JACQUES DIXMIER

Certaines représentations infinies des algèbres de Lie semi-simples

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. nº 425, p. 141-156

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__141_0>

Séminaire BOURBAKI
25e année, 1972/73, n° 425

CERTAINES REPRÉSENTATIONS INFINIES DES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

par Jacques DIXMIER

Les modules $M(\lambda)$ étudiés ici ont été considérés depuis assez longtemps (cf. par exemple [5]). Mais les premiers résultats difficiles à leur sujet sont dus à Verma [6]. Peu après, Bernstein, Gelfand, Gelfand ont à leur tour beaucoup approfondi la structure des $M(\lambda)$ [1], [2]. Ils ont aussi montré qu'on peut en déduire facilement certains théorèmes classiques. Comme on veut mettre ce point en évidence ci-dessous, il faut préciser ce qu'on suppose connu :

1) la théorie élémentaire des algèbres de Lie (Bourbaki, chap. I) ;
2) les propriétés des systèmes de racines (Bourbaki, chap. VI) ;
3) les représentations de $\underline{sl}(2,k)$;
4) la décomposition d'une algèbre de Lie semi-simple en sous-espaces radiciels correspondant à une sous-algèbre de Cartan.

On ne suppose pas connu le théorème d'existence d'une algèbre de Lie ayant un système de racines donné (et encore moins la classification) ; on ne suppose rien sur les modules de dimension finie.

Notations. On note k un corps commutatif de caractéristique 0, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur k, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan déployante de $\mathfrak{g}$, R le système de racines de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, W le groupe de Weyl, B une base de R, R_+ (resp. R_-) l'ensemble des racines > 0 (resp. < 0) relativement à B, P l'ensemble des poids, Q l'ensemble des poids radiciels, Q_+ l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de B à coefficients dans $\mathbb{N}$, P_{++} l'ensemble des poids dominants, $\mu \leq \lambda$ la relation d'ordre $\lambda - \mu \in Q_+$ dans $\mathfrak{h}^*$. Si $w \in W$, on note $\ell(w)$ la longueur de w relativement à B, et $\varepsilon(w)$ le déterminant de w, égal à 1 ou -1 suivant que $\ell(w)$ est pair ou impair. On pose $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R_+} \alpha$, $\underline{n}_+ = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}^{\alpha}$,

$\underline{n}_- = \sum_{\alpha \in R_-} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} + \underline{n}_+$, $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} + \underline{n}_-$. Si $\nu \in \mathfrak{h}^*$, on note $\mathcal{P}(\nu)$ le nombre de familles $(n_\alpha)_{\alpha \in R_+}$, où les n_α sont des entiers ≥ 0 tels que $\nu = \sum_{\alpha \in R_+} n_\alpha . \alpha$; on a $\mathcal{P}(\nu) > 0 \Leftrightarrow \nu \in Q_+$.

1. Les modules $M(\lambda)$ et $L(\lambda)$

1.1. Soient V un espace vectoriel, π une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V . Pour tout $\mu \in \mathfrak{h}^*$, on note V_μ l'ensemble des $v \in V$ tels que $\pi(x)v = \mu(x)v$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$. Si $V_\mu \neq 0$, on dit que μ est un poids de π , et $\dim V_\mu$ s'appelle la multiplicité du poids μ . La somme des V_μ est directe.

1.2. PROPOSITION.- (i) Soient α , $\mu \in \mathfrak{h}^*$. On a $\pi(\mathfrak{g}^\alpha)V_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$.
(ii) La somme $\bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$ est stable pour π .

Si $H \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ et $v \in V_\mu$, on a

$$HXv = XHv + [H,X]v = X\mu(H)v + \alpha(H)Xv = (\mu + \alpha)(H)Xv$$

d'où (i), et (i) entraîne (ii).

1.3. La représentation π peut n'admettre aucun poids. Pour les représentations qu'on va étudier ici, on aura au contraire $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$. (C'est toujours le cas si $\dim V < +\infty$; cf. 2.1.)

1.4. Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Soit τ_λ la représentation de dimension 1 de $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} + \underline{n}_+$ qui s'annule sur $\underline{n}_+$ et prolonge λ . Cela permet de considérer k comme un $\mathfrak{b}_+$-module, donc un $U(\mathfrak{b}_+)$-module à gauche (on note U l'algèbre enveloppante). On peut envisager $U(\mathfrak{g})$ comme un $U(\mathfrak{b}_+)$-module à droite (et ce module est libre), donc former $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} k$, qui est un $U(\mathfrak{g})$-module à gauche. Ce module se note $M(\lambda)$.

L'élément $v = 1 \otimes 1$ engendre $M(\lambda)$; on l'appelle le générateur canonique de $M(\lambda)$. Si $X \in \underline{n}_+$, on a $Xv = 1 \otimes X.1 = 0$. Si $H \in \mathfrak{h}$, on a $Hv = 1 \otimes H.1 = \lambda(H)v$.

L'annulateur I de v dans $U(\mathfrak{g})$ est un idéal à gauche qui contient $\underline{n}_+$ et les $H - \lambda(H)$ $(H \in \mathfrak{h})$. Grâce à Poincaré-Birkhoff-Witt, il est facile de voir que I est l'idéal à gauche engendré par $\underline{n}_+$ et les $H - \lambda(H)$. Le module $M(\lambda)$ s'identifie à $U(\mathfrak{g})/I$ muni de la représentation régulière gauche. Toujours grâce à PBW, on a $U(\mathfrak{g}) = U(\underline{n}_-) \oplus I$. On peut donc encore identifier $M(\lambda)$ à $U(\underline{n}_-)$. Après cette identification, l'action de $\mathfrak{h}$ et $\underline{n}_+$ n'est pas transparente (sans être bien difficile à expliciter), mais l'action de $\underline{n}_-$, et même de $U(\underline{n}_-)$, est simplement la multiplication à gauche.

1.5. PROPOSITION.- <u>Soit</u> $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. <u>Pour tout</u> $\alpha \in R$, <u>soit</u> $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha - \{0\}$. <u>Soient</u> $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ <u>les éléments, deux à deux distincts, de</u> R_+.

(i) <u>On a</u> $M(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} M(\lambda)_\mu$.

(ii) <u>Les poids de</u> $M(\lambda)$ <u>appartiennent à</u> $\lambda - Q_+$. <u>Pour tout</u> $\mu \in \mathfrak{h}^*$, <u>on a</u> $\dim M(\lambda)_\mu = \mathfrak{P}(\lambda - \mu)$.

(iii) <u>Pour tout</u> $\mu \in \mathfrak{h}^*$, <u>on a</u>

$$M(\lambda)_\mu = \sum_{p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N},\ \lambda - p_1\alpha_1 - \ldots - p_n\alpha_n = \mu} X_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes k .$$

(iv) <u>On a</u> $M(\lambda)_\lambda = 1 \otimes k$, $M(\lambda) = U(\underline{n}_-).M(\lambda)_\lambda$, <u>et</u> $U(\underline{n}_+).M(\lambda)_\lambda = 0$.

Les $X_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes 1$ forment une base de $M(\lambda)$, et l'on a, pour tout $H \in \mathfrak{h}$,

$$\begin{aligned} H.(X_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes 1) &= [H, X_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n}] \otimes 1 + X_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} H \otimes 1 \\ &= (-p_1\alpha_1 - \ldots - p_n\alpha_n)(H) X_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes 1 + X_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes \lambda(H) \\ &= (\lambda - p_1\alpha_1 - \ldots - p_n\alpha_n)(H)(X_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes 1) . \end{aligned}$$

Cela prouve (iii). Le reste est évident ou résulte de (iii).

1.6. Les $M(\lambda)$ jouent à certains égards un rôle universel :

PROPOSITION.- <u>Soient</u> V <u>un</u> $\mathfrak{g}$-<u>module,</u> $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, v <u>un élément</u> $\neq 0$ <u>de</u> V_λ

annulé par $\mathfrak{n}_+$. *On suppose que* V *est engendré par* v *comme* $\mathfrak{g}$*-module.*

(i) *Il existe un* $\mathfrak{g}$*-homomorphisme* φ *et un seul de* $M(\lambda)$ *dans* V *tel que* $\varphi(1 \otimes 1) = v$. *Cet homomorphisme est surjectif.*

(ii) *On a* $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$. *Chaque* V_μ *est de dimension finie, et* $\dim V_\lambda = 1$. *Tout poids de* V *est* $\leq \lambda$.

(iii) *On a* $V = U(\mathfrak{n}_-).v$.

(iv) *Tout endomorphisme de* V *est scalaire.*

(v) *Pour que l'homomorphisme* φ *de* (i) *soit bijectif, il faut et il suffit que, pour tout* $u \in U(\mathfrak{n}_-)$, u_V *soit injectif.*

(i) résulte de 1.4 ; alors (ii), (iii) et la nécessité de (v) résultent de ce qu'on sait de $M(\lambda)$; la suffisance de (v) est facile. Soit c un $\mathfrak{g}$-endomorphisme de V . Pour $H \in \mathfrak{h}$, on a $H_V cv = cH_V v = c\lambda(H)v$, donc $cv = \xi v$ pour un $\xi \in k$; alors, pour tout $u \in U(\mathfrak{g})$, on a $cu_V v = u_V cv = u_V \xi v$, d'où $c = \xi.1$.

1.7. Soit $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$. Il résulte de 1.6(iv) appliqué pour $V = M(\lambda)$ qu'il existe un homomorphisme χ_λ de $Z(\mathfrak{g})$ dans k tel que $z_V = \chi_\lambda(z).1$ pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$. On dit que χ_λ est le caractère central de $M(\lambda)$.

1.8. D'après 1.6, il importe de connaître les sous-$\mathfrak{g}$-modules de $M(\lambda)$. Ce sera l'un de nos buts principaux. Pour l'instant, contentons-nous de quelques résultats élémentaires.

1.9. PROPOSITION.- *Soit* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

(i) *Soit* $M(\lambda)_+ = \sum_{\mu \neq \lambda} M(\mu)$. *Tout sous-*$\mathfrak{g}$*-module de* $M(\lambda)$ *distinct de* $M(\lambda)$ *est contenu dans* $M(\lambda)_+$.

(ii) *Il existe un plus grand sous-*$\mathfrak{g}$*-module* K *de* $M(\lambda)$ *distinct de* $M(\lambda)$. *Le* $\mathfrak{g}$*-module* $M(\lambda)/K$ *est absolument simple.*

Soit F un sous-$\mathfrak{g}$-module de $M(\lambda)$. On a $F = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} F \cap M(\lambda)_\mu$. Si $F \neq M(\lambda)$, on a $F \cap M(\lambda)_\lambda = 0$, donc $F \subset M(\lambda)_+$. La somme des sous-$\mathfrak{g}$-modules de $M(\lambda)$ distincts de $M(\lambda)$ est donc distincte de $M(\lambda)$. Le $\mathfrak{g}$-module

$M(\lambda)/K$ est simple ; il est absolument simple d'après 1.6(iv).

1.10. Avec les notations de 1.9, on désigne par $L(\lambda)$ le $\mathfrak{g}$-module $M(\lambda)/K$. On peut lui appliquer 1.6. L'image dans $L(\lambda)$ du générateur canonique de $M(\lambda)$ s'appelle le générateur canonique de $L(\lambda)$.

1.11. PROPOSITION.- Soient V un $\mathfrak{g}$-module simple, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $v \in V_\lambda - \{0\}$. On suppose que $\underline{n}_+ . v = 0$. Alors V est isomorphe à $L(\lambda)$.

Cela résulte aussitôt de 1.6.

1.12. Changeons de notation. Ce qu'on notait jusqu'ici $M(\lambda)$ sera noté $M(\lambda + \delta)$. Autrement dit, le plus grand poids de $M(\lambda)$ sera $\lambda - \delta$ au lieu de λ (idem pour $L(\lambda)$). L'avantage de cette convention bizarre commence avec l'énoncé suivant :

PROPOSITION.- Soient $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \in B$, $m = \lambda(H_\alpha)$. Supposons $m \in \mathbb{N}$. Soient v le générateur canonique de $M(\lambda)$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha} - \{0\}$, $v' = X^m_{-\alpha} v$, V le sous-$\mathfrak{g}$-module de $M(\lambda)$ engendré par v'. Alors V est isomorphe à $M(s_\alpha \lambda)$.

On a $v' \neq 0$ (1.6). Pour tout $u \in U(\underline{n}_-)$, $u_V = u_{M(\lambda)}|V$ est injectif. On a $s_\alpha\lambda = \lambda - m\alpha$, donc $v' \in M(\lambda)_{s_\alpha\lambda-\delta}$ (1.2). Pour $\beta \in B$ et $\beta \neq \alpha$, on a $[\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^\beta] = 0$ et $\mathfrak{g}^\beta v = 0$, donc $\mathfrak{g}^\beta v' = 0$. Si $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ est tel que $[X_\alpha , X_{-\alpha}] = H_\alpha$ (où $\alpha(H_\alpha) = 2$), alors

$$X_\alpha v' = X_\alpha X^m_{-\alpha} v = X^m_{-\alpha} X_\alpha v + [X_\alpha , X^m_{-\alpha}]v = [X_\alpha , X^m_{-\alpha}]v$$

soit, d'après une formule de commutation facile

$$= mX^{m-1}_{-\alpha}(H_\alpha - m + 1)v = mX^{m-1}_{-\alpha}(\lambda(H_\alpha) - \delta(H_\alpha) - m + 1)v = 0$$

car $\delta(H_\alpha) = 1$. Ainsi, $\underline{n}_+ v' = 0$, et il suffit d'appliquer 1.6(v).

2. Représentations de dimension finie

On ne va pas insister sur cette théorie classique. Notons tout de même que l'essentiel, c'est-à-dire le th. 2.5, s'obtient en 2 pages en suivant la marche suivante.

2.1. PROPOSITION.- Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie.

(i) On a $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$.

(ii) Tout poids de V appartient à P .

(iii) Si μ est un poids de V et si $w \in W$, $w\mu$ est un poids de V de même multiplicité que μ .

On peut supposer V simple. Alors (i) résulte de 1.2 du moins si k est algébriquement clos car il existe alors au moins un poids. Le reste est facile en appliquant aux sous-algèbres $\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + kH_\alpha$ $(\alpha \in R)$ la théorie des représentations de $\underline{\mathrm{sl}}(2,k)$.

2.2. PROPOSITION.- Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie.

(i) Il existe un $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et un seul tel que V soit isomorphe à $L(\lambda + \delta)$.

(ii) On a $\lambda \in P_{++}$ et λ est poids de multiplicité 1 .

(iii) Si μ est poids de V , on a $\mu \leq \lambda$.

Il existe un poids λ tel que, pour tout $\alpha \in B$, $\lambda + \alpha$ ne soit plus un poids. Alors tout résulte de 1.11, sauf l'assertion $\lambda \in P_{++}$ qui s'obtient grâce à la théorie de $\underline{\mathrm{sl}}(2,k)$.

2.3. Lemme.- Soient V , λ , v vérifiant les hypothèses de 1.6. Pour tout $\alpha \in R$, soit $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha - \{0\}$. On suppose que, pour tout $\beta \in B$, $X_{-\beta}^m v = 0$ pour m assez grand. Alors V est simple de dimension finie.

Cela, sans être long, est plus astucieux ; cf. [6], p. VII-12.

2.4. Lemme.- Soient $\lambda \in P_{++}$, K le plus grand sous-$\mathfrak{g}$-module de $M(\lambda + \delta)$ distinct de $M(\lambda + \delta)$, v le générateur canonique de $M(\lambda + \delta)$. Pour tout $\beta \in B$, soient $X_{-\beta} \in \mathfrak{g}^{-\beta} - \{0\}$ et $m_\beta = \lambda(H_\beta) + 1$. On a

$$K = \sum_{\beta \in B} U(\mathfrak{g}) X_{-\beta}^{m_\beta} v = \sum_{\beta \in B} U(\underline{n}_-) X_{-\beta}^{m_\beta} v$$

et $\dim M(\lambda + \delta)/K < +\infty$.

Soit $\beta \in B$. Comme $(\lambda + \delta)(H_\beta) = m_\beta \in \mathbb{N}^*$, le sous-$\mathfrak{g}$-module Y_β de $M(\lambda + \delta)$ engendré par $X_{-\beta}^{m_\beta} v$ est $U(\underline{n}_-) X_{-\beta}^{m_\beta} v$ (1.12) et est distinct de

$M(\lambda+\delta)$. Donc $\sum_{\beta \in B} Y_\beta \subset K$. D'après 2.3, $M(\lambda+\delta)/\sum_{\beta\in B} Y_\beta$ est simple de dimension finie. Donc $\sum_{\beta \in B} Y_\beta = K$ et $\dim M(\lambda+\delta)/K < +\infty$.

2.5. THÉORÈME.- <u>L'application</u> $\lambda \mapsto [L(\lambda+\delta)]$ <u>est une bijection de</u> P_{++} <u>sur l'ensemble des classes de</u> $\mathfrak{g}$<u>-modules simples de dimension finie</u>.

Résulte aussitôt de 2.2 et 2.4.

2.6. En même temps, et compte tenu de 1.4, on a obtenu le résultat suivant :

PROPOSITION.- <u>Soit</u> $\lambda \in P_{++}$. <u>Pour tout</u> $\beta \in B$, <u>soient</u> $m_\beta = \lambda(H_\beta)+1$ <u>et</u> $X_{-\beta} \in \mathfrak{g}^{-\beta} - \{0\}$. <u>L'annulateur du générateur canonique de</u> $L(\lambda+\delta)$ <u>est</u>

$$U(\mathfrak{g})\underline{n}_+ + \sum_{h\in\mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h-\lambda(h)) + \sum_{\beta\in B} U(\mathfrak{g})X_{-\beta}^{m_\beta}$$

$$= U(\mathfrak{g})\underline{n}_+ + \sum_{h\in\mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h-\lambda(h)) + \sum_{\beta\in B} U(\underline{n}_-)X_{-\beta}^{m_\beta} .$$

3. <u>Invariants dans l'algèbre symétrique</u>

3.1. On identifie l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}^*)$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}^*$ à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}$ opère canoniquement dans $\mathfrak{g}$ (représentation adjointe), donc dans $\mathfrak{g}^*$ et $S(\mathfrak{g}^*)$, on peut parler d'éléments invariants de $S(\mathfrak{g}^*)$. Ce sont d'ailleurs les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ invariantes par les automorphismes élémentaires de $\mathfrak{g}$ (un automorphisme élémentaire est un produit fini d'automorphismes $\exp \operatorname{ad} x$, x nilpotent dans $\mathfrak{g}$). Notons $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments invariants de $S(\mathfrak{g}^*)$. Notons $S(\mathfrak{h}^*)^W$ l'ensemble des éléments W-invariants de $S(\mathfrak{h}^*)$.

3.2. <u>Lemme</u>.- <u>Soient</u> π <u>une représentation de dimension finie de</u> $\mathfrak{g}$, <u>et</u> $m \in \mathbb{N}$. <u>La fonction</u> $x \mapsto \operatorname{tr}(\pi(x)^m)$ <u>sur</u> $\mathfrak{g}$ <u>appartient à</u> $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$.

En multilinéarisant, cela résulte aussitôt des propriétés "commutatives" de la trace.

3.3. <u>Lemme</u>.- <u>Soit</u> $m \in \mathbb{N}$. <u>Tout élément de</u> $S^m(\mathfrak{h}^*)^W$ <u>est combinaison linéaire de fonctions polynomiales sur</u> $\mathfrak{h}$ <u>de la forme</u> $x \mapsto \operatorname{tr}(\pi(x)^m)$, <u>où</u> π <u>est une représentation de dimension finie de</u> $\mathfrak{g}$.

Pour toute $f \in S(\mathfrak{h}^*)$, soit $\sigma f = \sum_{w \in W} f \circ w$. Les λ^m $(\lambda \in P)$ engendrent $S^m(\mathfrak{h}^*)$ comme espace vectoriel, donc les $\sigma(\lambda^m)$ $(\lambda \in P_{++})$ engendrent $S^m(\mathfrak{h}^*)^W$. Soit π une représentation simple de plus grand poids λ de $\mathfrak{g}$. La fonction $x \mapsto g(x) = tr(\pi(x)^m)$ sur $\mathfrak{h}$ est combinaison linéaire à coefficients $\neq 0$ de $\sigma(\lambda^m)$ et des $\sigma(\mu^m)$ pour $\mu \in P_{++}$, $\mu < \lambda$. Par récurrence sur les éléments de P_{++} , on prouve donc que $\sigma(\lambda^m)$ est une combinaison linéaire du type annoncé.

3.4. THÉORÈME (Chevalley).- Soit $i : S(\mathfrak{g}^*) \to S(\mathfrak{h}^*)$ l'homomorphisme de restriction. L'application $i|S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ est un isomorphisme de $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ sur $S(\mathfrak{h}^*)^W$.

Démonstration (attribuée à Kostant et Steinberg dans [7]). Pour tout $\alpha \in R$, la réflexion s_α de W est la restriction à $\mathfrak{h}$ de l'automorphisme élémentaire $(\exp \operatorname{ad} X_\alpha)(\exp \operatorname{ad} X_{-\alpha})(\exp \operatorname{ad} X_\alpha)$ (calcul facile). Donc $i(S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}) \subset S(\mathfrak{h}^*)^W$. On a égalité d'après 3.2 et 3.3. Soit $f \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ tel que $f|\mathfrak{h} = 0$ et prouvons que $f = 0$. On peut supposer k algébriquement clos. Alors les transformés de $\mathfrak{h}$ par les automorphismes élémentaires contiennent tous les éléments réguliers de $\mathfrak{g}$, donc $f = 0$.

3.5. La forme de Killing définit un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$, donc de $S(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{g}^*)$. Comme l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est $\underline{n}_+ \oplus \underline{n}_-$, une traduction facile de 3.4 donne :

THÉORÈME.- Soit J l'idéal de $S(\mathfrak{g})$ engendré par $\underline{n}_+ \oplus \underline{n}_-$. On a $S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}) \oplus J$; soit j l'homomorphisme $S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})$ défini par cette décomposition. Alors $j|S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ est un isomorphisme de l'algèbre $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sur l'algèbre $S(\mathfrak{h})^W$.

4. L'homomorphisme de Harish-Chandra

4.1. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ les éléments de R_+ , deux à deux distincts. Pour tout $\alpha \in R$, soit $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha - \{0\}$. Soit $(H_1,\ldots,H_\ell)$ une base de $\mathfrak{h}$. D'après PBW, les éléments $u((q_i),(m_i),(p_i)) = X_{-\alpha_1}^{q_1}\ldots X_{-\alpha_n}^{q_n} H_1^{m_1}\ldots H_\ell^{m_\ell} X_{\alpha_1}^{p_1}\ldots X_{\alpha_n}^{p_n}$ forment une base de $U(\mathfrak{g})$. Pour $h \in \mathfrak{h}$, on a

$$[h,u((q_i),(m_i),(p_i))] = ((p_1 - q_1)\alpha_1 + \dots + (p_n - q_n)\alpha_n)(h)u((q_i),(m_i),(p_i)) .$$

Donc, pour la représentation adjointe, on a $U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda \in Q} U(\mathfrak{g})_\lambda$. En particulier, $U(\mathfrak{g})_0$ est le commutant de $\mathfrak{h}$ dans $U(\mathfrak{g})$, donc est une sous-algèbre de $U(\mathfrak{g})$.

4.2. Lemme.- (i) On a $U(\mathfrak{g})_0 \cap \underline{n}_- U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})_0 \cap U(\mathfrak{g})\underline{n}_+$, et cet ensemble est un idéal bilatère L de $U(\mathfrak{g})_0$.

(ii) On a $U(\mathfrak{g})_0 = U(\mathfrak{h}) \oplus L$.

En effet, $\underline{n}_- U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\mathfrak{g})\underline{n}_+$) est l'ensemble des combinaisons linéaires des $u((q_i),(m_i),(p_i))$ tels que $\Sigma\, q_i > 0$ (resp. $\Sigma\, p_i > 0$) . D'autre part,

$$u((q_i),(m_i),(p_i)) \in U(\mathfrak{g})_0 \Leftrightarrow p_1\alpha_1 + \dots + p_n\alpha_n = q_1\alpha_1 + \dots + q_n\alpha_n ,$$

d'où (i). Si $u = u((q_i),(m_i),(p_i)) \in U(\mathfrak{g})_0$, on a $u \in U(\mathfrak{h})$ (resp. L) si et seulement si $p_1 + \dots + q_n = 0$ (resp. > 0), d'où (ii).

4.3. D'après 4.2, le projecteur de $U(\mathfrak{g})_0$ sur $U(\mathfrak{h})$ de noyau L est un homomorphisme d'algèbres φ , l'homomorphisme de Harish-Chandra de $U(\mathfrak{g})_0$ sur $U(\mathfrak{h})$. Identifiant $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$ à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}^*$, on a alors :

4.4. PROPOSITION.- Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. On a, pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$,

$$\chi_\lambda(z) = (\varphi(z))(\lambda - \delta) .$$

Car il existe $u_1,\dots,u_p \in U(\mathfrak{g})$ et $n_1,\dots,n_p \in \underline{n}_+$ tels que $z = \varphi(z) + u_1n_1 + \dots + u_pn_p$. Alors, si v est le générateur canonique de $M(\lambda)$, on a $\chi_\lambda(z)v = zv = \varphi(z)v = (\varphi(z))(\lambda - \delta)v$.

4.5. THÉORÈME [3].- Soit γ l'automorphisme de l'algèbre $S(\mathfrak{h})$ qui transforme la fonction polynomiale p sur $\mathfrak{h}^*$ en la fonction $\lambda \longmapsto p(\lambda - \delta)$. Soient $U(\mathfrak{g})_0$ et φ comme en 4.3. Alors $(\gamma \circ \varphi)|Z(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme de l'algèbre $Z(\mathfrak{g})$ sur l'algèbre $S(\mathfrak{h})^W$.

Démonstration [7]. Soient $\alpha \in B$, $\lambda \in P_{++}$, $\mu = s_\alpha\lambda$. Alors $M(\mu)$ est isomorphe à un sous-$\mathfrak{g}$-module de $M(\lambda)$ (1.12), donc $\chi_\lambda = \chi_\mu$. D'après 4.4, on a, pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$,

$$((\gamma \circ \varphi)(z))(\lambda) = (\varphi(z))(\lambda - \delta) = \chi_\lambda(z) = \chi_\mu(z) = ((\gamma \circ \varphi)(z))(\mu) .$$

Ainsi, les fonctions polynomiales $(\gamma \circ \varphi)(z)$ et $(\gamma \circ \varphi)(z) \circ s_\alpha$ coïncident sur P_{++} , donc sont égales ; d'où $(\gamma \circ \varphi)(Z(\mathfrak{g})) \subset S(\mathfrak{h})^W$. Il reste à prouver l'assertion

(A) $\gamma \circ \varphi$ applique bijectivement $Z(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{h})^W$.

Or φ ressemble beaucoup à l'homomorphisme j de 3.5 (dans les deux cas, on "efface" les termes dans $\underline{n}_+$ ou $\underline{n}_-$). Comme l'assertion analogue à (A) pour j est vraie (3.6), (A) est vraie d'après un argument classique de passage au gradué associé (on sait que $S(\mathfrak{g})$ est l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée $U(\mathfrak{g})$; d'autre part, $gr(\gamma)$ est l'identité).

4.6. COROLLAIRE 1.- <u>L'algèbre</u> $Z(\mathfrak{g})$ <u>est une algèbre de polynômes en</u> ℓ <u>indéterminées</u> ($\ell = \dim \mathfrak{h}$) .

4.7. COROLLAIRE 2.- <u>Si</u> λ , $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$, <u>on a</u> $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'} \Leftrightarrow \lambda' \in W\lambda$.

D'après 4.6 et 4.5, dire que $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ revient à dire que λ et λ' définissent le même homomorphisme de $S(\mathfrak{h})^W$ dans k .

4.8. COROLLAIRE 3.- <u>Si</u> k <u>est algébriquement clos, tout homomorphisme de</u> $Z(\mathfrak{g})$ <u>dans</u> k <u>est de la forme</u> χ_λ .

En effet, tout homomorphisme de $S(\mathfrak{h})^W$ dans k se prolonge en un homomorphisme de $S(\mathfrak{h})$ dans k , donc est défini par un $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

5. <u>Caractères</u>

5.1. Soit $\mathbf{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ l'ensemble des fonctions à valeurs entières sur $\mathfrak{h}^*$. Nous préférons écrire $\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} f(\lambda)\, e^\lambda$ une telle fonction (où les e^λ sont des "symboles"). Les éléments de $\mathbf{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ à support fini forment l'algèbre $\mathbf{Z}[\mathfrak{h}^*]$ (on a $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$). On introduit $\mathbf{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ entre $\mathbf{Z}[\mathfrak{h}^*]$ et $\mathbf{Z}^{\mathfrak{h}^*}$; c'est l'ensemble des $f \in \mathbf{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ dont le support S possède la propriété suivante : S est contenu dans une réunion finie d'ensembles de la forme $\nu - Q_+$, où $\nu \in \mathfrak{h}^*$. Grâce à cette propriété de supports, on peut munir $\mathbf{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ d'une multiplication prolongeant celle de $\mathbf{Z}[\mathfrak{h}^*]$:

$$(\sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} c_\lambda e^\lambda)(\sum_{\mu\in\mathfrak{h}^*} c'_\mu e^\mu) = \sum_{\nu\in\mathfrak{h}^*} (\sum_{\lambda+\mu=\nu} c_\lambda c'_\mu) e^\nu .$$

5.2. <u>Lemme</u>.- <u>On pose</u> $d = \sum_{w\in W} \varepsilon(w) e^{w\delta} \in \mathbf{Z}[\mathfrak{h}^*]$, $K = \sum_{\gamma\in Q_+} \mathcal{P}(\gamma) e^{-\gamma} \in \mathbf{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$. <u>Dans</u> $\mathbf{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$, <u>on a</u> $Ke^{-\delta}d = 1$; <u>en particulier</u>, d <u>est inversible</u>.

La définition de K entraîne que

$$K = \prod_{\alpha\in R_+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \ldots) .$$

D'autre part, il est connu que

$$d = e^\delta \prod_{\alpha\in R_+} (1 - e^{-\alpha}) .$$

5.3. On dit qu'un $\mathfrak{g}$-module V admet un caractère si $V = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} V_\mu$ et si $\dim V_\mu < +\infty$ pour tout μ . On pose alors $\mathrm{ch}V = \sum_{\mu\in\mathfrak{h}^*} (\dim V_\mu) e^\mu$.

5.4. PROPOSITION.- <u>Soit</u> $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. <u>Alors</u> $\mathrm{ch}M(\lambda) \in \mathbf{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$, <u>et</u>

$$\mathrm{ch}M(\lambda) = d^{-1}.e^\lambda .$$

Cela résulte aussitôt de 1.5 et 5.2.

5.5. <u>Lemme</u> [1].- <u>Soit</u> $\lambda_o \in \mathfrak{h}^*$. <u>Soit</u> M <u>un</u> $\mathfrak{g}$-<u>module tel que</u> :

a) M <u>admet le caractère central</u> χ_{λ_o} ;

b) M <u>admet un caractère qui appartient à</u> $\mathbf{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$.

<u>Soit</u> D_M <u>l'ensemble des</u> $\lambda \in W\lambda_o$ <u>tels que</u> $\lambda - \delta + Q_+$ <u>rencontre le support de</u> $\mathrm{ch}M$. <u>Alors</u> $\mathrm{ch}M$ <u>est combinaison</u> $\mathbf{Z}$-<u>linéaire des</u> $\mathrm{ch}M(\lambda)$ <u>pour</u> $\lambda \in D_M$.

Soit $\mu - \delta$ un élément maximal de Supp chM , et posons $\dim M_{\mu-\delta} = m$. Il existe un $\mathfrak{g}$-homomorphisme φ de $(M(\mu))^m$ dans M qui applique bijectivement $(M(\mu)_{\mu-\delta})^m$ sur $M_{\mu-\delta}$ (1.6). Le caractère central de $M(\mu)$ est donc χ_{λ_o} , d'où $\mu \in W\lambda$ (4.7). On a une suite exacte

$$0 \to L \to M(\mu)^m \to M \to N \to 0$$

et L , N vérifient les mêmes propriétés que M (avec $D_L \subset D_M$, $D_N \subset D_M$), mais n'admettent plus le poids $\mu - \delta$. On en déduit facilement que

Card D_L , Card D_N < Card D_M . Raisonnant par récurrence, le lemme est vrai pour L et N . Or $\mathrm{ch}M = m\,\mathrm{ch}M(\mu) - \mathrm{ch}L + \mathrm{ch}N$.

5.6. THÉORÈME.- Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie, de plus grand poids λ .

(i) On a $\mathrm{ch}V = d^{-1} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\delta)}$.

(ii) Si $\mu \in \mathfrak{h}^*$, la multiplicité de μ comme poids de V est

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w)(\mathfrak{P}(w(\lambda + \delta) - (\mu + \delta)) .$$

En effet ([1]), d'après 5.4 et 5.5, $d\,\mathrm{ch}V$ est combinaison linéaire des $e^{w(\lambda+\delta)}$ pour $w \in W$. D'autre part, $w(d) = \varepsilon(w)d$ et $w(\mathrm{ch}V) = \mathrm{ch}V$ pour tout $w \in W$. Donc $d\,\mathrm{ch}V$ est proportionnel à $\sum_{w \in W} \varepsilon(w)e^{w(\lambda+\delta)}$, d'où facilement (i). Compte tenu de 5.2, on a

$$\mathrm{ch}V = (Ke^{-\delta})(d\,\mathrm{ch}V) = \Big(\sum_{\gamma \in Q_+} \mathfrak{P}(\gamma)e^{-\delta-\gamma}\Big)\Big(\sum_{w \in W} \varepsilon(w)e^{w(\lambda+\delta)}\Big) ,$$

d'où (ii).

6. Sous-modules de $M(\lambda)$

6.1. PROPOSITION.- Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Alors $M(\lambda)$ est de longueur finie. Tout sous-quotient simple de $M(\lambda)$ est isomorphe à $L(\lambda')$ pour un $\lambda' \in W\lambda \cap (\lambda - Q_+)$.

Un sous-quotient simple de $M(\lambda)$ est un $L(\lambda')$ d'après 1.11 ; on a $\lambda' \in \lambda - Q_+$ d'après 1.5(ii), $\lambda' \in W\lambda$ d'après 4.7. Il n'y a donc, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de possibilités pour les sous-quotients. Si $M(\lambda)$ n'est pas de longueur finie, il admet une suite infinie strictement décroissante de sous-modules, avec quotients simples (car $M(\lambda)$ est noethérien). Alors une infinité de ces quotients sont isomorphes, d'où contradiction avec 1.5(ii).

6.2. En fait, la plupart du temps, $M(\lambda)$ est simple :

THÉORÈME.- Pour que $M(\lambda)$ soit simple, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in R_+$, on ait $\lambda(H_\alpha) \notin \{1,2,3,\ldots\}$.

Ce théorème résulte aussitôt de 6.5 et 6.8 ci-dessous.

6.3. Dans le cas général, on sait déterminer les sous-quotients simples de $M(\lambda)$ (mais pas leur multiplicité) :

THÉORÈME [2].- <u>Soient</u> λ , $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $L(\lambda')$ <u>est un sous-quotient simple de</u> $M(\lambda)$;

(ii) <u>il existe</u> $\gamma_1,\dots,\gamma_n \in R_+$ <u>tels que</u>

$$\lambda \geq s_{\gamma_1}\lambda \geq s_{\gamma_2}s_{\gamma_1}\lambda \geq \dots \geq s_{\gamma_n}\dots s_{\gamma_2}s_{\gamma_1}\lambda = \lambda' .$$

Démonstration difficile.

6.4. La condition (ii) de 6.3 est plus stricte que la condition $\lambda' \in W\lambda \cap (\lambda - Q_+)$ (elle lui est équivalente pour A_2 , mais déjà plus pour B_2 [7]).

6.5. Au lieu de nous intéresser aux sous-quotients simples de $M(\lambda)$, intéressons-nous aux sous-modules de $M(\lambda)$. Verma avait cru démontrer que tout sous-module de $M(\lambda)$ est somme des sous-modules du type $M(\mu)$ qu'il contient. Malheureusement, un contre-exemple (pour A_3) est indiqué dans [1]. Ce fait rend très obscure la structure de l'ensemble des sous-modules de $M(\lambda)$. Toutefois, la recherche des sous-modules du type $M(\mu)$ est une étape importante, car :

PROPOSITION [7].- <u>Tout sous-module de</u> $M(\lambda)$ <u>contient un sous-module simple isomorphe à un</u> $M(\mu)$.

Facile à partir de 1.6.

6.6. D'autre part, la situation est clarifiée par la

PROPOSITION [7].- <u>Soient</u> λ , $\mu \in \mathfrak{h}^*$.

(i) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu),M(\lambda))$ <u>est nul ou de dimension</u> 1 <u>sur</u> k .

(ii) <u>Tout élément non nul de</u> $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu),M(\lambda))$ <u>est injectif</u>.

a) Soient v , v' les générateurs canoniques de $M(\lambda)$, $M(\mu)$, et $\varphi : M(\mu) \to M(\lambda)$ un $\mathfrak{g}$-homomorphisme. Il existe $u \in U(\underline{n}_-)$ tel que $\varphi(v') = uv$. Si φ est non injectif, il existe $u' \in U(\underline{n}_-)$ tel que $u'v' \neq 0$ et $0 = \varphi(u'v') = u'\varphi(v') = (u'u)v$. Alors $u' \neq 0$, $u'u = 0$, d'où $u = 0$ et alors $\varphi(M(\mu)) = \varphi(U(\underline{n}_-)v') = U(\underline{n}_-)uv = 0$. Cela prouve (ii).

b) Soient φ_1 , $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu),M(\lambda))$. Si $\varphi_1(M(\mu)) = \varphi_2(M(\mu))$, φ_1 et φ_2

sont proportionnels d'après a) puisque tout automorphisme de $M(\mu)$ est scalaire.

c) $M(\mu)$ "contient" un $M(\nu)$ simple (6.5). Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu),M(\lambda))$. Si $\varphi|M(\nu) = 0$, $\varphi = 0$ d'après a). Donc $\varphi \mapsto \varphi|M(\nu)$ est injectif, ce qui ramène au cas où $M(\mu)$ est simple. Si φ_1 , $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu),M(\lambda))$ sont linéairement indépendants, $\varphi_1(M(\mu)) \neq \varphi_2(M(\mu))$ d'après b), donc la somme $\varphi_1(M(\mu)) + \varphi_2(M(\mu))$ est directe. D'après 1.5(ii), on en déduit $\mathfrak{P}(\lambda - \delta - \xi) \geq 2\mathfrak{P}(\mu - \delta - \xi)$ pour tout $\xi \in \mathfrak{h}^*$, d'où $\mathfrak{P}(\xi + \lambda - \mu) \geq 2\mathfrak{P}(\xi)$, d'où une croissance exponentielle de $\mathfrak{P}$ alors qu'une telle fonction de partition croît polynomialement.

6.7. Soient λ , $\mu \in \mathfrak{h}^*$. D'après 6.6, ou bien $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu),M(\lambda)) = 0$, ou bien $M(\mu)$ <u>se plonge</u> dans $M(\lambda)$ de manière essentiellement unique ; on écrit alors $M(\mu) \subset M(\lambda)$ par abus de notation. D'après 1.5 et 4.7, on a $M(\mu) \subset M(\lambda) \Rightarrow \mu \leq \lambda$ et $\mu \in W\lambda$; la réciproque est fausse :

6.8. THÉORÈME [2].- <u>Soient</u> λ , $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$. <u>Les conditions de</u> 6.3 <u>sont encore équivalentes à</u>

(iii) $M(\lambda') \subset M(\lambda)$.

En fait, 6.3 et 6.8 se démontrent ensemble ; (iii) $\Rightarrow$ (i) est clair ; nous ne pouvons expliquer (i) $\Rightarrow$ (ii) ; (ii) $\Rightarrow$ (iii) (qui est aussi dans [7]) se ramène à ceci :

6.9. <u>Lemme</u>.- <u>Soient</u> $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \in R_+$, $m = \lambda(H_\alpha)$. <u>Si</u> $m \in \mathbb{N}$, <u>on a</u> $M(s_\alpha\lambda) \subset M(\lambda)$.

Lorsque $\alpha \in B$, c'est la prop. 1.12. Le cas présent est bien plus délicat (d'ailleurs le générateur canonique de $M(s_\alpha\lambda)$ n'est plus transformé du générateur canonique de $M(\lambda)$ par $X_{-\alpha}^m$). Disons seulement qu'on se ramène au cas où $\lambda \in P$ grâce à la remarque suivante : soit $\mu \in \mathfrak{h}^*$; l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tels que $M(\lambda - \mu) \subset M(\lambda)$ est une partie algébrique de $\mathfrak{h}^*$; cela se voit en identifiant tous les $M(\lambda)$ à $U(\underline{n}_-)$.

6.10. Dans le cas 6.2, $M(\lambda)$ est simple. A l'opposé, considérons le cas où $\lambda \in P_{++}$. Alors, pour tout $w \in W$, on a $M(w\lambda) \subset M(\lambda)$: cela résulte de 6.8, mais s'établit sans peine directement à partir de 1.12. Il est intéressant d'étudier les relations d'inclusion entre les $M(w\lambda)$ pour λ fixé et w variable. On démontre que la relation $M(w\lambda) \subset M(w'\lambda)$ ne dépend que de w et w' et non de λ, du moins si $\lambda \in \delta + P_{++}$ (c'est-à-dire si λ est un poids dominant n'appartenant à aucun mur). Plus précisément, écrivons $w \leftarrow w'$ s'il existe $\gamma \in R_+$ (nécessairement unique) tel que $w = s_\gamma w'$ et $\ell(w) = \ell(w') + 1$. Ecrivons $w \leq w'$ s'il existe une chaîne $w \leftarrow w_1 \leftarrow w_2 \leftarrow \ldots \leftarrow w_n \leftarrow w'$. (Cette relation d'ordre est liée à la décomposition de Bruhat.) Alors :

PROPOSITION [2].- *Soit* $\lambda \in \delta + P_{++}$. *On a* $M(w\lambda) \subset M(w'\lambda) \Leftrightarrow w \leq w'$.

6.11. *Lemme* [2].- *A tout couple* (w_1, w_2) *d'éléments de* W *tels que* $w_1 \leftarrow w$, *on peut associer* $\sigma(w_1, w_2) = \pm 1$, *de telle sorte que la propriété suivante soit vérifiée :*

si $w_1, w_2, w_3, w_4 \in W$ *et si*
$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & w_2 \arrow[dl] & \\ w_1 & & w_4 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & w_3 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$
avec $w_2 \neq w_3$, *alors*

$\sigma(w_1, w_2)\sigma(w_2, w_4) = - \sigma(w_1, w_3)\sigma(w_3, w_4)$.

6.12. Soient $\lambda \in P_{++}$, V un $\mathfrak{g}$-module simple de plus grand poids λ. Pour $i = 0, 1, \ldots$, soient W_i l'ensemble des éléments de W de longueur i et $C_i = \bigoplus_{w \in W_i} M(w(\lambda + \delta))$. En particulier, $C_o = M(\lambda + \delta)$, de sorte qu'il existe un $\mathfrak{g}$-homomorphisme surjectif $\varepsilon : C_o \to V$. Pour tout $w \in W$, fixons un plongement de $M(w(\lambda + \delta))$ dans $M(\lambda + \delta)$. Pour $i = 1, 2, \ldots$, on définit une matrice $(d^i_{w_1, w_2})$, où $w_1 \in W_i$, $w_2 \in W_{i-1}$, en posant $d^i_{w_1, w_2} = \sigma(w_1, w_2)$ (cf. 6.11) si $w_1 \leftarrow w_2$, $d^i_{w_1, w_2} = 0$ sinon. Cette matrice définit un homomorphisme d^i de C_i dans C_{i-1}, car $M(w_1(\lambda + \delta)) \subset M(w_2(\lambda + \delta))$ si $w_1 \leftarrow w_2$.

THÉORÈME [2].- *Avec les notations précédentes, la suite*
$$0 \to C_s \xrightarrow{d_s} C_{s-1} \to \ldots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_o \xrightarrow{\varepsilon} V \to 0$$
(*où* $s = \dim \underline{n}_+ = \dim \underline{n}_- = \frac{1}{2} \operatorname{Card} R = \sup_{w \in W} \ell(w)$) *est exacte*.

6.13. D'après 1.4, les C_i, considérés comme $U(\underline{n}_-)$-modules, sont libres. Appliquant alors la machinerie de l'algèbre homologique et quelques considérations supplémentaires, on en déduit dans [2] le théorème de Bott : $\dim H^i(\underline{n}_-, V) = \operatorname{Card} W_i$ pour $i \geq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. I. BERNSTEIN, I. M. GELFAND, S. I. GELFAND - Structure des représentations engendrées par des vecteurs de plus haut poids, Funct. Anal. i evo prilojenie, 5(1971), p. 1-9 [en russe].

[2] I. I. BERNSTEIN, I. M. GELFAND, S. I. GELFAND - Opérateurs différentiels sur l'espace affine principal..., Inst. Prikladnoi Mat., Acad. Nauk SSSR, Moscou, 1971, [en russe].

[3] HARISH-CHANDRA - On some applications..., Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), p. 28-96.

[4] B. KOSTANT - A formula for the multiplicity of a weight, Trans. Amer. Math. Soc., 93 (1959), p. 53-73.

[5] Séminaire Sophus Lie, 1ère année, 1954/55, Paris.

[6] J.-P. SERRE - Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966.

[7] D. N. VERMA - Structure of certain induced representations of complex semisimple Lie algebras, Dissertation, Yale Univ., 1966 ; et Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), p. 160-166.