ANDRÉ GRAMAIN

Groupe des difféomorphismes et espace de Teichmüller d'une surface

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 426, p. 157-170
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__157_0>

GROUPE DES DIFFÉOMORPHISMES ET ESPACE DE TEICHMÜLLER D'UNE SURFACE

[d'après C. EARLE et J. EELLS]

par André GRAMAIN

Dans [6], C. Earle et J. Eells calculent le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte (variété différentiable réelle de dimension 2). Un article complémentaire ([7]) de C. Earle et A. Schatz fait le calcul pour les surfaces compactes à bord. Les résultats sont les suivants :

THÉORÈME 1.- *Soit V une surface compacte connexe, orientable ou non, avec ou sans bord. Soit $D(V)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de V muni de la topologie C^∞. Soit $D_0(V)$ le sous-groupe de $D(V)$ constitué des difféomorphismes homotopes à l'identité.*

a) *La composante connexe de l'identité dans $D(V)$ est $D_0(V)$, sauf dans les cas du disque et du cylindre où $D_0(V)$ a deux composantes.*

b) *Soit $\chi(V)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de V ; si $\chi(V) < 0$, le groupe $D_0(V)$ est contractile.*

b') *Les exceptions sont :*
la sphère et le plan projectif : $D_0(V)$ a le type d'homotopie de $SO(3)$,
le tore orientable : $D_0(V)$ a le type d'homotopie du tore,
le tore de Klein et la bande de Moebius : $D_0(V)$ a le type d'homotopie de $SO(2)$,
le disque et le cylindre : $D_0(V)$ a le type d'homotopie de $O(2)$.

Remarques.- 1) L'assertion a) était déjà connue (démontrée par D. Epstein [8] reprenant un vieil article de R. Baer [2]). D'autre part, l'équivalence d'homotopie de $SO(3)$ à $D_0(S_2)$ avait été démontrée par S. Smale de façon purement topologique ([11], voir aussi [5]).

2) Le théorème 1 donne le type d'homotopie de la composante neutre de $D(V)$. On peut démontrer que ce résultat est équivalent à l'énoncé *général* suivant :

Soient V une surface compacte connexe quelconque, v un point de V et $D(V,v)$ le groupe des difféomorphismes de V qui sont tangents à l'identité en v . Les composantes connexes de $D(V,v)$ sont contractiles.

3) Le th. 1 vaut aussi pour les difféomorphismes de classe C^r $(r \geq 1)$.

4) Le type faible d'homotopie du groupe $H(V)$ des homéomorphismes d'une surface V a été calculé par M. Hamstrom ([10]). Le th. 1 permet de constater que l'injection canonique $D(V) \to H(V)$ est une équivalence faible d'homotopie. On ne sait pas démontrer que c'est une équivalence d'homotopie.

La démonstration du th. 1 que nous allons exposer ([6] et [7]) est tout à fait détournée. Elle utilise les structures analytiques complexes sur les surfaces et la théorie de Teichmüller (cf. [9]). La théorie a son origine dans un article de O. Teichmüller ([12]). Celui-ci munit l'espace des structures analytiques d'une surface V (ou, plus précisément, l'espace de Teichmüller $T(V)$ dont c'est un quotient) d'une structure topologique "naturelle" pour laquelle $T(V)$ est homéomorphe à R^{6g-6} , où g est le genre de V . La théorie fit des progrès, il y a une quinzaine d'années, avec les travaux de Ahlfors, Bers et Kodaira-Spencer qui permirent de définir sur $T(V)$ une structure analytique complexe "naturelle" (voir [13]). Ces résultats sont de nature locale (dans $T(V)$) ; c'est un résultat global (ci-dessous th. 4) qui permet de démontrer le th. 1 lorsque V est une surface orientable. Le cas des surfaces non orientables ou à bord se traite de façon voisine (§ 6).

1. Structures analytiques complexes et équations de Beltrami

Soit V une surface orientée de classe C^∞ . Une structure presque complexe sur V est une section C^∞ du fibré en $Gl_+(R^2)/Gl(C)$ associé au fibré tangent orienté de V . On identifie $Gl_+(R^2)/Gl(C)$ au disque unité ouvert Δ de C en associant à tout complexe μ , tel que $|\mu| < 1$, l'application $z \mapsto z + \mu\bar{z}$. On munit l'espace $M(V)$ des structures presque complexes de V

de la structure de la C^∞-convergence compacte. En dimension complexe 1 , une structure presque complexe est complètement intégrable. Il est alors connu qu'elle provient d'une structure analytique complexe sur V (compatible avec la structure C^∞).

Supposons que V soit un ouvert de C ; alors M(V) est le sous-espace $C^\infty(V,\Delta)$ de $C^\infty(V,C)$. Soit $\mu : V \to \Delta$ une fonction de classe C^∞ ; une fonction $w : V \to C$, de classe C^∞ , est holomorphe, pour la structure sur V définie par μ si dw est proportionnelle à $dz + \mu.d\bar{z}$, autrement dit si l'on a :

$$w'_{\bar{z}} = \mu . w'_z \quad . \tag{1}$$

L'équation (1) se ramène à une équation elliptique si $|\mu(z)| < 1$, uniformément elliptique si $|\mu(z)| \leq k < 1$. On a alors :

THÉORÈME 2 ([4]).- <u>Soit</u> $\mu \in C^\infty(V,\Delta)$. <u>Au voisinage de tout point de</u> V , <u>l'équation</u> (1) <u>possède une solution</u> Z <u>de classe</u> C^∞ , <u>à jacobien strictement positif</u>. <u>Toute solution</u> w(z) <u>de</u> (1) <u>est fonction holomorphe de</u> Z .

THÉORÈME 3 (<u>Ahlfors-Bers</u> [1], <u>Earle-Eells</u> [6]).- <u>Soit</u> V <u>le plan complexe</u> C (resp. <u>le demi-plan supérieur ouvert</u> U). <u>Soit</u> $\mu \in C^\infty(V,C)$ <u>une fonction telle que</u> $|\mu(z)| \leq k < 1$. <u>Il existe une unique solution</u> w_μ <u>de</u> (1) <u>qui soit un homéomorphisme de</u> C (resp. $\bar{U}$) <u>sur lui-même laissant fixes</u> 0 <u>et</u> 1 . <u>C'est un difféomorphisme</u>. <u>L'application</u> $\mu \mapsto w_\mu$ <u>est un homéomorphisme du sous-espace de</u> M(V) <u>des</u> μ <u>telles que</u> $|\mu| \leq k$ <u>sur son image dans</u> $C^\infty(V,C)$.

Pour une surface compacte connexe orientée sans bord V , on va étudier l'opération de D(V) et $D_o(V)$ sur M(V) à droite définie par image réciproque. Désormais, D(V) est le groupe des difféomorphismes conservant l'orientation. Pour les surfaces de genre $g > 1$, on va montrer que $D_o(V)$ opère proprement et librement, que le quotient $T(V) = M(V)/D_o(V)$ est contractile et que l'application canonique $\Phi : M(V) \to T(V)$ possède des sections locales. Il en résulte alors que c'est une fibration principale de groupe $D_o(V)$. La contractilité de l'espace total et de la base entraîne celle de $D_o(V)$.

2. Difféomorphismes de la sphère

Pour la sphère, dont toutes les structures complexes sont isomorphes, le th. 1 résulte directement du th. 3. Soit S la sphère de Riemann. Les groupes $D(S)$ et $D_0(S)$ coïncident. Soient G le sous-groupe de $D(S)$ des isomorphismes de la structure complexe et D' le sous-groupe des éléments de $D(S)$ qui fixent les points 0 , 1 et ∞ .

Lemme 1.- *L'espace $D(S)$ est homéomorphe au produit $G \times D'$.*

L'application de composition $G \times D' \to D(S)$ est un homéomorphisme car une homographie $g \in G$ est déterminée de façon unique et continue par les points $g(0)$, $g(1)$ et $g(\infty)$.

L'injection canonique de $SO(3)$ dans G est une équivalence d'homotopie. Pour démontrer le th. 1, il reste donc à démontrer que D' est contractile. On va démontrer que cet espace est homéomorphe à l'espace contractile $M(S)$.

Soit $J \in M(S)$ une structure complexe sur S . On en déduit, par projection stéréographique de $S - \{\infty\}$ sur C une fonction $\mu \in C^{\infty}(C,\Delta)$ bornée en module par $k < 1$ puisque S est compacte. L'homéormorphisme w_{μ} de C (th. 3) se transpose en un homéomorphisme de $S - \{\infty\}$ sur $S - \{\infty\}$ qui se prolonge donc en un homéomorphisme $f : S \to S$. Celui-ci est holomorphe (sur $S - \{\infty\}$, donc partout) de la structure J sur la structure habituelle. C'est donc un élément de D' .

Lemme 2.- *L'application $J \mapsto f$ de $M(S)$ dans D' est un homéomorphisme.*

Elle est bijective et continue d'après le th. 3 ; la réciproque est évidemment continue.

3. Surfaces orientables de genre $g \geq 2$. Opération de $D(V)$ dans $M(V)$

Soit V une surface compacte connexe orientée de genre ≥ 2 ; soit V_0 la surface V munie d'une structure complexe. Un revêtement universel de V_0 est une variété analytique complexe de dimension 1 simplement connexe ; c'est donc S , C ou U . Le groupe Γ des automorphismes du revêtement est un groupe de transformations holomorphes sans point fixe ; il est isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(V)$, donc infini et non commutatif. Par suite, le revêtement universel de V_o est isomorphe à U . Choisissons un tel revêtement analytique $\pi : U \to V_o$. Soit G le groupe des automorphismes holomorphes de U . C'est le groupe des transformations homographiques $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$, où a , b , c , d $\in$ R et $ad - bc = 1$. Le groupe Γ des automorphismes de π est un sous-groupe discret de G . Il opère dans U librement avec un domaine fondamental compact. Il en résulte qu'il est constitué de transformations hyperboliques du demi-plan.

Pour étudier l'opération de D(V) et $D_o(V)$ dans M(V) , nous allons remonter dans U .

<u>Lemme</u> 3.- <u>L'application</u> $\pi^* : M(V) \to M(U)$ <u>est un homéomorphisme de</u> M(V) <u>sur son image</u>. <u>L'image</u> $M(\Gamma)$ <u>de</u> π^* <u>est l'ensemble des structures complexes sur</u> U <u>invariantes par</u> Γ . <u>Les fonctions</u> $\mu \in C^\infty(U,\Delta)$ <u>correspondantes sont caractérisées par la condition</u>

(2) $$\mu = (\mu \circ \gamma).\bar{\gamma}'/\gamma' , \qquad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma .$$

L'application π^* associe à une structure complexe sur V la structure image réciproque sur U . La formule (2) résulte d'un petit calcul. Elle montre, comme Γ possède un domaine fondamental compact, qu'une fonction $\mu \in M(\Gamma)$ est majorée en module par un réel $k < 1$. Il résulte du lemme que $M(\Gamma)$ est un ouvert convexe dans l'espace de Fréchet $A^1(\Gamma)$ des fonctions de $C^\infty(U,C)$ satisfaisant à (2).

De même, soit $D(\Gamma)$ le normalisateur de Γ dans D(U) . C'est l'ensemble des difféomorphismes de U qui induisent un difféomorphisme de V . Soit $D_o(\Gamma)$ le centralisateur de Γ dans $D(\Gamma)$.

<u>Lemme</u> 4.- <u>L'application naturelle</u> $\pi_* : D(\Gamma) \to D(V)$ <u>est un homomorphisme continu, ouvert et surjectif de noyau</u> Γ . <u>Elle induit un isomorphisme de</u> $D_o(\Gamma)$ <u>sur</u> $D_o(V)$.

Dans la première assertion, la seule chose à démontrer est que π_* est ouverte. Démontrons la deuxième. L'intersection $D_o(\Gamma) \cap \Gamma$ est le centre de Γ qui est trivial. Montrons que $\pi_*(f) \in D_o(V)$ si $f \in D_o(\Gamma)$. Pour tout point $z \in U$, soit D_z la droite (pour la géométrie de Poincaré) joignant z à $f(z)$, et soit $f_t(z)$ le point qui partage le segment $[z , f(z)]$ dans le rapport $t/(1 - t)$, $t \in [0,1]$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $f(\gamma(z)) = \gamma(f(z))$, donc $\gamma(D_z) = D_{\gamma(z)}$ et $\gamma(f_t(z)) = f_t(\gamma(z))$ puisque γ est un déplacement (de Poincaré). L'application f_t passe au quotient et donne une homotopie entre $\pi_*(f)$ et l'identité. Inversement, si $g : V \to V$ est homotope à l'identité, on voit, en relevant l'homotopie que g possède un relèvement qui commute aux automorphismes du revêtement.

Démontrons que π_* est ouverte. Il suffit de démontrer que, pour toute suite (g_n) dans $D(V)$ convergeant vers l'identité pour la C^o-convergence, il existe une suite (f_n) dans $D(\Gamma)$ convergeant vers l'identité pour la C^o-convergence compacte et telle que $\pi_*(f_n) = g_n$. Or, si g_n est assez voisine de l'identité, il existe une petite homotopie entre g_n et l'identité. Par relèvement, on obtient une suite (f_n) dans $D_o(\Gamma)$ qui converge simplement vers l'identité de U . D'autre part, en considérant la métrique de Poincaré sur U , la famille (f_n) est équicontinue comme la famille (g_n) . La suite (f_n) converge donc vers l'identité uniformément sur tout compact.

Remarque 5.- Supposons qu'on ait choisi une autre structure complexe V_1 et un autre revêtement holomorphe $\pi_1 : U \to V_1$ de groupe Γ_1 . Il existe un isomorphisme de π sur π_1 qui est un difféomorphisme f de U . On a $\Gamma_1 = f \circ \Gamma \circ f^{-1}$. Les groupes $D(\Gamma)$ et $D(\Gamma_1)$ sont isomorphes par transmutation par f . L'isomorphisme de $M(\Gamma)$ sur $M(\Gamma_1)$ est holomorphe et compatible avec les opérations respectives de $D(\Gamma)$ et $D(\Gamma_1)$.

THÉORÈME 4.- *L'opération de* $D(V)$ *dans* $M(V)$ *est continue, effective et propre. Le sous-groupe* $D_o(V)$ *opère librement et proprement.*

La continuité est évidente. Pour le reste, regardons l'opération correspondante de $D(\Gamma)/\Gamma$ sur $M(\Gamma)$ et l'opération de $D(\Gamma)$ sur $M(\Gamma)$ qui s'en déduit. Le groupe Γ opère trivialement. C'est le plus grand sous-groupe opérant trivialement. En effet, soit $\delta \in D(\Gamma) - \Gamma$; il existe des points z_1 , $z_2 \in U$ tels que $\delta(z_1) = z_2$ et $\pi(z_1) \neq \pi(z_2)$. Il existe une fonction $\mu \in M(\Gamma)$ nulle en z_1 et égale à $\frac{1}{2}$ en z_2 . La structure complexe de μ n'est pas invariante par δ .

Le groupe d'isotropie de 0 (structure de V_o) est $D(\Gamma) \cap G = N(\Gamma)$, normalisateur de Γ dans G . Comme $D_o(\Gamma) \cap G$ (centralisateur de Γ dans G) est trivial, $D_o(\Gamma)$ opère librement (compte tenu de la remarque 5).

Montrons que $D(\Gamma)/\Gamma$ opère proprement. Il s'agit de montrer que l'application $(\mu,g) \to (\mu,\mu.g)$ de $M(\Gamma) \times D(\Gamma)/\Gamma$ dans $M(\Gamma) \times M(\Gamma)$ est propre. Soit A un ensemble muni d'un ultrafiltre F et soient $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ des familles telles que $\mu_\alpha \in M(\Gamma)$, $g_\alpha \in D(\Gamma)/\Gamma$. Supposons que $\mu_\alpha \to \mu$ et $\nu_\alpha = \mu_\alpha . g_\alpha \to \nu$ suivant F . Soient $z_o \in U$, K un domaine fondamental compact de Γ et $f_\alpha \in D(\Gamma)$ un représentant de g_α tel que $f_\alpha(z_o) = z_\alpha \in K$. Pour tout $\alpha \in A$, soit $h_\alpha \in G$ tel que $h_\alpha \circ w_{\mu_\alpha} \circ f_\alpha$ laisse fixes les points 0 , 1 et ∞ . On a alors $h_\alpha \circ w_{\mu_\alpha} \circ f_\alpha = w_{\nu_\alpha}$ d'après l'assertion d'unicité du th. 3. D'après l'assertion de continuité de ce théorème, $w_{\nu_\alpha} \to w_\nu$; en particulier $h_\alpha \circ w_{\mu_\alpha}(z_\alpha) \to w_\nu(z_o)$. Les z_α sont dans K et $w_{\mu_\alpha} \to w_\mu$, donc pour un certain ensemble $B \in F$, les $(w_{\mu_\alpha}(z_\alpha))_{\alpha \in B}$ sont dans un compact. Comme $h_\alpha(w_{\mu_\alpha}(z_\alpha))$ a une limite, il résulte du théorème d'Ascoli que la famille (h_α) a une limite $h \in G$. La famille des $f_\alpha = w_{\mu_\alpha}^{-1} \circ h_\alpha^{-1} \circ w_{\nu_\alpha}$ a donc pour limite $f = w_\mu^{-1} \circ h^{-1} \circ w_\nu \in D(\Gamma)$, et l'on a $\mu.f = \lim \mu_\alpha . f_\alpha = \nu$, ce qui prouve la propreté de l'opération.

Enfin $D_o(V)$, qui est ouvert dans $D(V)$, opère proprement.

Remarques.- 6) Le groupe $N(\Gamma)/\Gamma$ d'isotropie de 0 , groupe des automorphismes complexes de V_o , est fini.

7) Le groupe discret $D(V)/D_o(V)$ opère proprement dans l'espace $M(V)/D_o(V) = T(V)$.

4. Sections locales

Soit V_o la surface V munie d'une structure complexe. On peut fixer le choix du revêtement $\pi : U \to V_o$. Soient $v \in V$ et $a_1,\ldots,a_g$, $b_1,\ldots,b_g$ des générateurs de $\pi_1(V,v)$ satisfaisant à la relation habituelle. Il existe alors un unique revêtement holomorphe $\pi : U \to V_o$ satisfaisant à la propriété suivante :

(N) il existe un point $u_o \in \pi^{-1}(v)$ tel que l'automorphisme A_1 du revêtement correspondant au relèvement de a_1 en u_o ait pour points fixes 0 et ∞ , et l'automorphisme B_1 correspondant à b_1 ait 1 pour point fixe attractif.

Soit en effet $\pi : (U,u) \to (V,v)$ un revêtement holomorphe. Il existe un unique $T \in G$ qui transporte les points fixes de A_1 en 0 et ∞ et le point fixe attractif de B_1 en 1 . Par suite, $\pi \circ T^{-1}$ est l'unique revêtement possédant la propriété (N).

Soit $S \subset G^{2g}$ l'ensemble des points $(A_1,\ldots,B_g)$ tels que

1) $\prod_{1 \leq i \leq g} [A_i , B_i] = 1$,

2) $A_1(0) = 0$, $A_1(\infty) = \infty$, $B_1(1) = 1$,

3) les A_i et les B_i sont des transformations hyperboliques dont les points fixes sont distincts.

Un calcul montre que S est une sous-variété analytique réelle de dimension $6g - 6$ de G^{2g} . Par les relèvements A_i , B_i en u_o des a_i , b_i dans le revêtement normalisé de V_o , on définit une application $P : M(V) \to S$.

<u>Lemme</u> 5.- <u>L'application</u> $P : M(V) \to S$ <u>se factorise en une application injective</u> $M(V)/D_o(V) \to S$.

Supposons que $P(V_o) = P(V_1)$ et soit Γ le groupe correspondant. L'application identique de U passe au quotient par Γ et induit un difféomorphisme holomorphe $g : V_1 \to V_o$. Soit d'autre part $f : (U,u_1) \to (U,u_o)$ le relèvement aux revêtements normalisés de l'application identique $V_1 \to V_o$. Comme $P(V_o) = P(V_1)$, l'application f commute à Γ . Il en résulte que g est homotope à l'identité (cf. lemme 4).

Inversement, soit $g : V_1 \to V_o$ un difféomorphisme holomorphe. Il se relève en un difféomorphisme $f : U \to U$ de sorte que $\pi \circ f = g \circ \pi$, et $\pi \circ f^{-1} : U \to V_1$ est holomorphe. Ceci présente V_1 comme quotient de U par $f \circ \Gamma \circ f^{-1}$. Si, de plus, g est homotope à l'identité, on peut choisir f commutant à Γ et l'on a $P(V_1) = P(V_o)$.

Ainsi, l'image de P n'est autre que l'espace des surfaces de Riemann X de genre g munies de la classe d'homotopie d'un difféomorphisme $X \to V$.

Plus généralement, identifions $M(\Gamma)$ à $M(V)$ par la structure V_o , et soit $\mu \in M(\Gamma)$ une structure complexe V_1 sur V . Le difféomorphisme w_μ (th. 3) laisse fixes 0 , 1 et ∞ . Par suite, si $s = P(V_o)$, on a $P(V_1) = w_\mu \circ s \circ w_\mu^{-1}$. Il en résulte que l'application P est continue (th. 3) et même analytique réelle sur les sous-espaces de dimension finie de $M(\Gamma)$ d'après un complément du th. 3 ([1]).

Pour montrer que l'application $\Phi : M(V) \to T(V)$ possède des sections locales, il suffit de démontrer que l'application $P : M(V) \to S$ possède des sections locales. Cela c'est la théorie locale (cf. [13]) : on constate que le noyau de la "dérivée" en 0 de $P : M(\Gamma) \to S$ est orthogonal à l'espace $Q(\Gamma)$ des formes différentielles holomorphes quadratiques invariantes par Γ , et on conclut par Riemann-Roch que la codimension de ce noyau est au moins $6g - 6$.

5. Contractilité de $T(V)$

THÉORÈME 5 (Teichmüller).- *L'espace* $T(V)$ *est homéomorphe à* R^{6g-6} .

La théorie classique de Teichmüller étudie les structures complexes compatibles avec la structure quasi-conforme. On remplace $M(\Gamma)$ par l'espace (plus grand) $M'(\Gamma)$ des fonctions $\mu : U \to \Delta$ mesurables, bornées en module par $k < 1$ et satisfaisant à (2) ; on remplace $D(V)$ par les homéomorphismes quasi-conformes (i.e. les homéomorphismes w possédant des dérivées partielles généralisées telles que $|w'_{\bar{z}}| \leq k|w'_z|$). On a, comme au § 4, une application $Q : M'(\Gamma) \to S$; l'espace de Teichmüller $T'(V)$ est, par définition, l'image de Q .

Etant données deux surfaces de Riemann V_o et V_1 , Teichmüller montre que, dans chaque classe d'homotopie d'homéomorphismes de V_1 dans V_o , il y a un unique homéomorphisme quasi-conforme plus beau que tous les autres : il réalise le minimum du coefficient de dilatation $K(w)$ (borne supérieure de $(|w'_z| + |w'_{\bar{z}}|)/(|w'_z| - |w'_{\bar{z}}|)$). Ceci donne une section de Q et permet de démontrer que $T'(V)$ est homéomorphe à R^{6g-6} ; en fait, on trouve même une isométrie lorsque l'on munit $T'(V)$ de la distance définie à l'aide de $\mathrm{Log}(K(w))$ (pour une démonstration, voir [3]).

Il est clair que $Q|M(V) = P$. Pour voir que $T(V)$ est contractile, il suffit donc (th. 5) de montrer que P et Q ont même image. Or la classe d'homotopie d'un homéomorphisme $V_1 \to V_o$ contient un difféomorphisme.

6. Les autres cas

Parmi les surfaces orientables sans bord, il reste à s'occuper du tore. Soient V un tore, v un point de V et (a,b) une base de $\pi_1(V,v)$. Soit V_o la surface V munie d'une structure complexe ; il existe un unique revêtement holomorphe $\pi : C \to V$ tel que $\pi(0) = v$ et que l'opération de a soit la translation de 1 . A b correspond la translation d'un complexe τ_o , et on peut supposer b choisi de sorte que $\mathrm{Im}(\tau_o) > 0$.

On démontre que le groupe $D_o(V,v)$ (difféomorphismes laissant fixe v et homotopes à l'identité) opère dans $M(V)$ continûment, librement et proprement. On le voit en identifiant $M(V)$ à l'espace $M(\Gamma) \subset C^{\infty}(C,\Delta)$ des fonctions périodiques dont le groupe des périodes contient le groupe Γ engendré par 1 et

τ_0 , et $D_0(V,v)$ au groupe $D_0(\Gamma,0)$ des difféomorphismes de C laissant 0 fixe et commutant à Γ .

L'espace S est remplacé par U et l'application P associe à toute structure complexe V_i le relèvement τ_i de b . Il y a alors une section holomorphe σ de $P : M(\Gamma) \to U$ donnée explicitement par $\sigma(z) = (\tau_0 - z)/(z - \bar{\tau}_0)$.

Pour les surfaces à bord (de caractéristique d'Euler < 0), la démonstration de [7] est analogue à celle de [6] qu'on vient d'exposer. On passe au revêtement universel de V dont le groupe est un groupe Fuchsien Γ , mais, cette fois, de deuxième espèce. L'ensemble $L(\Gamma)$ des points d'accumulation des orbites est un Cantor dans $R \cup \{\infty\}$. Soit I son complémentaire dans $R \cup \{\infty\}$, on a un revêtement $\pi : U \cup I \to V$ de groupe Γ tel que $\pi^{-1}(bV) = I$. Il faut aménager le th. 3 pour $U \cup I$ et, en particulier, trouver des majorations au bord pour démontrer la continuité.

Enfin, pour les surfaces non orientables, on passe au revêtement connexe à deux feuillets et on développe la même théorie <u>modulo</u> l'opération du groupe à deux éléments.

ADDENDUM

L'équivalence d'homotopie faible D(V) → H(V) (cf. remarque 4) est une vraie équivalence d'homotopie ; R. Luke et W. Mason ([14]) ont en effet démontré que H(V) est un A.N.R.

Indiquons d'autre part que J. Cerf ([15]) a donné une démonstration directe du fait que D(V) → H(V) est une équivalence d'homotopie <u>faible</u> n'utilisant pas le calcul de ces groupes, mais uniquement l'hypothèse que $D_o(S_2)$ a le type d'homotopie de SO(3) (J. Cerf démontre même l'analogue pour les variétés de dimension 3).

Enfin, l'auteur ([16]) vient de donner une démonstration purement topologique du th. 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AHLFORS and L. BERS - Riemann's mapping theorem for variable metrics, Ann. of Math., 72 (1960), 385-404.

[2] R. BAER - Isotopie von Kurven auf orientierbaren Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen, J. reine angew. Math., 159 (1928), 101-111.

[3] L. BERS - Quasiconformal mappings and Teichmüller theorem, in Analytic functions, Princeton University Press, Princeton, 1960.

[4] L. BERS, F. JOHN and M. SCHECTER - Partial differential equations, Interscience, New York, 1964.

[5] J. CERF - Théorèmes de fibration des espaces de plongements, Sém. Cartan, 15e année, 1962/63, exp. n° 8.

[6] C. EARLE and J. EELLS - A fibre bundle description of Teichmüller theory, J. Differential Geometry, 3 (1969), 19-43.

[7] C. EARLE and A. SCHATZ - Teichmüller theory for surfaces with boundary, J. Differential Geometry, 4 (1970), 169-185.

[8] D. EPSTEIN - Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math., 115 (1966), 83-107.

[9] A. GROTHENDIECK - Techniques de construction en géométrie analytique, Sém. Cartan, 13e année, 1960/61, exp. nos 7-8.

[10] M. HAMSTROM - Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold, Illinois J. Math., 10 (1966), 563-573.

[11] S. SMALE - Diffeomorphisms of the 2-sphere, Proc. Amer. Math. Soc., 10 (1959), 621-626.

[12] O. TEICHMÜLLER - Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale, Preuss. Akad., 22 (1940)

[13] A. WEIL - Modules des surfaces de Riemann, Sém. Bourbaki, 11e année, 1958/59, exp. n° 168, Addison-Wesley/Benjamin, New York.

[14] R. LUKE and W. MASON - The space of homeomorphisms on a compact 2-manifold is an A.N.R., Trans. of A.M.S., 164 (1972), 275-285.

[15] J. CERF - Topologie de certains espaces de plongements, Bull. de la S.M.F., 89 (1961), 227-380.

[16] A. GRAMAIN - Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface, Ann. Sc. de l'E.N.S., 6 (1973), 53-66.