \otimes H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(C, L_d(x)) .$$

Lemme 2. - Le diagramme suivant est commutatif (analyse du morphisme $\text{Div} \rightarrow \text{Pic}$) :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^0(C, L_d(x)) \otimes (m_x/m_x^2)^\vee & & \\
 & & \downarrow \text{---} & & \\
 & 1 \otimes C_x & \swarrow & & \searrow D_x \otimes 1 \\
 H^0(C, L_d(x)) \otimes H^1(C, \mathcal{O}_C) & & & & H^1(C, L_d(x)) \otimes m_x/m_x^2 \otimes (m_x/m_x^2)^\vee \\
 & Y_x & \searrow & & \swarrow 1 \otimes \text{Trace} \\
 & & H^1(C, L_d(x)) & &
 \end{array}$$

DÉFINITION. - Soient k un corps, U, V, W trois espaces vectoriels ; un homomorphisme bilinéaire

$$U \times V \xrightarrow{(\cdot, \cdot)} W$$

est appelé un accouplement régulier si $u \in V, v \in V, u \neq 0, v \neq 0$, alors

$(u, v) \neq 0$.

Lemme 3. - Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur \mathcal{O}_C , l'homomorphisme bilinéaire déduit de l'accouplement de Yoneda,

$$H^0(C, \mathcal{L}) \times H^1(C, \mathcal{L})^\vee \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C)^\vee$$

est un accouplement régulier.

Soit b un élément non nul de $H^0(C, \mathcal{L})$; on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{b} \mathcal{L} \rightarrow K \rightarrow 0$$

où le support de K est fini, on en déduit que l'application $H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(C, \mathcal{L})$ est surjective.

2. Démontrer le théorème de Kempf

Soient Y un schéma et $m : G \rightarrow F$ un \mathcal{O}_Y homomorphisme de \mathcal{O}_Y modules localement libres de rangs constants, finis, g et f . Soit

$P = \text{Proj}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_Y}(F)) = \mathbb{P}_Y(F)$, et soit t la projection de P sur Y . Soit

$n : G_P(-1) \rightarrow \mathcal{O}_P$ l'homomorphisme déduit de $m_P(-1)$ et de l'homomorphisme canonique $F_P(-1) \rightarrow \mathcal{O}_P$. Soit X le sous-schéma fermé de \mathcal{O}_P défini par l'annulation de n , i.e. $X = \mathbb{P}_Y(Q)$ où $Q = \text{Coker } m$. On appellera q la projection

de X sur Y . Soit Z le sous-schéma fermé de Y défini par l'annulation de $\overset{f}{\wedge} G \otimes \overset{f}{\wedge} F^\vee \rightarrow \mathcal{O}_Y$.

Kempf étudie la relation entre X et Z .

2.1. Une vue fonctorielle sur le complexe de Eagon et Northcott [3]

Considérons le complexe de Koszul défini par $n : G_P(-1) \rightarrow \mathcal{O}_P$

$$K_*(n) : \overset{g}{\wedge} G_P(-1) \rightarrow \dots \rightarrow \overset{i}{\wedge} G_P(-1) \rightarrow \dots \rightarrow G_P(-1) \xrightarrow{n} \mathcal{O}_P .$$

Si on regarde les hyper images directes de $K_*(n)$ par t , $H^k(t, K_*(n))$, on obtient une suite spectrale convergente

$$R^i t_* (\overset{j}{\wedge} (G_P(-1))) \Rightarrow H^{i-j}(t, K_*(n)) .$$

Mais cette suite spectrale est très simple car

$$R^i t_* (\overset{j}{\wedge} G_P(-1)) \simeq \overset{j}{\wedge} G \otimes_{\mathcal{O}_Y} R^i t_* (\mathcal{O}_P(-j)) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} i = j = 0 \\ \text{ou bien} \\ i = f-1 \text{ et } f \leq j \leq g . \end{cases}$$

On en déduit le complexe suivant si $g \geq f$

$$E_*(m) : R^{f-1} t_* (\overset{g}{\wedge} G_P(-1)) \rightarrow \dots \rightarrow R^{f-1} t_* (\overset{j}{\wedge} G_P(-1)) \rightarrow \dots \rightarrow R^{f-1} t_* (\overset{f}{\wedge} G_P(-1)) \xrightarrow{d_m} t_* \mathcal{O}_P .$$

Lemme 4 (Fonctorialité en m pour les triangles commutatifs, cas particulier).

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \overset{f}{\wedge} G \otimes R^{f-1} t_* (\mathcal{O}_P(-f)) & \xrightarrow{\sim} & R^{f-1} t_* (\overset{f}{\wedge} G_P(-1)) \\ \downarrow \overset{f}{\wedge} m \otimes \text{Id} & & \downarrow R^{f-1} t_* (m_P(-1)) \\ \overset{f}{\wedge} F \otimes R^{f-1} t_* (\mathcal{O}_P(-f)) & \xrightarrow{\sim} & R^{f-1} t_* (\overset{f}{\wedge} F_P(-1)) \end{array} \begin{array}{l} \nearrow d_m \\ \searrow d_{\text{Id}_F} \end{array} \begin{array}{l} f \neq 0 \\ t_* \mathcal{O}_P \simeq \mathcal{O}_Y \end{array}$$

Ce lemme se déduit du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{m} & F \\ & \searrow m & \nearrow \text{Id}_F \\ & & F \end{array}$$

Remarque.- Le complexe $E_*(m)$ ressemble déjà beaucoup à celui obtenu dans [3] par Eagon et Northcott.

En effet $R^{f-1} \bigwedge^i G_P(-1) \simeq \bigwedge^i G \otimes (\text{Sym}^{i-f} F)^\vee \otimes \bigwedge^f F^\vee$ et le lemme 4 implique $\text{Coker } d_m = \mathcal{O}_Z$.

Considérons le morphisme de complexes

$$K_*(n) \rightarrow \mathcal{O}_X$$

où \mathcal{O}_X est un complexe concentré en degré zéro. Si on prend les hyper images directes de ce morphisme par t , on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} R^{f-1} t_* \bigwedge^f G_P(-1) & \xrightarrow{d_m} & t_* \mathcal{O}_P \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^1 t_* \mathcal{O}_X & \xrightarrow{0} & t_* \mathcal{O}_X \end{array}$$

et donc le lemme :

Lemme 5.- La projection $q : X \rightarrow Y$ se factorise par l'immersion $i : Z \rightarrow Y$ en un morphisme $s : X \rightarrow Z$ tel que le triangle suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & Y \\ & \searrow s & \nearrow i \\ & & Z \end{array}$$

Rappelons qu'on dit que X est localement intersection complète de codimension g dans P si $H^i(K_*(n)) = 0$ pour $i \neq 0$.

Lemme 6.- Supposons que X soit localement intersection complète de codimension g dans P , on a alors les propriétés suivantes :

- a) $t_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$ et $R^i t_* \mathcal{O}_X = 0$ si $i \neq 0$.
 b) $H^0(E_*(m)) \simeq \mathcal{O}_Z$ et $H^i(E_*(m)) = 0$ si $i \neq 0$.

C'est la functorialité des $R^i t_*$ car le morphisme de complexes $K_*(n) \rightarrow \mathcal{O}_X$ induisant un isomorphisme en homologie, le morphisme $R^i t_* K_*(n) \rightarrow R^i t_* \mathcal{O}_X$ aussi.

Lemme 7 (Indépendance de la présentation de Coker $m = Q$).- Supposons qu'on ait un carré commutatif de \mathcal{O}_Y modules localement libres de rang constant

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{m} & F \\
 a \downarrow & & \downarrow b \\
 G' & \xrightarrow{m'} & F'
 \end{array}$$

tel que

- les flèches verticales soient surjectives ;
- le morphisme $\text{Ker } a \rightarrow \text{Ker } b$ soit un isomorphisme.

Alors, l'homomorphisme de complexes $E_*(m) \rightarrow E_*(m')$ induit un isomorphisme en homologie.

COROLLAIRE.- Supposons $g \geq f$; soit y un point de Y . On a les séries d'équivalences suivantes :

- a) Il existe un entier i , tel que $f - g - 1 \leq i \leq 0$ et $H^i(E_*(m) \otimes k(y)) = 0$
 \Leftrightarrow $m(y)$ est surjective
- \Leftrightarrow il n'y a pas de point de X au-dessus de y .
- b) $\dim_{k(y)} H^{f-g-1}(E_*(m) \otimes k(y)) = 1$
 \Leftrightarrow ou bien $\dim_{k(y)} \text{Coker } m(y) = 1$ ou bien $f = g$ et $y \in Z$.
- c) $\dim_{k(y)} \text{Coker } m(y) = 1$
 \Leftrightarrow $y \in Z$ et $s : X \rightarrow Z$ est un isomorphisme au voisinage de y .

Dans ce cas Z est défini par $g - f + 1$ équations au voisinage de y .

2.2. La question de savoir si Z est Cohen-Macaulay

DÉFINITION (Macaulay !).- Un \mathcal{O}_Y module M est dit parfait s'il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow K_i \rightarrow K_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow K_1 \rightarrow K_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

où les K_i sont des \mathcal{O}_Y modules localement libres de rang fini, telle que la suite duale

$$0 \rightarrow K_0^\vee \rightarrow K_1^\vee \rightarrow \dots \rightarrow K_{i-1}^\vee \rightarrow K_i^\vee$$

soit aussi exacte.

M est de torsion, l'entier i est parfaitement déterminé, on l'appellera la dimension projective de M .

Lemme 8.- Supposons $g \geq f$ et que \mathcal{O}_Z soit un \mathcal{O}_Y module parfait de dimension
projective $g - f + 1$. Alors :

- a) $E_*(m)$ fournit une résolution projective de \mathcal{O}_Z .
- b) Si Y est de Cohen-Macaulay, Z aussi.
- c) Si z est un point de Z et si Y est Gorenstein en z , alors Z est
Gorenstein en z si et seulement si, ou bien, $f = g$, ou bien,
 $\dim_{k(z)}(\text{Coker } m^\vee(z)) = 1$. Dans tous les cas Z est une intersection complète
en z .

Exemple 1.- Soient Y, G, F comme précédemment. Posons $\underline{Y} = \mathbf{A}(G \otimes_{\mathcal{O}_Y} F^\vee)$. On a
un homomorphisme canonique $\underline{m} : \underline{G} \rightarrow \underline{F}$, les \mathcal{O}_Y homomorphismes $m : G \rightarrow F$
correspondent biunivoquement par image réciproque aux sections φ de la projec-
tion $\underline{Y} \rightarrow Y$. Faisant les constructions précédentes, on trouve que
 $\underline{P} \simeq \mathbf{P}(F) \times_Y \underline{Y}$ et que \underline{X} est défini par des équations homogènes de bidegré $(1,1)$.
De plus, \underline{X} est localement intersection complète de codimension g dans \underline{P} .
Par le lemme 6, on déduit que $H^i(E_*(\underline{m})) = 0$ pour $i \neq 0$. $E_*(m)$ étant obtenu
par spécialisation, on a

COROLLAIRE.- Pour tout entier i , $H^i(E_*(m))$ est un \mathcal{O}_Z module.

Remarque.- Le complexe obtenu par Eagon et Northcott dans [3] est le cas particu-
lier de $E_*(\underline{m})$ où $Y = \text{Spec}(k)$ est un point.

On voit donc que dans l'anneau $S = k[X_{ij}]_{i=1, \dots, f, j=1, \dots, g}$, avec $f \geq g$, l'idéal
 J_g engendré par les g mineurs de la matrice $\varnothing = (X_{ij})$ est tel que S/J_g soit
de Cohen-Macaulay de codimension $(f-g+1)$. Il n'y a pas longtemps, on ne savait
pas encore si S/J_i , où J_i est l'idéal de S engendré par les i mineurs de
 \varnothing , qui est de codimension $(f-i+1)(g-i+1)$, était de Cohen-Macaulay. Il sem-
blerait que Eagon et Hochster l'aient montré dans [2] . En tout cas, on a mainte-
nant le résultat plus général suivant dû à D. Laksov pour la partie Cohen-
Macaulay.

THÉORÈME 2 ([6], [8]).- Soient k un corps, n et g deux entiers naturels, a_1, \dots, a_d une suite croissante d'entiers naturels, telle que $a_d \leq n$. Soit σ_a un cycle de Schubert dans $\text{Grass}(k^n)$ correspondant à un drapeau de nationalité (a_1, \dots, a_d) . Alors l'idéal gradué J_a , qui définit σ_a pour le plongement de Plucker, est tel que l'anneau $k[X_1, \dots, X_{\binom{n}{g}}]/J_a$ soit

- intègre ;
- lisse en codimension un ;
- Cohen-Macaulay (donc normal) ;
- de codimension $(\sum a_i - \frac{d(d+1)}{2} + 1)$.

Igusa dans [4] avait montré ce résultat pour les grassmanniennes. Malheureusement, à ma connaissance, il n'y a pas encore de résolution projective naturelle de J_a . Revenons à nos moutons.

PROPOSITION 1.- Supposons que Y soit lisse, quasi-projective, réduite, irréductible sur un corps algébriquement clos k et que g soit supérieur ou égal à f . Alors, si la codimension de Z dans Y est au moins $g - f + 1$, le cycle de Z dans l'anneau de Chow modulo équivalence-rationnelle est égal à la $(g - f + 1)$ -ième classe de Chern de $\text{Coker}(m^V)$.

De par la functorialité des classes de Chern, on peut se réduire au cas "générique" de l'exemple 1. Alors \underline{Y} , \underline{X} et \underline{P} sont quasi-projectives et lisses. Dans ce cas, s envoie birationnellement chaque composante connexe de X sur une composante connexe de Z , et donc $\text{Cycle}(Z) = t_*(\text{Cycle}(X))$.

a) Calculs dans l'anneau de Chow de \underline{P} :

(i) $\text{Cycle}(\underline{X}) = g$ -ième classe de Chern de $\underline{G}_{\underline{P}}^V(+1) =$ coefficient de t^g dans $t^*(c(\underline{G}^V))/c(\mathcal{O}_{\underline{P}}(-1))$.

(ii) Si h est la 1ère classe de Chern de $\mathcal{O}_{\underline{P}}(1)$
 $t^*(c(\mathbb{F}^V))/c(\mathcal{O}_{\underline{P}}(-1)) = t^*(c(\mathbb{F}^V)) \cdot \sum_{n=0}^{g-1} h^n t^n$.

b) Calculs dans l'anneau de Chow de \underline{Y} :

On a $t_* h^n = 0$ si $0 \leq n < f - 1$,

et $t_* h^{f-1} = 1$.

Appliquant la formule de projection à (ii), on trouve :

$$c(F^\vee) \cdot t_*(1/c(\mathcal{O}_P(-1))) = t^{g-1}.$$

Si on applique la formule de projection à (i), on obtient le résultat cherché.

2.3. Etude infinitésimale de $s : X \rightarrow Z$

Dans ce paragraphe, les points seront rationnels sur k algébriquement clos, et les schémas de type fini sur k . On garde les notations du début de 2.

Soient y un point de Y et m_y le faisceau d'idéaux de \mathcal{O}_Y des fonctions qui s'annulent en y . La suite exacte

$$0 \rightarrow m_y/m_y^2 \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}/m_y^2 \rightarrow k(y) \rightarrow 0$$

donne lieu à un homomorphisme :

$$D_y : \text{Ker}(m^\vee(y)) \rightarrow \text{Coker}(m^\vee(y)) \otimes_k m_y/m_y^2.$$

Si x est un point de X et $z = s(x) \in Z$, on désignera par \underline{x} l'élément de $\text{Ker}(m^\vee(z)) = Q^\vee(z)$ correspondant x par l'égalité $X_z = \mathbb{P}(Q(z))$.

Pour tout schéma S et s un point de S , on désignera par $T_s(S)$ l'espace tangent de Zariski de S en s . On a une suite exacte de k -espaces vectoriels :

$$0 \rightarrow T_x(X_z) \rightarrow T_x(X) \rightarrow T_z(Y).$$

Lemme 9.-

$$\dim_k \text{Image}(T_x(X)) = \dim_k T_z(Y) - \text{rang } D_z(\underline{x}).$$

On entend par $\text{rang } D_z(\underline{x})$, le rang de l'homomorphisme de k -espaces vectoriels

$$(m_y/m_y^2)^\vee \rightarrow \text{Coker}(m^\vee(z))$$

qui s'en déduit.

Lemme 10.- Supposons que Y soit lisse de dimension n . Soit x un point de X , $z = s(x) \in Z$; les énoncés suivants sont équivalents :

- X est lisse de dimension $n-1+f-g$ en x ;
- l'espace tangent en x à X est de dimension $n-1+f-g$;
- $D_z(\underline{x})$ est de rang égal à $\dim_{k(z)}(\text{Ker } m^\vee(z))$;
- l'accouplement $\text{Ker}(m^\vee(z)) \otimes \text{Coker}(m^\vee(z))^\vee \rightarrow m_z/m_z^2$, déduit de D_z , est

un accouplement régulier.

Ce lemme se déduit du précédent après qu'on ait remarqué que X_Z est un espace projectif de rang égal à $\dim_{k(z)}(\text{Ker } m^v(z)) - 1$.

PROPOSITION 2.- Supposons $g \geq f$, Y lisse de type fini de dimension n sur un corps algébriquement clos k . Supposons que X soit lisse de dimension $n-1+f-g$ et irréductible. Alors Z est irréductible, lisse en codimension un, Cohen-Macaulay, de dimension $n-1+f-g$, de plus, le morphisme $s : X \rightarrow Z$ est birationnel.

Cette proposition est la somme des lemmes précédents de la section 2.

2.4. Un exemple instructif

Exemple 2.- Soient k un corps algébriquement clos, U, V, W trois k -espaces vectoriels de dimension finie u, v, w . Soit $R : U \rightarrow V^v \otimes_k W$ un k -homomorphisme tel que l'accouplement $U \times V \rightarrow W$ qui s'en déduit soit régulier. Notons $Y = \mathbb{A}_k(W)$ et $m : U_Y \rightarrow V_Y^v$ l'homomorphisme de \mathcal{O}_Y modules déduit de R . D'après la proposition 2 et le lemme 10, on voit que le schéma X correspondant est lisse et que X est un fibré vectoriel de rang $w - u$ sur $\mathbb{P}(V)$. Supposons $u \geq v$, alors le schéma Z correspondant est irréductible, rationnel, lisse en codimension un, Cohen-Macaulay, de dimension $w - 1 + v - u$. Notons $Y' = \mathbb{P}_k(W)$ et X', Z' les schémas correspondants à $m' : U_{Y'}(-1) \rightarrow V_{Y'}^v$.

Lemme 11.- La multiplicité de Z' dans Y' est égale au coefficient binomial $\binom{u}{v-1}$.

En effet, soit $m' : U_{\mathbb{P}(W)}(-1) \rightarrow V_{\mathbb{P}(W)}^v$ le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}$ homomorphisme déduit de R qui définit Z' . D'après la proposition 1 $\text{Cycle}(Z')$ est égal à la $(u-v+1)$ -ième classe de Chern de $U_{\mathbb{P}(W)}(1)$, i.e. au coefficient de h^{u-v+1} dans $(1+h)^u$ où h est la classe d'une section hyperplane.

Lemme 12.- Soient U, V, W des espaces vectoriels de dimension u, v, w sur un corps k algébriquement clos, et $U \times V \xrightarrow{a} W$ un accouplement régulier. Alors $w \geq u + v - 1$.

Considérons le cône K défini par l'image de $U \times V$ dans $U \otimes V$ dans $\mathbb{A}(U \otimes V)$; il est de dimension $u + v - 1$; dire que a est régulier, c'est

dire que le cône défini par le noyau de $U \otimes V \rightarrow W$ ne rencontre K qu'à l'origine. Le résultat n'est donc que la formule des codimensions d'intersection.

Remarque.— Si on applique le lemme 12 et le lemme 3, on trouve le théorème de Clifford, à savoir : supposons $d - r < g$, alors, si $G_d^r(k)$ n'est pas vide, $2r \leq d$.

PROPOSITION 3.— Gardons les hypothèses de la proposition 2. Soit z un point de Z ; alors, le cône tangent de Z en z est le cône défini dans l'espace tangent de Y en z par l'image de l'accouplement régulier induit par D_z .

$$\text{Ker}(m^\vee(z)) \times \text{Coker}(m^\vee(z))^\vee \rightarrow m_z/m_z^2.$$

Soit K le cône défini ainsi par D_z ; le cône tangent T de Z en z est contenu dans K . Le cône tangent T de Z en z est de dimension $n - 1 + f - g$ d'après la proposition 2. D'autre part, on vient de voir que K est de dimension $n - 1 + \dim \text{Ker}(m^\vee(z)) - \dim \text{Coker}(m^\vee(z))^\vee = n - 1 + f - g$. Comme T et K sont tous deux irréductibles, on a montré la proposition.

Le théorème 1 se déduit de la prop. 2, de la prop. 3 et du lemme 11, en prenant $Y = \mathbb{P}_d$ et, F et G comme dans le lemme 1.

3. Appliquer le théorème de Kempf

3.1. Si $d = g - 1$, G_{g-1}^0 est le diviseur thêta ; on obtient le théorème suivant dû à Riemann : la multiplicité du zéro du diviseur thêta en un point de la jacobienne est égale à la dimension d'un système linéaire complet de degré un de moins que le genre de C . [9]

3.2. Riemann a aussi montré que, si $2(d - 1) \geq g$ et $d - 1 < g$, G_d^1 n'est pas vide. Kleiman et Laksov, dans [7], montrent qu'en général si $(r + 1)(d - r) \geq rg$ et si $d - r < g$, G_d^r n'est pas vide. Pour ceci, ils utilisent le théorème de Kempf, qui dit, en particulier, que $\alpha : \mathbb{P}_d \rightarrow \text{Grass}_g(H)$ est génériquement transversal à chaque cycle spécial de Schubert qui correspond aux G_d^0 .

3.2. Si C est lisse, hyperelliptique, alors, si $g \geq 3$, G_2^0 a une singularité unique correspondant à un g_2^1 . La variété projective correspondant au cône tangent en ce point correspond à l'image de la courbe dans $\mathbb{P}(H^0(C, \omega_C))$. Cette

courbe est lisse, rationnelle, de degré $(g-1)$. Il y a $(g-1)(g-2)/2$ quadriques linéairement indépendantes qui s'annulent sur cette courbe.

3.4. Si C est lisse, non hyperelliptique, $g \geq 4$, alors G_3^0 a une singularité unique correspondant au g_3^0 . La variété projective associée au cône tangent de G_3^0 en ce point correspond à une surface rationnelle, réglée de degré $(g-2)(g-3)/2$. Il y a $(g-2)(g-3)/2$ quadriques linéairement indépendantes qui s'annulent sur cette surface. Par le théorème de Noether, ce sont les seules quadriques qui s'annulent sur l'image de la courbe dans $\mathbb{P}(H^0(C, \omega_C))$. [1]

3.5. Soit F un polynôme irréductible, homogène de degré $d \geq 6$, en 3 variables, qui définissent une courbe lisse dans \mathbb{P}_k^2 . Le cône tangent à G_d^0 au point correspondant au g_d^2 fourni par la situation est le cône défini par l'accouplement régulier $A_i \times A_{d-4} \rightarrow A_{d-3}$, où A_i désigne l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré i en 3 variables.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ANDREOTTI and A. L. MAYER - On period relations for abelian integrals on curves, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Series 3, vol. 21 (1967), p. 189-238.
- [2] J. A. EAGON and M. HOCHSTER - A class of perfect determinantal ideals, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 5, n° 5, sept. 1970.
- [3] J. A. EAGON and D. G. NORTHCOTT - Ideals defined by the minors of a matrix.
- [4] J. I. IGUSA - On the arithmetical normality of the Grassmann variety, Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 40 (1954).
- [5] G. KEMPF - The singularities of certain varieties in the Jacobian of a Curve, Thèse Columbia Univ., 1971.
- [6] J.-L. KLEIMAN - Geometry on Grassmannians ..., Publ. Math. I. H. E. S., Paris, n° 36 (1969).
- [7] J.-L. KLEIMAN, D. LAKSOV - On the existence of special divisors, à paraître
- [8] D. LAKSOV - Concerning the arithmetical Cohen-Macaulay of Schubert schemes, à paraître.
- [9] G. F. B. RIEMANN - Gesamelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass, 2^d édition, Dover, New York.