SÉMINAIRE N. BOURBAKI

J. M. LEMAIRE

Le transfert dans les espaces fibrés

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. nº 472, p. 23-37

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__23_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
23e année, 1975/76, n° 472

Novembre 1975

LE TRANSFERT DANS LES ESPACES FIBRÉS
[D'après J.BECKER et D.GOTTLIEB]

par J.M. LEMAIRE

§ 1. Introduction: essai d'analyse chronologique

1.1 Le transfert est une notion classique en (co)homologie des groupes : soit G un groupe discret, H un sous-groupe d'indice fini N , et $\mathfrak{M}$ un G-module. La trace :

$$\tau \; : \; \mathfrak{M}^H \longrightarrow \mathfrak{M}^G$$

induit un homomorphisme, appelé transfert :

$$\tau \; : \; H^*(H;\mathfrak{M}) \longrightarrow H^*(G;\mathfrak{M}) .$$

Si $\rho : H^*(G;\mathfrak{M}) \longrightarrow H^*(H;\mathfrak{M})$ est la restriction, la composée $\tau \circ \rho$ est la multiplication par l'indice N . (cf [L], p.55). On peut aussi définir le transfert par la (co)homologie singulière des revêtements finis d'ordre N : au niveau des chaînes, le transfert associe à un simplexe la somme de ses relèvements (cf par exemple [B] p.118).

Toujours dans le cas d'un revêtement $p : Y \to X$ d'ordre N , Atiyah ([A], p. 29) a remarqué que l'image directe des fibrés définit un transfert en K-théorie .

On a la formule :

(1) $\quad \forall \xi \in \mathrm{Vect}(X), \ \forall \eta \in \mathrm{Vect}(Y) \quad , \quad f_*(f^* \xi \otimes \eta) = \xi \otimes f_* \eta$

qui est à rapprocher de la formule :

$$\forall x \in C^*(X) \ , \ \forall y \in C^*(Y), \ \tau(p^* x \cup y) = x \cup \tau y$$

pour les cochaines singulières . Mais on notera qu'en général le fibré $f_*(1)$ n'est pas trivial, de sorte que $f_*(f^* \xi) = \xi \otimes f_*(1) \neq N.\xi$.

Dans [KP] , Kahn et Priddy généralisent tout cela en construisant une S-application (i.e. un morphisme dans la catégorie stable) :

$$\tau_p : \Sigma^r X^+ \longrightarrow \Sigma^r Y^+$$

qui induit les transferts ci-dessus ($X^+ = X \amalg * = X/\emptyset$). Par suite il y a un transfert en toute théorie de (co)homologie, et ce transfert commute aux opérations cohomologiques stables : on explique ainsi des résultats d'Evens [E] pour les opérations de Steenrod et de Quillen [Q] pour les opérations d'Adams localisées.

1.2 Les résultats précédents suggèrent les questions suivantes : soit $F \to E \xrightarrow{p} B$ une fibration ; dans quelles conditions :

a/ a-t-on un transfert $\tau_p : h^*(E) \to h^*(B)$ verifiant la formule :

(1') $$\tau_p(p\, x \cup y) = x \cup \tau_p\, \eta$$

pour une théorie multiplicative h^* ?

b/ ce transfert est-il induit par une S-application ?

Ces questions ont été résolues, avec un succès croissant, dans les articles [I] à [V] .(*)
Dans [I], Gottlieb définit le transfert en (co)homologie ordinaire, à coefficients (constants) quelconques, pour les fibrations localement triviales de fibre une variété topologique compacte M_n. Cette construction repose sur deux idées :

a/ "l'intégration de long de la fibre" : supposons M orientable, et, pour simplifier l'écriture, sans bord. Si le système local $\underset{\sim}{H}^n(M\,;\,Z)$ est trivial, la suite spectrale de Serre de cohomologie du fibré $M \to E \to B$ permet de définir :

$$p_{\#} : H^i(E,G) \to H^{i-n}(B\,;G)$$

par la composée :

(2) $$H^i(E) \twoheadrightarrow E_\infty^{i-n,\,n} \rightarrowtail E_2^{i-n,\,n} = H^{i-n}(B, H^n(M\,;G)) = H^{i-n}(B)$$

b/ le "théorème d'inclusion de la fibre". Il dit que, sous les mêmes hypothèses sur M, il existe une classe $\chi \in H^n(E, Z)$ telle que

(*) Le rapporteur remercie D. Gottlieb pour son "leitfaden".

$i^* \chi = \chi(M).\mu$, où $i : M \hookrightarrow E$ est l'inclusion, $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de M, et $\mu \in H^*(M\,;\,\mathbb{Z})$ la classe d'orientation. Ce dernier théorème est une généralisation de la remarque suivante : si M est différentiable, et si le fibré admet un groupe structural de difféomorphismes, alors le fibré tangent à M s'étend en un fibré sur E , à savoir le fibré des "vecteurs tangents" aux fibres : $EG \times_G TM \to EG \times_G M = E$. Par suite toute classe caractéristique de M est dans l'image de i^*, en particulier la classe d'Euler !

Toujours sous les hypothèses sur M faites en a/ et b/ le transfert $\tau : H^i(E) \to H^i(B)$ est alors défini par :

(3) $$\forall\, x \in H^i(E)\,,\ \tau(x) = p_{\#}\,(x \cup \chi\,)$$

ce transfert est naturel et satisfait la formule (1') . Il en résulte aisément que τp^* est la multiplication par $\chi(M)$. Cette approche reste intéressante car elle permet de définir, dans le cas où M est différentiable, des transferts associés à d'autres nombres caractéristiques (Pontryagin, Stiefel-Whitney) .

Dans [III] , elle est utilisée pour définir le transfert de Lefchetz, associé à un triangle :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & E \arrow[dl, "\rho"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

mais cette construction est dépassée par celle de [V]: voir plus loin.

1.3 La question b/ est résolue dans [II] , toujours dans le cas où la fibre est une variété compacte M . Bien que cette construction soit aussi dépassée par celle de [V] , il n'est pas inutile d'en dire quelques mots . Considérons d'abord le fibré trivial $p : M \to *$. Le transfert cherché est une S-application :

$$\tau\ :\ S^r = S^r \wedge S^\circ \ \to\ S^r \wedge M^+$$

telle que la composée :

$$S^r \xrightarrow{\tau} S^r \wedge M^+ \xrightarrow{S^r p^+} S^r$$

soit de degré $\chi(M)$.

Supposons M différentiable, de fibré tangent α , plongée dans $\mathbb{R}^r$, de fibré normal β . Le choix d'un voisinage tubulaire définit l'application de Thom-Pontryagin $c : S^r \to T(\beta)$. Alors on peut prendre pour $\tau : S^r \to S^r \wedge M^+$ la composée :

$$S^r \subsetneq T(\beta) \to T(\beta \oplus \alpha) \cong T(\mathbb{R}^r) = S^r \wedge M^+ .$$

En effet la composée :

$$T(\beta) \to T(\beta \oplus \alpha) \cong T(\mathbb{R}^r) = S^r \wedge M^+ \xrightarrow{p^+} S^r$$

n'est autre que l'application de Gauss :

$$g : T(\beta) = D(\beta)/S(\beta) \to e^r/S^{r-1} = S^r$$

qui est de degré $\chi(M)$ d'après le théorème de Hopf (cf [M] , th.1 p.38).

La construction du transfert $S^r \wedge B^+ \to S^r \wedge E^+$ dans [II] consiste à faire ce qui précède "fibre par fibre" : Gottlieb et Becker utilisent une version G-équivariante de l'application $S^r \to S^r \wedge M^+$ (qui repose sur le théorème de plongement de Mostow) et des constructions plus ou moins classiques de G-fibrés. Entre autres propriétés, le transfert ainsi obtenu généralise celui de Kahn et Priddy pour les revêtements.

1.4 Il restait à construire le transfert pour un fibré de Hurewicz , de fibre un cw-complexe compact. Dans [IV] , Casson et Gottlieb ont d'abord résolu ce problème en utilisant des lemmes techniques d'approximation des fibrations de Hurewicz par des fibrés de fibre une variété. Mais l'approche de [V] est beaucoup plus élégante, c'est donc elle que nous allons examiner plus en détail.

§ 2. Construction homotopique du transfert de Lefschetz

2.1 Les résultats

On considérera dans la suite un triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

dans lequel p est une fibration de Hurewicz et B un cw-complexe connexe, de dimension finie ; on suppose en outre que la fibre F de p a le type d'homotopie d'un cw-complexe fini. On désignera par Λ_f le nombre de Lefschetz de la restriction de f à F.

Théorème de transfert

Soit A un sous-complexe de B. Il existe une S-application :

$$\tau(f) : \Sigma^r(B/A) \to \Sigma^r(E/p^{-1}(A))$$

cette application est naturelle, ne dépend que de la classe d'homotopie fibrée de f, et possède les propriétés suivantes :

a/ Si $B = *$, la composée

$$S^r \xrightarrow{\tau(f)} \Sigma^r B^+ \xrightarrow{p^+} S^r$$

est de degré Λ_f.

b/ Pour toute théorie multiplicative h, on a les formules suivantes, pour tous $x \in h^*(B)$, $y \in h^*(E)$, $z \in h_*(B)$:

$$\tau(f)^* (p^* x \cup y) = x \cup (\tau(f)^* y)$$

$$p_* (y \cap \tau(f)_* z) = (\tau(f)^* y) \cap z \quad .$$

On déduit facilement des propriétés précédentes le :

Corollaire 1 : la composée :

$$H^*(B,A;G) \xrightarrow{p^*} H^*(E,p^{-1}(A);G) \xrightarrow{\tau(f)^*} H^*(B,A;G)$$

est la multiplication par Λ_f.

et la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch fournit immédiatement le :

Corollaire 2 : Pour toute théorie de cohomologie h, la composée :

$$h^*(B,A)\otimes Z[\Lambda_f^{-1}] \xrightarrow{p^*} h^*(E,p^{-1}(A))\otimes Z[\Lambda_f^{-1}] \xrightarrow{\tau(f)} h^*(B,A)\otimes Z[\Lambda_f^{-1}]$$

est un isomorphisme.

En particulier, si $\Lambda_f = 1$, l'homomorphisme $p^*: h^*(B,A) \to h^*(E,p^{-1}(A))$ est une injection sur un facteur direct. Une autre conséquence moins immédiate est le :

Théorème de transgression

Supposons la fibre F connexe, et soit $\omega : \Omega B \to F$ l'évaluation de l'action en un point de F (qui figure dans la suite d'Eckmann-Hilton). Alors, pour tout cw-complexe fini X, l'homomorphisme :

$$\omega_* : \{X, \Omega B\} \to \{X, F\}$$

est tel que $\Lambda_f \cdot \omega_* = 0$.

2.2 Construction de $\tau(f)$

Elle repose sur l'extension de la S-dualité (de Spanier-Whitehead, cf [H] p.207, ou [S] pp.321-335) aux fibrés, plus précisément aux ex-espaces de James ([J]).

L'idée d'utiliser la S-dualité est suggérée par la dualité d'Atiyah : reprenons les notations de 1.3, et considérons la composée :

$$S^r \xrightarrow{c} T(\beta) \xrightarrow{d} T(\beta) \wedge M^+$$

où d est défini par $d\, v_m = (v_m, m)$. C'est une S-dualité. Considérons maintenant l'application

$$\theta : T(\beta) \wedge M^+ \to S^r \wedge M^+$$

obtenue comme suit : le fibré normal au plongement diagonal $M \hookrightarrow D(\beta) \times M$ est $\alpha \oplus \beta \cong \mathbf{R}^r$, par suite on peut choisir un voisinage tubulaire de M dans $D(\beta) \times M$ homéomorphe à $e^r \times M$.

En passant l'extérieur des voisinages au quotient, on obtient θ. Il est clair que $\theta d c : S^r \to S^r \wedge M^+$ n'est autre que τ, et on peut montrer que $p\theta : T(\beta) \wedge M^+ \to S^r$ est S-dual de dc.

Le théorème de Hopf assure que la composée $(p\theta)(dc) : S^r \to S^r$ est de degré $\chi(M)$. Mais ceci se généralise :

Lemme ([V] , 2.1).- Soit X un cw-complexe fini et $f: X \to X$ une application continue ; soit $\widetilde{\lambda}(f) = \Sigma(-1)^i \operatorname{tr} \widetilde{H}_i(f)$. Soit $\mu : S^r \to X \wedge \widetilde{X}$ une S-dualité et $\widetilde{\mu} : X \wedge \widetilde{X} \to S^r$ le dual de μ pour la dualité :

$$S^{2r} = S^r \wedge S^r \xrightarrow{\mu\wedge\widetilde{\mu}} X \wedge \widetilde{X} \wedge X \wedge \widetilde{X} \xrightarrow{T} X \wedge \widetilde{X} \wedge X \wedge \widetilde{X}$$

(où T permute les X). Alors la composée :

$$S^r \xrightarrow{\mu} X \wedge \widetilde{X} \xrightarrow{f\wedge\widetilde{X}} X \wedge \widetilde{X} \xrightarrow{\mu} S^r$$

est de degré $\widetilde{\lambda}(f)$.

Preuve. Comme $\hat{\mu}$ est une S-dualité, $\hat{\mu}_*: \widetilde{H}_*(X, \mathbb{Q}) \otimes \widetilde{H}_*(X; \mathbb{Q}) \to \widetilde{H}_*(S^r; \mathbb{Q})$ est une dualité, i.e. la transposée $\widetilde{\widetilde{\mu}}_*: \widetilde{H}_*(X; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}^*(\hat{X}; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme de degré r . Par suite, en appliquant $\widetilde{H}_*(\ .\ ; \mathbb{Q})$, on est ramené à la version graduée de l'assertion suivante : si $u : V \to V$ est un endomorphisme d'un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, la composée :

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{id} \operatorname{Hom}(V, V) = V^* \otimes V \xrightarrow{V^* \otimes u} V^* \otimes V \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q}$$

où ε est la forme canonique (évaluation), est la multiplication par $\operatorname{tr} u$: c'est la définition intrinsèque de la trace !

Il s'ensuit que dans le cas du fibré trivial $F \to *$, on a la définition suivante du transfert : soit $\mu : S^r \to F^+ \wedge \widetilde{F}$ une S-dualité, $\widetilde{\mu}$ son dual comme ci-dessus.

Alors $\tau(f)$ est la composée :

$$S^r \xrightarrow{\mu} F^+ \wedge \widetilde{F} \xrightarrow[(F,f)^+\wedge \widetilde{F}]{} F^+ \wedge F^+ \wedge \widetilde{F} \xrightarrow[F^+\wedge\widetilde{\mu}]{} F^+ \wedge S^r = S^r \wedge F^+ .$$

Le transfert par une fibration quelconque n'est autre que l'extension de de cette construction aux ex-espaces.

2.3 Ex-espaces

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons les principales définitions :

un ex-espace (au-dessus d'un cw-complexe fixé B) est la donnée de deux applications continues $p: E \to B$ et $\Delta : B \to E$ telles que $p\Delta = B$. On notera simplement $E = (E, B, p, \Delta)$.

Une ex-application $f : E \to E'$ entre deux ex-espaces est une application continue telle que $p'f = p$ et $f\Delta = \Delta'$. On définit de même une ex-homotopie.

On identifie un espace pointé $(X, *)$ à l'ex-espace $(B \times X, B, p_B, j)$, avec $jb = (b, *)$. A toute application continue $p : E \to B$ on associe l'ex-espace :

$$\bar{E} = (E \amalg B, B, \bar{p}, \bar{\Delta})$$

où $\bar{p}$ et $\bar{\Delta}$ sont définis de façon évidente.

Si E, E' sont deux ex-espaces, on définit sans beaucoup d'imagination les ex-espaces $E \times_B E'$, $E \vee_B E'$, $E \wedge_B E'$, $\Sigma E = S^1 \times B \wedge_B E$. On définit ΩE comme étant l'ex-espace des lacets dans les fibres issus de la section $\Delta(B)$, etc ...

Dans ce rapport, on appellera "bon" ex-espace un ex-espace $E = (E, B, p, \Delta)$ qui vérifie les conditions suivantes :

1/ $p : E \to B$ est une ex-fibration, i.e. il existe une fonction de relèvement de chemins :

$$\Gamma : E \times_B B^I \longrightarrow E^I$$

telle que pour tout $\sigma \in B^I$, on ait

$$\Gamma(\Delta(\sigma(0)), \sigma) = \Delta\sigma$$

2/ E est "bien basé", i.e. il existe une rétraction (au sens des ex-applications)

$$r : E \times_B I \longrightarrow E \vee_B I \ .$$

Il est clair qu'un espace bien pointé s'identifie à un bon ex-espace comme indiqué plus haut, et que si $p : E \to B$ est une fibration, $\bar{E}$ est un bon ex-espace.

Pour les bons ex-espaces, on peut développer une théorie de l'homotopie entièrement analogue à la théorie classique (théorème de suspension, suites exactes, etc...). Pour les ex-espaces dont la base est de dimension finie et la fibre a le type d'homotopie d'un cw-complexe fini fini, on définit la S-dualité comme dans le cas classique :

$\mu : S^r \times B \to E \wedge_B \tilde{E}$ est une S-dualité si :

$$D_\mu \ : \{X \wedge_B E, Y\}_q \ \to \ \{X, Y \wedge_B \tilde{E}\}_{q+r}$$

$$D^\mu \ : \{E \wedge_B X, Y\}_q \ \to \ \{X, E \wedge Y\}_{q+r}$$

sont des isomorphismes, pour tout q, quels que soient les bons ex-espaces X et Y.

On a les résultats suivants :

<u>Théorème 2.3.1</u>

<u>$S^r \times B \to E \wedge_B \tilde{E}$ est une S-dualité si la restriction à chaque fibre est une S-dualité</u>.

<u>Théorème 2.3.2</u>

<u>Tout bon ex-espace, de base de dimension finie et de fibre ayant</u> le <u>type d'homotopie d'un cw-complexe fini</u>, <u>admet un S-dual</u>.

Nous pouvons à présent définir le transfert :

soit
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$
un triangle commutatif, avec B cw-complexe de dimension finie, p fibration de fibre F ayant le type d'homotopie d'un cw-complexe fini. D'après le théorème 2.3.2, il existe une S-dualité d'ex-espaces :

$$\mu : S^r \times B \ \to \ \bar{E} \wedge_B \tilde{E}$$

comme dans le cas des espaces, $\bar{E} \wedge_B \tilde{E}$ est S^{2r}-autodual et on définit

$$\tilde{\mu} : \bar{E} \wedge_B \tilde{E} \ \to \ S^r \times B \ .$$

Soit la composée :

$$S^r \times B \xrightarrow{\mu} \bar{E} \wedge_B \tilde{E} \xrightarrow{(\bar{E}, \bar{f}) \wedge \tilde{E}} \bar{E} \wedge_B \bar{E} \wedge_B \tilde{E} \xrightarrow{\bar{E} \wedge \tilde{\mu}} \bar{E} \wedge_B B \times S^r \xrightarrow{\simeq} \Sigma^r \bar{E}$$

et soit $A \subset B$, et $E_A = p^{-1}(A)$. La composée ci-dessus envoie

$S^r \times A \cup \{s_\circ\} \times B$ dans $S^r \times E_A \cup \{s_\circ\} \times E$; par passage au quotient, on obtient donc :

$$\tau(f) : S^r \wedge (B/A) \longrightarrow S^r \wedge (E/E_A)$$

qui est le transfert cherché. Les vérifications nécessaires se font sans surprise.

2.4 Démonstration du théorème de transgression

Nous en indiquons seulement les étapes essentielles.

Soit
$$\begin{tikzcd} E' \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "p'"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & \Sigma X & \end{tikzcd}$$
un triangle commutatif,

avec les hypothèses du théorème de transfert mais où la base est la suspension d'un espace pointé X.

Si $F' = p'^{-1}(*)$ est la fibre de p', on a le transfert :

$$\tau(f') : \Sigma^{r+1} X \longrightarrow \Sigma^r(E'/F')$$

ce dernier a ici une interprétation très simple : en relevant les chemins canoniques de ΣX, à savoir $\lambda_{<t,x>} : u \mapsto <ut, x>$, on définit une application continue

$$\sigma \quad : \Sigma X \longrightarrow E'/F' .$$

<u>Lemme</u> - <u>Si</u> F' <u>est connexe</u>, <u>les S-applications</u> $\tau(f')$ <u>et</u> $\Lambda\sigma$ <u>sont égales</u> (Λ <u>désigne le nombre de Lefschetz de</u> $f'|F'$).

Soit maintenant le triangle
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$
toujours avec les mêmes hypothèses. Soit $b_\circ \in B$, et $\omega : \Omega B \to F$ l'évaluation de l'action en $b_\circ$.

Soit X un complexe de dimension finie, et $g : X \to \Omega B$ une application continue pointée.

La composée :

$$\Sigma X \xrightarrow{\Sigma g} \Sigma\Omega B \xrightarrow{a} B$$

où a est l'adjointe de l'identité de ΩB , induit un triangle :

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "p'"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & \Sigma X & \end{tikzcd}$$

Lemme .- Le carré :

$$\begin{tikzcd} E'/F \arrow[r, "k"] & \Sigma F \\ \Sigma X \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "\Sigma g"] & \Sigma\Omega B \arrow[u, "\Sigma\omega"'] \end{tikzcd}$$

dans lequel $k : E'/F \to \Sigma F$ est le "bord" de la suite de Puppe de la cofibration $F \hookrightarrow E'$, est commutatif .

Pour établir le théorème de transgression, il suffit de montrer que $\wedge\{\omega g\} = o$, pour toute $g : X \to \Omega B$ avec X de dimension finie .
D'après le second lemme, on a $\{\omega\, g\} = \{k\,\sigma\}$ et d'après le premier , $\wedge\{\omega\, g\} = \{k.\wedge\sigma\} = \{k\}.\tau(f')$. Or le diagramme commutatif suivant de S-applications :

$$\begin{tikzcd} E'^{+} \arrow[r, "c'"] & E' \arrow[r, "j"] & E'/F \arrow[r, "k"] & \Sigma F \\ \Sigma X^{+} \arrow[u, "\tau(f')"] \arrow[r, "c"] & \Sigma X \arrow[ur, "\tau(f')"] & & \end{tikzcd}$$

où c, c', j sont les quotients évidents, et $kj = o$ par Puppe, montre que $\{k\}\tau\{c\} = o$, d'où $\{k\}\tau = o$ puisque c a une section.

§ 3. Applications

3.1 Un principe de scindement ([II])

Théorème.- Soit ξ un $2n$-fibré vectoriel réel de base B de dimension finie . Il existe un cw-complexe (de dimension finie) X et une application $\lambda : X \to B$ tels que :

(1) le groupe structural de $\lambda^*\xi$ se réduit au normalisateur $N(T)$ d'un tore maximal de $O(2n)$.

(2) $\lambda^* : h^* B^+ \to h^* E^+$ est un monomorphisme sur un facteur direct , pour toute théorie h^* .

La démonstration s'appuie sur le fait que $\chi(G/N(T)) = 1$ pour tout groupe de Lie compact G (cf par exemple [B] , p.27, 6.3) . On prend alors $X = \tilde{E}/N(T)$, où $\tilde{E}$ est l'espace total du $0(2n)$-fibré principal associé à ξ et l'on applique le corollaire 2 à la fibration :

$$0(2n)/N(T) \to \tilde{E}/N(T) \xrightarrow{\lambda} \tilde{E}/0(2n) = B \ .$$

Ce théorème est à la base de la démonstration du théorème de Quillen-Friedlander-Sullivan, alias la conjecture d'Adams, proposée dans [II], § 7 . L'idée consiste à appliquer le théorème à la théorie de cohomologie associée à l'espace de lacets infini BF, et compte-tenu de ce que $N(T) = \mathfrak{S}_n \int 0(2)$, de se ramener via des techniques inspirées de [Q], à la "conjecture" pour les fibrés de rang 2 , démontrée par Adams.

3.2 "The fibering question" (cf [III] et [IV])

Il s'agit de savoir si un espace E peut être l'espace total d'une fibration de façon non triviale. Dans ce qui suit, "compact" signifie homotope à un cw-complexe fini.

Théorème : Il n'existe pas de fibration non triviale , de fibre et base compacte , d'espace total $\mathbb{R}\mathbb{P}^{2n}$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2n}$, $\mathbb{H}\mathbb{P}^{2n}$, cay $\mathbb{P}^2$.

Théorème : Soit $p : S^n \to B$, $n \geq 2$ une fibration non triviale de base et de fibre F compacte . Alors :

- si n est pair , $F \sim S^0$
- si n est impair , $[p] \in \pi_n(B)$ est d'ordre infini .

Faute de l'espace nécessaire, nous nous contenterons de montrer à titre d'exemple qu'il n'existe pas de submersion non triviale $p : \mathbb{R}\mathbb{P}^{2n} \to M$ sur une variété M . D'après Ehresmann, p est une fibration de fibre une variété compacte F . On a $\chi(M) . \chi(F) = \chi(\mathbb{R}\mathbb{P}^{2n}) = 1$, d'où $\chi(F) = \pm 1$.

On en déduit que F est connexe , et la suite exacte d'homotopie montre que $\pi_1(M) = 0$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Le transfert en cohomologie entière montre que p^* est injective , donc $H^*(M)$ est de torsion et M n'est pas orientable : ergo $\pi_1(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit $\widetilde{M}$ le revêtement universel de M ; on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} S^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}\mathbb{P}^{2n} \\ \tilde{p}\downarrow & & \downarrow p \\ \widetilde{M} & \longrightarrow & M \end{array}$$

et le transfert montre que $\tilde{p}^*$ est injective : par suite, ou bien $\widetilde{M}$ est acyclique, donc un point, ou bien F est de dimension nulle et connexe, donc un point.

3.3 Applications du théorème de transgression

Notons d'abord que ce théorème entraîne que $\Lambda\omega_* = o$ pour toute théorie d'homologie, en particulier l'homotopie stable, et que $\Lambda\omega^* = o$ au moins en cohomologie ordinaire.
Quant à l'application ω, elle apparaît sous des formes variées : projection $G \to G/H$, où G est un groupe topologique et G/H un quotient compact ; évaluation $\omega : M \to X$ où M est un espace d'équivalences d'homotopie de X ; inclusion de la fibre d'un fibré principal. D'où une variété d'applications, qu'on trouvera dans [III], [IV], ou [V].
En voici quelques unes :

Proposition.- Soit G un groupe de Lie compact, et N le normalisateur d'un tore maximal. Alors la projection $G \to G/N$ est stablement triviale.

En effet, $\chi(G/N) = 1$ et G est un polyèdre. On observera que $\rho_* : \pi_n(G) \to \pi_n(G/N)$ est un isomorphisme pour $n \geq 3$!

Proposition.- Soit G un groupe de Lie qui opère sur un cw-complexe connexe fini X, tel que $\chi(X) \neq o$. Soit $x \in X$, et soit $\omega_x : G \to X$ l'évaluation en x. Alors $o = \omega_* : H_*(G;Z) \to H_*(X;Z)$.

Remarquons d'abord que l'assertion ne dépend pas de x. Ensuite, le théorème de Lefschetz, joint au fait qu'un tore admet un générateur, montre qu'un tore maximal T de G admet un point fixe x_o.

Par suite ω_{x_o} factorise à travers $\rho : G \to G/T$. Le théorème de transgression montre que $\chi(G/T) \cdot \rho_* = o$. Or, d'après Bott et Borel [BB], $H_*(G/T ; Z)$ est sans torsion. Comme $\chi(G/T) = |W(G)| \neq o$ on a $\rho_* = o$ et donc $\omega_* = o$.

<u>Proposition</u>.- <u>Soit</u> $\alpha \in \pi_i(S^{2n})$, <u>soit</u> $\{\alpha\} \in \pi^S_{i-2n}$ <u>l'élément représenté par</u> α, <u>et soit</u> $\iota_{2n} \in \pi_{2n}(S^{2n})$ <u>un générateur</u>. <u>Alors, si</u> $[\alpha, \iota_{2n}] = o$, <u>on a</u> $2\{\alpha\} = o$.

<u>Preuve</u> $[\alpha, \iota_{2n}] = o$ signifie qu'il existe une application $F : S^i \times S^{2n} \to S^{2n}$ dont la restriction à $S^i \times \{*\}$ est α et la restriction à $\{*\} \times S^{2n}$ est l'identité. Soit M l'espace des applications continues de degré 1 de S^{2n} dans S^{2n}. L'adjointe de F est $\widetilde{F} : S^i \to M$, et on a $\omega \widetilde{F} = \alpha$, où $\omega : M \to S^{2n}$ est l'évaluation au point de base. Comme $\chi(S^{2n}) = 2$, le théorème de transgression montre que $2\{\alpha\} = o$.

BIBLIOGRAPHIE

[I] D.GOTTLIEB - Fibre bundles and the Euler characteristic, J.Diff. Geom. 10 (1975) pp 39-48

[II] J.C.BECKER - D.GOTTLIEB - The transfer map and fiber bundles, Topology 14 (1975) pp 1-12

[III] J.C.BECKER - D.H.GOTTLIEB - Applications of the evaluation map and transfer map theorems, Math.Ann. 211 (1974) pp 277-288

[IV] A.CASSON - D.GOTTLIEB - Fibrations with compact fibres, preprint

[V] J.C.BECKER - D.H.GOTTLIEB - The transfer for fibrations and duality, preprint

[A] M.ATIYAH - Characters and cohomology of finite groups, IHES n°9 (1961), pp 23-64

[BB] R.BOTT - On torsion in Lie groups, Proc.Nat. Acad.Sc. USA (1954) pp 586-588

[B] G.E.BREDON - Introduction to compact transformation groups, Academic Press. N.Y. 1972

[E] L.EVENS - Steenrod operations and the transfer, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968) pp 1387-1388

[H] D.HUSEMOLLER - Fibre bundles, McGraw-Hill, N.Y. 1966

[J] I.JAMES - Ex-homotopy theory, Ill Journ.Math. 15 (1971), pp 324-337

[KP] D.KAHN - S.PRIDDY - Applications of the transfer to stable homotopy theory, Bull.Amer. Math.Soc. 78 (1972) pp 981-986

[L] S.LANG - Rapport sur la cohomologie des groupes, Benjamin, N.Y. (1966)

[M] J.MILNOR - Topology from a differentiable viewpoint, U-Press of Virginia, Charlottesville 1965

[Q] D.QUILLEN - The Adams conjecture, Topology 10 (1970) pp 67-80

[S] R.SWITZER - Algebraic Topology - Homotopy and Homology Springer-Verlag Grundl. Math.Wiss. n°212, Berlin 1975