MICHEL RAYNAUD

Construction analytique de courbes en géométrie non archimédienne

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 427, p. 171-185

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__171_0>

Séminaire BOURBAKI 427-01
25e année, 1972/73, n° 427 Février 1973

CONSTRUCTION ANALYTIQUE DE COURBES EN GÉOMÉTRIE NON ARCHIMÉDIENNE

[d'après David MUMFORD]

par Michel RAYNAUD

Soient R un anneau de valuation discrète complet, k son corps résiduel, K son corps de fractions, m l'idéal maximal de R, π un générateur de m et v la valuation normalisée de K.

Considérons une courbe elliptique E sur le corps des complexes $\mathbf{C}$; alors E est le quotient de $\mathbf{C}$ par un réseau de périodes (ω_1,ω_2). L'application

$$z \longmapsto e^{2\pi iz/\omega_1}$$

factorise le revêtement universel de E à travers $\mathbf{C}^*$ de sorte que E est aussi le quotient de $\mathbf{C}^*$ par le sous-groupe engendré par $q = e^{2\pi i\omega_2/\omega_1}$. Or il se trouve que l'on a une structure analogue pour certaines courbes elliptiques définies sur le corps valué non archimédien K. Plus précisément, si E_K est une courbe elliptique sur K qui se spécialise sur k en une cubique plane $\bar{E}$ ayant un point double rationnel à tangentes rationnelles distinctes, alors l'invariant j de E_K n'est pas entier et Tate a montré que E_K était le quotient analytique du groupe multiplicatif G_m de K par le sous-groupe discret engendré par l'élément q donné par la formule usuelle

$$q = {}^1/_j + \dots \qquad \text{(cf. [6])} .$$

Si, au contraire $j \in R$, E_K a potentiellement bonne réduction, et n'admet pas de revêtement analytique de degré infini.

Mumford vient d'étendre le résultat de Tate, d'une part aux variétés abéliennes, d'autre part aux courbes de genre ≥ 2 ([5]). Nous ne parlerons ici que des courbes et tout d'abord nous allons décrire la situation sur le corps des complexes qui aura un analogue non archimédien.

Soit D un domaine ouvert de la sphère de Riemann, dont la frontière est formée de $2g$ cercles disjoints $C_1, C'_1, \dots, C_g, C'_g$. Supposons que, pour $i = 1, \dots, g$, il existe une transformation homographique τ_i (ayant deux points fixes distincts), telle que $\tau_i(C_i) = C'_i$ et $\tau(D) \cap D = \emptyset$. Alors le sous-groupe Γ de $PGL_2(\mathbf{C})$ engendré par les τ_i est un groupe libre à g générateurs, $\Omega = \bigcup_{\tau \in \Gamma} \tau(\bar{D})$ est un ouvert dense de $P^1(\mathbf{C})$, son complémentaire est l'adhérence de l'ensemble des points fixes des éléments non nuls de Γ . Le groupe Γ opère librement et proprement sur Ω et $X = \Omega/\Gamma$ est une surface de Riemann compacte de genre g . C'est, en fait, le quotient de $\bar{D}$ par les identifications $C_i \longleftrightarrow C'_i$ définies par les τ_i . Bien sûr Ω n'est pas un revêtement universel de X . En fait, on peut choisir des générateurs $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ de $\pi_1(X)$, liés par la relation habituelle $\prod_i [a_i, b_i] = 1$, de façon que Ω soit le revêtement galoisien de X correspondant au sous-groupe invariant de π_1 engendré par les a_i .

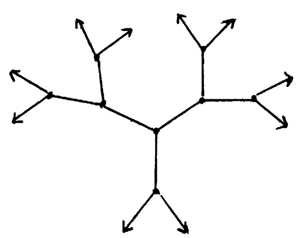
C'est cette uniformisation partielle, dite de Schottky, qui a un analogue non archimédien pour certaines courbes X définies sur K . Comme dans le cas des courbes elliptiques, l'existence d'une telle uniformisation de X est liée à l'existence d'une réduction $\bar{X}$ de X sur le corps résiduel k possédant suffisamment de singularités d'un certain type. Il se trouve que $\bar{X}$ possède alors un revêtement algébrique de degré infini et que le revêtement analytique cherché de X s'obtient en relevant de k à K le revêtement algébrique de $\bar{X}$. Toutes ces constructions s'interprètent particulièrement bien à l'aide de l'arbre de $PGL_2(K)$ introduit par Bruhat-Tits ([1] et [7]) et nous allons commencer par là.

1. L'arbre de $PGL_2(K)$

Soit V un K-espace vectoriel de dimension 2 . Un réseau M de V est un sous-R-module de V , libre de rang 2 . Deux réseaux M et M' sont dits équivalents s'ils sont homothétiques, i.e. s'il existe $a \in K^*$ tel que $M' = aM$. Soit S l'ensemble des classes d'équivalence.

Si M et M' sont deux réseaux, on peut trouver une base e_1 , e_2 de M et des entiers n_1 , n_2 , tels que $(\pi^{n_1} e_1 , \pi^{n_2} e_2)$ soit une base de M' . L'entier $|n_2 - n_1|$ ne dépend que des classes d'équivalence et permet de définir une distance sur S . Notons que quitte à faire une homothétie sur M' , on peut supposer que M' est "en position" par rapport à M , c'est-à-dire que $n_1 = 0$ et que $n_2 \geq 0$.

On construit un graphe A ayant pour ensemble de sommets S ; deux sommets étant joints par une arête s'ils sont à une distance 1 . On vérifie aisément que ce graphe est sans circuits et connexe, donc est un arbre. Le groupe $PGL(V)$ opère isométriquement et transitivement sur S . Le stabilisateur d'un sommet, défini par le réseau M , est l'image de $GL(M)$; les arêtes issues d'un sommet sont en correspondance avec les points de la droite projective sur k et cette bijection est canonique modulo un automorphisme linéaire de $\mathbf{P}^1(k)$; le stabilisateur strict d'une arête est conjugué à l'image dans $PGL_2(K)$ du sous-groupe de $GL_2(R)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $v(c) > 0$; il y a de plus des éléments du type $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$ qui échangent les deux extrémités d'une arête.



(Allure de A dans le cas où k a deux éléments)

Dans un arbre, on a la notion de <u>demi-droite</u> issue d'un sommet P . Deux telles demi-droites définissent le même <u>bout</u> si elles coïncident en dehors d'un nombre fini de sommets. Une demi-droite de A se représente par une chaîne de réseaux $M_o \subset M_1 \subset \ldots$ telle que $M_o/M_n \simeq R/\pi^n R$. Alors $D = \bigcap M_n$ est un facteur direct de rang 1 de chacun des M_i et KD est une droite de V . On établit de cette façon une application bijective canonique entre l'ensemble B des bouts de A et les points de $\mathbb{P}^1(V)$, droite projective construite sur V . Cette bijection est compatible avec l'action de $PGL_2(V)$.

Etant donnés deux bouts distincts x , y , il existe dans A une unique droite d'extrémités x et y . Trois bouts distincts x , y , z déterminent un sommet $\sigma(x,y,z)$: l'unique sommet P commun aux trois droites (x,y) , (y,z) , (z,x) ou encore l'unique sommet P , tel que les demi-droites d'origine P , d'extrémités x , y , z partent de P suivant trois arêtes distinctes. Enfin, si x , y , z , t sont quatre bouts distincts, la distance des sommets $\sigma(x,y,z)$ et $\sigma(x,y,t)$ n'est autre, au signe près, que la valuation du birapport (x,y,z,t) .

2. Sous-groupe de Schottky de $PGL_2(V)$

DÉFINITION.- Soit $\gamma \in PGL_2(K)$ l'image d'un élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $GL_2(K)$. On dit que γ est hyperbolique s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes :

(i) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a 2 valeurs propres (dans K) de valuation distinctes.

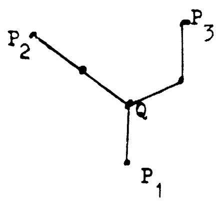
(ii) γ est un conjugué de l'image de $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\lambda \in m$.

(iii) $ad - bc/(a+d)^2 \in m$.

DÉFINITION.- Un groupe de Schottky est un sous-groupe Γ de $PGL(V)$, de type fini, dont les éléments distincts de l'élément neutre sont hyperboliques.

Désormais Γ désigne un groupe de Schottky. Alors Γ est nécessairement un sous-groupe discret de $PGL(V)$ et opère librement sur l'arbre A , donc est un groupe libre [7]. On suppose de plus que Γ n'est pas commutatif de sorte que l'ensemble Σ des points fixes dans $P^1(V)$, des éléments non nuls de Γ , est infini.

Nous allons maintenant associer à Γ un sous-arbre Λ de A . Les sommets de Λ sont les sommets de A de la forme $\sigma(x, y, z)$, où x , y , z sont trois points distincts de Σ . Pour s'assurer que l'on obtient ainsi les sommets d'un sous-arbre de A , il suffit de vérifier que si l'on a trois sommets $P_j = \sigma(x_j, y_j, z_j)$, $j = 1, 2, 3$ alors le sommet Q de A commun aux trois segments $[P_1P_2]$, $[P_2P_3]$, $[P_3P_1]$ est aussi un sommet de Λ . On peut supposer que les P_i ne sont pas alignés, de sorte que l'on a un diagramme du type



Soit t_j $(j = 1, 2, 3)$ l'un des trois points x_j , y_j , z_j , pour lequel la demi-droite d'origine P_j , d'extrémité t_j ne part pas de P_j suivant la même arête que P_jQ . Alors $Q = \sigma(t_1, t_2, t_3)$.

Par construction, de chaque sommet de Λ partent au moins trois arêtes. En particulier, les bouts de Λ sont infinis et s'identifient à une partie des bouts de A , donc à une partie $\bar{\Sigma}$ de $P^1(V)$. La droite de A qui joint deux points de Σ est contenue dans Λ , donc $\bar{\Sigma}$ contient Σ . Par ailleurs Σ est clairement dense dans $\bar{\Sigma}$, de sorte que $\bar{\Sigma}$ n'est autre que l'adhérence de Σ dans $P^1(V)$.

Le groupe Γ opère sur Σ et donc sur Λ ; comme Γ opère librement sur A , il opère aussi librement sur Λ .

PROPOSITION.- Le graphe quotient $\Lambda^0 = \Lambda/\Gamma$ est fini.

En effet, soient P un sommet de Λ et $\tau_1, \ldots, \tau_n$ une base du groupe libre Γ . Posons $P_i = \tau_i(P)$ et soit Λ' le sous-arbre fini de Λ , réunion des segments $[P,P_i]$, $i = 1,\dots,n$. Montrons que Λ^0 est un quotient de Λ' . Il faut voir que $\widetilde{\Lambda} = \bigcup_{\tau \in \Gamma} \tau(\Lambda')$ est égal à Λ . Or, il est clair que $\widetilde{\Lambda}$ est un sous-arbre plein de Λ . Par ailleurs, si τ est un élément non nul de Γ , τ opère sans point fixe sur $\widetilde{\Lambda}$; si Q est un point de $\widetilde{\Lambda}$, tel que la distance de Q à $\tau(Q)$ soit minimum. Alors, les points $\tau^n(Q)$, $n \in \mathbf{Z}$, sont sur une droite de $\widetilde{\Lambda}$, sur laquelle τ opère par translation. Il en résulte que Σ est contenu dans les bouts de $\widetilde{\Lambda}$ et d'après la définition de Λ , tout sommet de Λ est alors dans $\widetilde{\Lambda}$.

Comme Λ^0 est localement homéomorphe à Λ , on déduit de la proposition précédente que Λ est un arbre <u>localement fini</u>.

3. Réalisation géométrique de Λ

Notons $P(V)$ le schéma sur K qui est la droite projective définie par V , donc égal au spectre homogène de l'algèbre symétrique de V . De même, à tout réseau M de V , on associe $P(M)$, spectre homogène de l'algèbre symétrique du R-module M . Donc $P(M)$ est une droite projective au-dessus de R , munie d'une identification canonique de sa fibre générique avec $P(V)$. Si M et M' sont deux réseaux de V , l'identité des fibres génériques de $P(M)$ et $P(M')$ se prolonge en un isomorphisme $P(M) \simeq P(M')$ si et seulement si M et M' sont homothétiques. On voit donc que les sommets de l'arbre A correspondent aux R-droites projectives qui prolongent $P(V)$, à isomorphismes près.

Soient toujours M et M' deux réseaux de V . Alors les éléments de M' engendrent un idéal divisoriel $I(M')$ de $\mathrm{Sym}(M)$; de même les éléments de M engendrent un idéal divisoriel $I'(M)$ de $\mathrm{Sym}(M')$. Si on remplace M' par un réseau homothétique, $I(M')$ est modifié par tensorisation par un idéal inversible. En particulier, si M' est en position par rapport à M et à la distance $n > 0$ de M , $I(M')$ est un idéal de $\mathrm{Sym}(M)$ qui définit une section de $P(M)$ au-dessus de $R/\pi^n R$. On établit ainsi une correspondance canonique entre les segments dans A , d'origine le sommet défini par M et les sections de $P(M)$ au-dessus des quotients artiniens de R . Par passage à la limite, on retrouve la correspondance entre bouts de A et sections de $P(M)$ au-dessus de R

(qui correspondent eux-mêmes aux points rationnels de $P(V)$).

Considérons maintenant $P(MM')$, le joint de $P(M)$ et $P(M')$, c'est-à-dire l'adhérence schématique dans $P(M) \times_R P(M')$ du graphe du morphisme identique des fibres génériques. On a donc un diagramme (commutatif)

$$\begin{tikzcd} & P(MM') \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\rho'"] & \\ P(M) & & P(M') \end{tikzcd}$$

On vérifie immédiatement que ρ (resp. ρ') n'est autre que le morphisme d'éclatement de l'idéal divisoriel $I(M')$ (resp. $I'(M)$). En particulier, la fibre spéciale $\overline{P(MM')}$ de $P(MM')$ est réduite et a deux composantes irréductibles, qui se projettent isomorphiquement, l'une sur $\overline{P(M)}$ grâce à ρ et l'autre sur $\overline{P(M')}$ grâce à ρ' . Ces deux composantes se coupent transversalement en un point et l'anneau local de $P(MM')$ en ce point est isomorphe à l'anneau local à l'origine de $R[X,Y]/XY - \pi^n$.

Nous aurons à considérer des schémas en courbes C sur k , localement de type fini, vérifiant les conditions suivantes :

(*) (i) C est réduit.

(ii) Les normalisés des composantes irréductibles de C sont des droites projectives sur k .

(iii) Un point singulier de C est rationnel et l'anneau local est analytiquement isomorphe au localisé à l'origine de $XY = 0$ (autrement dit, on a soit un point double ordinaire d'une composante de C , à tangentes rationnelles, soit un point commun à deux composantes qui se coupent transversalement).

A un tel schéma, on associe un graphe, ayant pour sommets les composantes irréductibles ; un point commun à deux composantes définit une arête, un point double d'une composante définit une arête qui est un lacet.

Soit, maintenant, Λ un sous-arbre fini de A , dont les sommets sont définis par des réseaux $M_1,\dots,M_n$ et soit $P(\Lambda)$ le joint des $P(M_i)$. On déduit immédiatement de l'étude faite dans le cas où Λ est un segment, que la fibre spéciale $\overline{P(\Lambda)}$ de $P(\Lambda)$ vérifie (*) et que son graphe s'identifie canoniquement à Λ . Plus précisément, pour tout i , il existe une et une seule composante irréductible C_i de $\overline{P(\Lambda)}$, qui par la projection canonique $P(\Lambda) \to P(M_i)$ s'envoie isomorphiquement sur $\overline{P(M_i)}$. A une arête $[M_i M_j]$ de Λ , de longueur n , correspond un point d'intersection de C_i et C_j et l'anneau local de $P(\Lambda)$ en ce point est isomorphe à $R[X,Y]/XY - \pi^n$. Notons par ailleurs que $P(\Lambda)$ est propre, plat sur S et normal.

Considérons enfin le cas d'un arbre Λ localement fini dont les sommets sont définis par des réseaux M_i . Soit M l'un d'entre eux et considérons Λ comme réunion croissante des sous-arbres finis Λ_n où Λ_n est réunion des segments de Λ , d'origine M , contenant au plus $n+1$ sommets. Alors les schémas $P(\Lambda_n)$ forment un système projectif. Les arêtes de $\Lambda_{n+1} - \Lambda_n$ définissent un nombre fini de points rationnels non singuliers de $P(\Lambda_n)$; soit U_n l'ouvert complémentaire dans $P(\Lambda_n)$. Alors pour tout entier $m \geq 0$, les morphismes canoniques $P(\Lambda_{n+m}) \to P(\Lambda_n)$ sont des isomorphismes au-dessus de U_n de sorte que l'on obtient des immersions ouvertes $U_0 \hookrightarrow U_1 \hookrightarrow \ldots$. On note $P(V)$ le schéma réunion des U_n .

PROPOSITION.- $P(\Lambda)$ est un R-schéma plat normal de fibre générique $P(V)$, dont la fibre spéciale $\overline{P(\Lambda)}$ vérifie (*) . Plus précisément, pour tout i , il existe une projection canonique $P(\Lambda) \to P(M_i)$ et une unique composante irréductible de $\overline{P(\Lambda)}$ qui par cette projection s'envoie isomorphiquement sur $\overline{P(M_i)}$. Cette correspondance s'étend en un isomorphisme canonique du graphe de $\overline{P(\Lambda)}$ sur Λ .

Soit alors x un point fermé de la fibre générique $P(V)$ de $P(\Lambda)$. Comme chacun des $P(\Lambda_n)$ est propre sur R , x se spécialise en un point de la fibre fermée de $P(\Lambda_n)$. Qu'en est-il à la limite dans $P(\Lambda)$? La réponse est immédiate : x se spécialise dans $P(\Lambda)$ si et seulement si, x n'est pas un point rationnel de $P(V)$ correspondant à un bout infini de Λ . Pour éliminer ces points, on va remplacer $P(\Lambda)$ par son complété $\mathcal{P}(\Lambda)$ le long de la fibre fermée, c'est-à-dire par le schéma formel $\varinjlim_n P_n(\Lambda)$, où

$P_n(\Lambda) = P(\Lambda) \otimes_R R/\pi^n R$ (EGA I, § 9).

Cette opération de complétion nous fait passer du domaine de la géométrie algébrique à celui de la géométrie analytique. En effet, munissons l'espace projectif $P(V)$ de sa structure analytique (rigide) au sens de Tate, Kiehl (cf. [8] et [4]). Alors le schéma formel $\mathfrak{P}(\Lambda)$ a une "fibre générique" qui correspond au sous-espace analytique ouvert de $P(V)$, ayant pour espace sous-jacent le complémentaire des bouts infinis de Λ.

4. Passage au quotient par Γ

Revenons à notre groupe Γ et à l'arbre associé Λ. On peut appliquer à Λ la construction précédente. Le groupe Γ opère sur $P(\Lambda)$ et donc sur $\mathfrak{P}(\Lambda)$ de façon compatible avec son action sur Λ, en particulier, un élément non nul de Γ ne laisse fixe aucun sommet et aucune arête de Λ, donc Γ opère librement sur la fibre fermée de $P(\Lambda)$.

Nous allons construire un quotient $\mathfrak{P}(\Lambda)/\Gamma$ en deux crans. Soit d'abord Γ_o un sous-groupe invariant de Γ, d'indice fini tel qu'un élément non nul de Γ_o ne transforme pas un sommet de Λ en un sommet adjacent. On peut alors recouvrir $\overline{\mathfrak{P}(\Lambda)}$ par des ouverts affines $\overline{\mathfrak{W}_i}$ tel que $\tau(\overline{\mathfrak{W}_i}) \cap \overline{\mathfrak{W}_i} = \emptyset$ pour $\tau \neq 1$. Soit $\mathfrak{W}_i$ l'ouvert formel affine de $\mathfrak{P}(\Lambda)$ défini par $\overline{\mathfrak{W}_i}$. Alors les $\mathfrak{W}_i$ recouvrent $\mathfrak{P}(\Lambda)$ et on construit le schéma formel quotient $\mathfrak{P}(\Lambda)/\Gamma_o = \mathfrak{X}_{\Gamma_o}$ par simple recollement des $\mathfrak{W}_i$. Comme Λ/Γ est un graphe fini, il en est de même de Λ/Γ_o et par suite $\mathfrak{X}_{\Gamma_o}$ est de type fini sur R, donc est propre et par ailleurs plat et normal. Le groupe fini Γ/Γ_o opère librement sur $\mathfrak{X}_{\Gamma_o}$; en grimpant sur les puissances de π, on construit la courbe formelle quotient $\mathfrak{X}_\Gamma$ qui est elle aussi propre normale et plate sur R. Soit $p : \mathfrak{P}(\Lambda) \to \mathfrak{X}_{\Gamma_o} \to \mathfrak{X}_\Gamma$ le morphisme composé. Alors p est un morphisme formel, étale surjectif, compatible avec Γ et le couple $(\mathfrak{X}_\Gamma, p)$ est un quotient de $\mathfrak{P}(\Lambda)$ par Γ, unique à isomorphisme près.

Par ailleurs, en relevant à $\mathfrak{X}_\Gamma$ un diviseur ample sur la fibre spéciale

$\overline{\mathfrak{X}}_\Gamma$, on construit un diviseur ample sur $\mathfrak{X}_\Gamma$ et par suite $\mathfrak{X}_\Gamma$ est algébrisable, de façon essentiellement unique en un schéma en courbes X_Γ propre (EGA III, th. 5.4.5), et X_Γ est plat et normal. Ces propriétés restant vraies après extension de R à la clôture intégrale de R dans une extension finie de K , la fibre générique de X_Γ est lisse sur K .

Rappelons [2] qu'une courbe stable au-dessus d'un schéma T et un T-schéma en courbes, propre et plat, dont les fibres géométriques satisfont aux deux conditions suivantes :

(i) les seules singularités sont des points doubles ordinaires.

(ii) Si une composante irréductible est une droite projective, elle rencontre les autres composantes en au moins trois points.

DÉFINITION.- Une courbe stable sur le corps k qui vérifie (*) est dite déployée et dégénérée.

THÉORÈME.- Le R-schéma X_Γ est une R-courbe stable, dont la fibre générique est lisse et la fibre spéciale est déployée et dégénérée. Si Γ est un groupe libre de rang g alors les fibres de X_Γ sont de genre g .

En effet, X_Γ est une courbe propre qui vérifie (*) et qui est stable car d'un sommet de Λ partent au moins trois arêtes. Le genre de X_Γ est égal au nombre de lacets de son graphe, donc au nombre de générateurs de Γ .

5. Construction inverse

Soit X une R-courbe stable, dont la fibre générique est lisse de genre $g \geq 2$ et dont la fibre spéciale $\bar{X}$ est déployée et dégénérée.

Nous allons montrer que X peut s'obtenir à partir d'un sous-groupe de Schottky de $PGL_2(K)$ par la construction précédente.

Soit $\mathfrak{X}$ le R-schéma formel propre et plat sur R , normal, complété de X le long de $\bar{X}$. La courbe $\bar{X}$ admet un revêtement universel $\bar{P} \xrightarrow{\bar{p}} \bar{X}$, de groupe Γ libre, à g générateurs. Le graphe Λ de $\bar{P}$ est un arbre localement fini tel que de chacun de ses sommets partent au moins trois arêtes : c'est aussi un revêtement universel du graphe de $\bar{X}$. Compte tenu de l'unicité des relèvements infinitésimaux des morphismes étales (EGA IV, 17), $\bar{p}$ s'étend en un R-morphisme formel étale $p : \mathfrak{P} \to \mathfrak{X}$ qui fait de $\mathfrak{P}$ un revêtement de $\mathfrak{X}$, galoisien de groupe Γ . Comme $\mathfrak{X}$ est plat sur R et normal, il en est de même de $\mathfrak{P}$.

Il nous faut réaliser Γ comme sous-groupe de $PGL_2(K)$. Soit I l'ensemble des sommets de Λ . Pour tout $i \in I$, soit $\mathfrak{D}_i$ un diviseur relatif positif formel sur $\mathfrak{P}$ dont le support ne rencontre que la composante irréductible C_i de $\bar{P}$ relative au sommet i . Soient Λ' un sous-arbre fini de Λ et $\mathfrak{D}'$ le diviseur somme des $\mathfrak{D}_i$ pour $i \in \Lambda'$. Notons $C_{\Lambda'}$ la courbe propre, contenue dans $\bar{P}$, réunion des C_i pour $i \in \Lambda'$. Soit $\mathfrak{L}'$ le faisceau inversible formel sur $\mathfrak{P}$ égal à $O_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}')$ et soit $\bar{\mathfrak{L}}'$ sa restriction à la fibre spéciale $\bar{P}$. Alors $\bar{\mathfrak{L}}'$ est engendrée par ses sections globales, la k-algèbre graduée $\bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(\bar{P}, \bar{\mathfrak{L}}'^{\otimes n})$ est de type fini et le k-morphisme canonique $\bar{r}' : \bar{P} \to \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(\bar{P}, \bar{\mathfrak{L}}'^{\otimes n})$ (EGA II, 3.7) s'identifie à la projection de $\bar{P}$ sur $C_{\Lambda'}$ qui envoient les composantes irréductibles ne figurant pas dans $C_{\Lambda'}$ sur des points.

En utilisant le fait que $H^1(\bar{P}, \bar{\mathfrak{L}}'^{\otimes n}) = 0$ pour $n \geq 0$ et la platitude de $\mathfrak{P}$, on prouve que $H^0(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}'^{\otimes n})$ est un R-module libre de type fini et que le morphisme canonique $H^0(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}'^{\otimes n}) \otimes_R R/\pi R \to H^0(\bar{P}, \bar{\mathfrak{L}}'^{\otimes n})$ est un isomorphisme. On en déduit que $\mathfrak{L}'$ est engendré par ses sections globales, que $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geq 0} H^0(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}'^{\otimes n}))$ est un R-schéma propre $P(\Lambda')$, plat sur R , normal et que l'on a un morphisme formel canonique $r_{\Lambda'}$ de $\mathfrak{P}$ dans le complété formel $\mathfrak{P}(\Lambda')$ de $P(\Lambda)$ qui relève $\bar{r}_{\Lambda'}$. Comme la fibre spéciale de $P(\Lambda')$ est isomorphe à $C_{\Lambda'}$, elle est de genre 0 , donc la fibre générique est isomorphe à la droite projective sur K (noter qu'elle possède un point rationnel). Si le graphe Λ' est réduit au sommet d'indice i de Λ , $P(\Lambda') = P_i$ est alors une droite projective relative au-dessus de R . Dans le cas général, si i est un sommet Λ' , on a un morphisme canonique $P(\Lambda') \to P_i$ qui est un isomorphisme sur les fibres génériques. Ces remarques permettent, (une fois choisis un sommet i_o de Λ et un K-isomorphisme de $P(V)$ sur la fibre générique de P_{i_o}) de réaliser canoniquement Λ comme sous-arbre de l'arbre A de $PGL_2(V)$ et de définir un isomorphisme canonique entre $\mathcal{P}$ et le complété formel $\mathcal{P}(\Lambda)$ de la réalisation géométrique $P(\Lambda)$ de Λ . De plus, l'action de Γ sur $\mathcal{P}$, donc aussi sur $\mathcal{P}(\Lambda)$, provient d'une action de Γ sur $P(\Lambda)$ et en particulier Γ opère sur $P(V)$, donc est contenu dans $PGL_2(V)$; ce plongement est compatible avec la réalisation de Λ comme sous-arbre de A .

Soit γ un élément non nul de Γ . Alors γ et ses puissances non nulles opèrent sans point fixe sur Λ , donc γ opère par translation sur une droite convenable de Λ . L'ensemble Σ des points fixes des éléments de Γ est donc contenu dans l'ensemble des bouts de Λ . Soient H un sommet de Λ et H_o son image dans le graphe quotient $\Lambda_o = \Lambda/\Gamma$. Comme de H partent au moins trois arêtes, on peut trouver dans Λ_o trois lacets d'origine H_o qui partent suivant trois arêtes (orientées) différentes. Ces lacets correspondent à trois éléments du groupe fondamental Γ , ayant des points fixes respectifs x , y , z tels que $\sigma(x,y,z) = H$. Donc Λ est l'arbre canoniquement associé à Γ . Ceci achève de montrer que X est isomorphe à une courbe du type X_Γ.

Soient maintenant Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes de Schottky et cherchons à quelles conditions X_{Γ_1} et X_{Γ_2} sont isomorphes. Rappelons que le foncteur $\underline{F}$ des isomorphismes de deux courbes stables est représentable par un R-schéma fini et net ([2]). Par ailleurs, comme les fibres spéciales $\bar{X}_{\Gamma_1}$ et $\bar{X}_{\Gamma_2}$ sont déployées et dégénérées, tout isomorphisme géométrique est rationnel sur k , donc F est décomposé. Il résulte de ces remarques que tout isomorphisme géométrique des fibres génériques de X_{Γ_1} et X_{Γ_2} est rationnel sur K et s'étend en un R-isomorphisme $u : X_{\Gamma_1} \simeq X_{\Gamma_2}$. Après complétion formelle et passage aux revêtements universels, u se relève en un isomorphisme formel $v : \mathcal{P}(\Lambda_1) \to \mathcal{P}(\Lambda_2)$ compatible avec les actions respectives de Γ_1 et Γ_2. En introduisant comme plus haut un diviseur formel, on montre que v provient d'un isomorphisme algébrique $P(\Lambda_1) \xrightarrow{\sim} P(\Lambda_2)$, donc d'un automorphisme de la fibre générique $P(V)$. On a donc établit le résultat suivant.

THÉORÈME.- 1) Les fibres génériques géométriques de X_{Γ_1} et X_{Γ_2} sont isomorphes si et seulement si Γ_1 et Γ_2 sont conjugués dans $PGL(V)$.

2) Tout automorphisme de la fibre générique géométrique de X_Γ est rationnel sur K et le groupe de ces automorphismes est canoniquement isomorphe à $N(\Gamma)/\Gamma$ où $N(\Gamma)$ est le normalisateur de Γ dans $PGL(V)$.

6. Un exemple

Soient $P^1(R)$ une droite projective sur R, $P^1(k)$ sa fibre spéciale et $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ $2n$ points rationnels distincts sur la fibre spéciale $P^1(k)$. Notons C la courbe stable, dégénérée et déployée obtenue en identifiant x_i et y_i pour tout i. Prenons $P^1(R)$ comme sommet de base H de l'arbre A. Les points (x_i, y_i) déterminent alors $2n$ arêtes distinctes issues de H. Soient $D_1,\dots,D_n$ n droites de A passant par H telles que D_i contiennent les arêtes relatives à la paire (x_i, y_i). Enfin, pour tout i, soit τ_i un élément hyperbolique de $PGL_2(K)$ qui opère par translation sur D_i. Alors les τ_i engendrent un groupe de Schottky Γ, libre de rang n ; Γ opère transitivement sur les sommets de l'arbre Λ associé à Γ et de chaque sommet de Λ partent $2n$ arêtes. Les courbes X_Γ correspondantes aux divers groupes Γ s'identifient aux R-courbes stables, à fibre générique lisse et à fibre spéciale isomorphes à C. Prenons en particulier $n = 2$, pour k un corps à trois éléments, et τ_i opérant par translation d'amplitude 1 sur D_i. Alors $\Lambda = A$. Si l'on regarde la réalisation géométrique de Λ, on trouve que X_Γ est régulier et que sa fibre générique est le quotient par Γ de l'ouvert analytique de $P^1(K)$ complémentaire des points rationnels.

7. Généralisation

Désignons maintenant par R un anneau local noethérien, complet pour la topologie définie par son idéal maximal, intégralement clos, de corps résiduel k , de corps des fractions K . Si $X \to R$ est une R-courbe stable dont la fibre générique est lisse et la fibre spéciale est déployée et dégénérée, la construction "inverse" que l'on vient de décrire dans le cas où R est un anneau de valuation discrète s'étend immédiatement. Elle fournit un arbre localement fini Λ , une réalisation géométrique formelle $\mathcal{P}(\Lambda)$ et un sous-groupe libre Γ de $PGL_2(K)$. La construction directe de X_Γ à partir d'un sous-groupe Γ convenable est par contre plus délicate, faute de disposer d'un arbre ambiant A associé à $PGL_2(K)$. Néanmoins, Mumford réussit à définir ce que doit être un sous-groupe de Schottky Γ , à associer aux points fixes de Γ un arbre Λ , une réalisation géométrique $\mathcal{P}(\Lambda)$ et une courbe stable X_Γ , quotient de $\mathcal{P}(\Lambda)$ par Γ . Cette uniformisation fournit une bonne description de la compactification du module des courbes lisses, au voisinage des points à l'infini correspondant aux fibres les plus dégénérées.