DIDIER DACUNHA-CASTELLE

Contre-exemple à la propriété d'approximation uniforme dans les espaces de Banach

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 433, p. 286-293

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__286_0>

Séminaire BOURBAKI 433-01
25e année, 1972/73, n° 433 Juin 1973

CONTRE-EXEMPLE À LA PROPRIÉTÉ D'APPROXIMATION UNIFORME DANS LES ESPACES DE BANACH

[d'après ENFLO et DAVIE]

par Didier DACUNHA-CASTELLE

Enflo a trouvé [1] un contre-exemple à la conjecture suivante : dans tout espace de Banach, l'identité est limite uniforme sur tout compact d'opérateurs de rang fini, c'est-à-dire, pour tout espace de Banach X et pour tout compact $K \subset X$, il existe un opérateur T de rang fini tel que $\sup_{x \in K} \|Tx - x\| \leq 1$.

Le travail d'Enflo fondé sur des idées très simples concernant la propriété d'approximation est rendu pénible par la non-utilisation d'inégalités probabilistes. Des simplifications techniques importantes ont été apportées par de nombreux auteurs, notamment Fiegel [2] et Davie [3]. Ce dernier a donné un exposé très simple que nous reprendrons. Il paraît difficile de simplifier plus que Davie ne l'a fait la démonstration d'Enflo.

Dans la suite $A_1, A_2, \ldots$ désigneront des constantes. Soit $G = \bigcup_{K=1}^{\infty} G_K$, où les ensembles deux à deux disjoints G_K sont des groupes abéliens finis à 3.2^K éléments ; $\hat{G}_K$ est le groupe à 3.2^K éléments des caractères de G_K.

1. Une partition de $\hat{G}_K$ associée à une inégalité probabiliste

<u>Lemme</u> 1.- <u>On peut trouver des nombres</u> ρ_i <u>valant</u> 2 <u>ou</u> -1, $i = 1,\ldots,3.2^K$, <u>tels que</u> $\sum_i \rho_i = 0$ <u>et</u>

(1) $$\left|\sum_i \rho_i \, \hat{g}_i(g)\right| \leq A_1 \, 2^{K/2} \sqrt{K+1}) , \qquad \text{pour tout } g \in G_K .$$

<u>Démonstration</u>.

Sous-lemme.- Soient $Y_1,\ldots,Y_K$ des variables aléatoires indépendantes de même loi, $P(Y_i = 2) = \frac{1}{3}$, $P(Y_i = -1) = \frac{2}{3}$. Alors, il existe des constantes A_2, A_3

telles que

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{K} \alpha_i Y_i\right| > A_2 \sqrt{\sum_i |\alpha_i|^2}\sqrt{\log K}\right) < \frac{A_3}{K^3} ,$$

pour tout $K \geq 1$, tout $(\alpha_1,\ldots,\alpha_K) \in \mathbf{C}^K$.

Cette inégalité est élémentaire (inégalité de type exponentiel pour des sommes variables bornées). D'abord, en changeant A_3 en $2A_3$, on peut supposer les α_i réels et $\Sigma\, \alpha_i^2 = 1$. Désignons par E l'espérance.

$$\begin{aligned} E \exp \lambda \left|\sum_i \alpha_i Y_i\right| &\leq E \exp \lambda \sum_i \alpha_i Y_i + E \exp -\lambda \sum_i \alpha_i Y_i \\ &= \prod_i E \exp \lambda\, \alpha_i Y_i + \prod_i E \exp -\lambda\, \alpha_i Y_i \\ &= \prod_i \left(\tfrac{2}{3} e^{\lambda\alpha_i} + \tfrac{1}{3} e^{-\lambda\alpha_i}\right) + \prod_i \left(\tfrac{2}{3} e^{-\lambda\alpha_i} + \tfrac{1}{3} e^{\lambda\alpha_i}\right) . \end{aligned}$$

Comme, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\frac{1}{3}(e^{2x} + e^{-x}) \leq e^{x^2}$, on a

$$E \exp \lambda \left|\sum_i \alpha_i Y_i\right| \leq 2e^{\lambda^2} , \qquad \text{pour } \lambda \in \mathbf{R} .$$

Pour toute variable aléatoire Z , et tout $\lambda \in \mathbf{R}^+$, on a

$$P(Z > 0) \leq E \exp \lambda Z ,$$

$$E \exp\left(\lambda\left|\sum_i \alpha_i Y_i\right| - \lambda^2 - 3 \log K\right) \leq \frac{2}{K^3} ,$$

et posant $\lambda = \sqrt{3 \log K}$, on a

$$P\left(\left|\sum_i \alpha_i Y_i\right| > 2\sqrt{3 \log K}\right) \leq \frac{2}{K^3} ,$$

d'où le sous-lemme.

Il existe donc des réalisations $Y_i(\omega)$ telles que, posant $\rho_i = Y_i(\omega)$, on ait

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{3.2^K} \rho_i\, \hat{g}_i(g)\right| &\leq A_2 \sqrt{\sum_i \hat{g}_i(g)}\sqrt{\log 3.2^K} \\ &\leq A_3\, 2^{K/2} \sqrt{K+1} . \end{aligned}$$

Faisons $g = e$ élément unité du groupe G_K , on a

$$\left|\sum_{i=1}^{3.2^K} \rho_i\right| \le A_3\, 2^{K/2} \sqrt{K+1}\ .$$

En changeant éventuellement les $A_3\, 2^{K/2} \sqrt{K+1}$ dernières valeurs de ρ_i , on satisfait à la condition $\sum_{i=1}^{3.2^K} \rho_i = 0$. On augmente alors $|\sum_i \rho_i\, \hat{g}_i(g)|$ d'au plus $2A_3\, 2^{K/2} \sqrt{K+1}$, d'où le lemme en posant $A_1 = 3A_3$.

On peut alors séparer les $\hat{g}$ en 2 , les σ_i^K au nombre de 2^K sont ceux qui, pour les ρ_i définis ci-dessus, sont associés à des ρ_i de valeur 2 et les τ_i^K au nombre de 2^{K+1} sont associés aux ρ_i de valeur -1 .

2. Définition de l'espace X ne satisfaisant pas la propriété d'approximation

X sera le sous-espace de $\ell^\infty(G)$ engendré par les fonctions $(e_j^K)_{\substack{j=1,\ldots,2^K \\ K=1,2,\ldots}}$ suivantes :

$$e_j^K = 0 \quad \text{sur} \quad (G_K \cup G_{K-1})^c\ ,$$

$$e_j^K(g) = \tau_j^{K-1}(g) \qquad \text{si} \quad g \in G_{K-1}\ ,$$

$$e_j^K(g) = \varepsilon_j^K\, \sigma_j^K(g) \qquad \text{si} \quad g \in G_K\ , \text{ les } \varepsilon_j^K \text{ étant des nombres valant}$$

± 1 que nous fixerons par la suite pour les besoins de la cause (rappelons qu'il y a 2^K , τ_j^{K-1} distincts et 2^K , σ_j^K).

On note X_K le sous-espace de dimension 2^K engendré par les e_j^K , $j = 1,\ldots,2^K$. On définit une suite e_j^{K*} d'éléments de X^* tels que $\{(e_j^{K*}, e_j^K)\}$ forment un système biorthogonal, $e_j^{K*}(e_{j'}^{K'}) = \delta_j^{j'}\, \delta_K^{K'}$, à partir de l'une des deux formules équivalentes

$$e_j^{K*}(f) = \frac{1}{3.2^K} \sum_{g \in G_K} \varepsilon_j^K\, \sigma_j^K(g^{-1})\, f(g)\ ,$$

$$e_j^{K*}(f) = \frac{2}{3.2^K} \sum_{g \in G_{K-1}} \tau_j^{K-1}(g^{-1})\, f(g)\ ,$$

(le fait que l'on obtienne un système biorthogonal découlant de la relation d'orthogonalité des caractères $\sum_{g \in G_K} \hat{g}_1(g^{-1})\hat{g}_j(g) = \delta_i^j$).

L'espace X étant construit, on définit sur l'espace L(X) des opérateurs linéaires bornés de X dans X une suite de formes linéaires Tr_K définies par

$$Tr_K(T) = \frac{1}{2^K} \sum_{j=1}^{2^K} e_j^{K*}(T\, e_j^K)$$

avec $Tr_K\ T \in L(E)^*$ (L(E) muni de la topologie de la norme),

$Tr_K\ I = 1$ si I est l'identité.

Supposons avoir trouvé un ensemble compact $U \subset X$ et avoir la propriété suivante :

$$|Tr_{K+1}(T) - Tr_K(T)| < \alpha_K \sup_{x \in U} \| Tx \| \qquad \text{où} \sum_{K=1}^{\infty} \alpha_K < \infty .$$

Alors X ne peut pas avoir la propriété d'approximation uniforme.

En effet, la série $\Sigma(Tr_{K+1} - Tr_K)$ converge dans X^* , donc Tr_K converge vers un élément Tr_∞ de X^* . On a

a) $Tr_\infty\ I = 1$

b) $Tr_\infty\ T = 0$, pour tout T de rang fini.

a) est évident.

Pour démontrer b), on remarque que $Tr_L\ T = 0$ pour $L > K$, si T est de la forme $T(x) = y^*(x)e_j^K$, $y^* \in X^*$, et l'ensemble de combinaisons linéaires de tels opérateurs est dense dans l'ensemble des opérateurs de rang fini muni de la topologie de la norme. Supposons qu'il existe une suite T_n d'opérateurs de rang fini convergeant uniformément vers I sur U . On aurait alors

$$Tr_\infty |T_n - I| \to 0$$

d'une part, puisque

$$Tr_\infty |T_n - I| \le \sum_K \alpha_K \sup_{x \in U} |(T_n - I)(x)|$$

et par ailleurs

$$\mathrm{Tr}_{\infty}\,(I - T_n) = 1 ,$$

d'où la contradiction ; il reste à choisir les ε_j^K pour qu'il en soit ainsi.

3. <u>Choix des</u> ε_j^K

On a, en utilisant la définition des e_j^{K*} ,

$$\mathrm{Tr}_K(T) = \frac{1}{2^K} \sum_{j=1}^{2^K} \frac{1}{3.2^K} \sum_{g \in G_K} \varepsilon_j^K\, \sigma_j^K\, (g^{-1})(T\, e_j^K)(g)$$

$$= \frac{1}{3.4^K} \sum_{g \in G_K} T\,(\sum_{j=1}^{2^K} \varepsilon_j^K\, \sigma_j^K\, (g^{-1}) e_j^K)\,(g) ,$$

et

$$\mathrm{Tr}_{K+1}(T) = \frac{1}{6.4^K} \sum_{g \in G_K} T\,(\sum_{j=1}^{2^{K+1}} \tau_j^K(g^{-1}) e_j^{K+1})(g) .$$

Soit

$$\mathrm{Tr}_{K+1}(T) - \mathrm{Tr}_K(T) = \frac{1}{3.2^K} \sum_{g \in G_K} T(\Phi_g^K)(g) ,$$

où $\Phi_g^K = \frac{1}{2^{K+1}} \sum_{j=1}^{2^{K+1}} \tau_j^K(g^{-1}) e_j^{K+1} - \frac{1}{2^K} \sum_{j=1}^{2^K} \varepsilon_j^K\, \sigma_j^K\, (g^{-1}) e_j^K$, si $K \geq 1$.

On a

$$\Phi_g^K = 0 \quad \text{sur} \quad (G_{K-1} \cup G_K \cup G_{K+1})^c ,$$

$$\Phi_g^K(h) = \frac{1}{2^{K+1}} \sum_{j=1}^{2^{K+1}} \varepsilon_j^{K+1}\, \tau_j^K\, (g^{-1})\, \sigma_j^{K+1}(h) \qquad \text{si } h \in G_{K+1}$$

$$= \frac{1}{2^K}\Big[\, \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2^{K+1}} \tau_j^K(g^{-1}h) - \sum_{1}^{2^K} \sigma_j^K(g^{-1}h)\Big] \qquad \text{si } h \in G_K$$

$$= -\frac{1}{2^K} \sum_{j=1}^{2^K} \varepsilon_j^K\, \sigma_j^K\, (g^{-1})\, \tau_j^{K-1}(h) \qquad \text{si } h \in G_{K-1} .$$

Le lemme 1 montre que $|\Phi_g^K(h)| \leq A_1 \sqrt{K+1}\; 2^{-K/2}$ sur G_K . Nous allons montrer que l'on peut choisir les ε_j^K tels que $\| \Phi_j^K \| \leq A_1 \sqrt{K+1}\; 2^{-K/2}$.

<u>Lemme</u> 2.- <u>Soient</u> Y_i <u>des variables indépendantes de Bernoulli,</u> $P(Y_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. <u>Alors, il existe des constantes</u> A_4 , A_5 <u>telles que l'on ait, pour tout</u> $K \geq 1$ <u>et tout</u> $(\alpha_1,\ldots,\alpha_K) \in \mathbb{C}^K$:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{K} \alpha_i \, Y_i\right| \geq A_4 \sqrt{\Sigma |\alpha_i^2|} \sqrt{\log K}\right) < \frac{A_5}{K^3} .$$

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme 1.

Soient, alors, $(Y_j^K)_{\substack{j=1,\ldots,2^K \\ K=1,2,\ldots}}$ des variables de Bernoulli indépendantes.

En appliquant le lemme 2, on peut choisir une réalisation $\varepsilon_j^K = Y_j^K(\omega)$ des Y_j^K telle que l'on ait simultanément les inégalités

$$\left|\sum_{j=1}^{2^K} Y_j^K(\omega) \, \tau_j^{K-1}(g^{-1}) \, \sigma_j^K(h)\right| \leq A_4 \sqrt{\sum_{1}^{2^K} |\tau_j^{K-1}(g^{-1}) \, \sigma_j^K(h)|^2} \sqrt{\log 2^K}$$

$$\leq A_4 \, 2^{K/2} \sqrt{K+1} ,$$

pour $g \in G_{K-1}$, $h \in G_K$ (soit 9.2^{2K-1} inégalités),

et

$$\left|\sum_{j=1}^{2^K} Y_j^K(\omega) \, \sigma_j^K(g^{-1}) \, \tau_j^{K-1}(h)\right| \leq A_4 \, 2^{K/2} \sqrt{K+1} ,$$

pour $g \in G_K$, $h \in G_{K-1}$ (soit 9.2^{K-1} inégalités).

A g , h fixés, ces inégalités sont vraies sur des évènements de probabilité $> 1 - \frac{A_5}{2^{3K}}$. Donc la conjonction de ces inégalités est vraie sur un évènement de probabilité $> 1 - 18.2^{2K-1} \dfrac{A_4}{2^{3K}}$

> 0 pour $K > K_0$.

On a donc pu choisir les ε_j^K de manière que, pour $K > K_0$,

$$\|\Phi_g^K\| \leq A_4 \, 2^{-K/2} \sqrt{K+1} .$$

On a

$$|\mathrm{Tr}_{K+1}\, T - \mathrm{Tr}_K\, T| \leq \sup_{g \in G_K} \|T\, \Phi_g^K\| .$$

Il reste à choisir $U = \{K^2\, \Phi_g^K \ , K \geq K_o\}$. U est relativement compact puisque

$$\|\Phi_g^K\| \leq A_4\, 2^{-K/2} \sqrt{K+1} \quad \text{et} \quad \|\mathrm{Tr}_{K+1}\, T - \mathrm{Tr}_K\, T\| \leq \frac{1}{K^2} \sup_{x \in U} \|Tx\| .$$

On a la situation voulue.

<u>Remarques</u>.— 1) Des constructions très voisines permettent de construire un sous-espace de ℓ^p , pour $p > 2$, qui n'a pas la propriété d'approximation, pour $1 \leq p < 2$, les inégalités probabilistes ou autres utilisées ne valent plus, le problème est ouvert.

2) La propriété d'approximation n'est donc pas vérifiée par tous les Banach. Elle est donc trop forte en ce sens. Elle semble, par ailleurs, trop faible pour être bien intégrée dans la partie qui semble la plus intéressante des travaux actuels sur les Banach : à savoir qu'elle ne se décrit pas par des propriétés des sous-espaces de dimension finie (on peut donner à cet énoncé un sens assez précis). On peut donner plusieurs définitions de propriétés d'approximation plus liées aux espaces de dimension finie et satisfaites par des espaces classiques comme les L^p , les espaces complémentés des L^p , etc... (La propriété classique d'approximation métrique est elle-même apparemment trop faible.)

Dans l'état actuel des choses, il n'est pas possible de dire quelles sont les propriétés d'approximation véritablement utiles et "naturelles".

BIBLIOGRAPHIE

[1] ENFLO - A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math., 130(1973), p. 309-317.

[2] FIEGEL - Divers articles, à paraître.

[3] DAVIE - The approximation problem for Banach spaces, à paraître.