

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

YVES MEYER

Les nouvelles intégrales singulières de Calderón

Séminaire N. Bourbaki, 1980, exp. n° 528, p. 57-65

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__57_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES NOUVELLES INTÉGRALES SINGULIÈRES DE CALDERÓN

par Yves MEYER

A. Calderón a découvert en 1977 toute une série de noyaux conduisant, par un procédé que nous allons décrire, à des opérateurs bornés sur L^2 et sur les divers espaces L^p , $1 < p < +\infty$.

Rappelons d'abord la définition d'une intégrale singulière de Calderón-Zygmund.

Nous désignerons par E un espace euclidien de dimension n et par $|x|$ la norme (ou longueur) du vecteur $x \in E$. Enfin Ω est le produit $E \times E$ privé de la diagonale : $(x, y) \in \Omega$ signifie donc $y \neq x$.

DÉFINITION 1.- Une fonction continue $K : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est appelée un noyau de Calderón-Zygmund si elle vérifie les quatre propriétés suivantes :

- (1) il existe une constante $C > 0$ telle que $|K(x, y)| \leq C|x-y|^{-n}$;
- (2) les gradients $\nabla_x K(x, y)$ et $\nabla_y K(x, y)$, pris au sens des distributions, sont, en fait, des fonctions localement bornées et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in \Omega$, on ait $|\nabla_x K(x, y)| \leq C|x-y|^{-n-1}$ et $|\nabla_y K(x, y)| \leq C|x-y|^{-n-1}$;
- (3) pour toute fonction $f \in C_0^\infty(E)$, $g(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \epsilon} K(x, y)f(y) dy$ existe presque partout ;
- (4) en posant $g = T(f)$, on a $\|T\| \leq C$; c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(E)$ on ait $\|g\|_2 \leq C\|f\|_2$.

On appelle norme du noyau de Calderón-Zygmund K et l'on note $\|K\|$ la borne inférieure des constantes C que l'on peut faire figurer dans (1), (2) et (4).

Remarques.- Dans les premiers exemples introduits par Giraud, Calderón et Zygmund, on supposait que $K(x, y) = L(x, x-y)$ où $L(x, z)$ possède les propriétés suivantes :

- (5) $L(x, \lambda z) = \lambda^{-n} L(x, z)$ pour $z \neq 0$ et $\lambda > 0$;
- (6) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante C_α telle que $|\partial_z^\alpha L(x, z)| \leq C_\alpha$ pour tout $x \in E$ et tout $z \in E$ de longueur 1 ;
- (7) $\int_{|z|=1} L(x, z) d\sigma(z) = 0$; $d\sigma$ désignant la mesure invariante sur la sphère unité.

Alors (1), (2) et (3) sont presque évidentes. Tandis que (4) s'obtient par un procédé dû à G. Giraud [12] : la décomposition de $z \rightarrow L(x, z)$ en harmoniques sphériques sur $|z| = 1$ (x étant fixé).

Pour traiter le cas des opérateurs pseudo-différentiels classiques, il faut modifier un peu la définition 1.

DÉFINITION 2.- Un opérateur borné $T : L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ est appelé un opérateur de Calderón-Zygmund s'il existe une fonction $K : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés (1) et (2) et telle que

$$(8) \quad Tf(x) = \int K(x, y) f(y) dy$$

pour toute fonction $f \in C_0^\infty(E)$ et tout x n'appartenant pas au support de f .

On appelle $\sigma(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ une fonction telle que $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{-|\alpha|}$ et on définit l'opérateur $\sigma(x, D)$ par $\sigma(x, D) f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$. Alors $\sigma(x, D)$ est un opérateur de Calderón-Zygmund [8].

Les opérateurs de Calderón-Zygmund généralisent donc les intégrales singulières v. p. $\int K(x, y) f(y) dy$ de la définition 1. Ces opérateurs possèdent les propriétés remarquables suivantes :

(9) T envoie L^1 dans L^1 -faible. Cela signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\lambda > 0$, la mesure de l'ensemble des x où $|Tf(x)| > \lambda$ ne dépasse pas $\frac{C}{\lambda} \|f\|_1$;

(10) T envoie continûment L^p dans lui-même pour $1 < p < +\infty$;

(11) T envoie continûment L^∞ dans BMO (défini ci-dessous).

DÉFINITION 3.- Une fonction (localement intégrable) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à BMO s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout cube $Q \subset \mathbb{R}^n$ on puisse trouver une constante c_Q pour laquelle

$$(12) \quad \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c_Q| dx \leq C .$$

Des exemples sont $\log|x|$ et toutes les fonctions $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $\alpha > 1$, $|\log|x||^\alpha \notin$ BMO.

1. Les théorèmes de Calderón

THÉORÈME 1.- Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier $k \geq 1$ et toute fonction $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $|A(x) - A(y)| \leq |x - y|$ ($x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$), le noyau $\frac{(A(x) - A(y))^k}{(x - y)^{k+1}}$ soit un noyau de Calderón-Zygmund définissant un opérateur T_k , borné sur $L^2(\mathbb{R})$ et dont la norme ne dépasse pas C^k .

THÉORÈME 2.- Il existe un nombre $\delta > 0$ et une constante $C_1 > 0$ tels que si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \delta|x - y|$ le noyau $\frac{1}{x - y + \varphi(x) - \varphi(y)}$ soit un noyau de Calderón-Zygmund de norme $\leq C_1$.

THÉORÈME 3.- Il existe un $R > 1$ tel que, pour toute fonction F holomorphe dans $|z| < R$, le noyau $\frac{1}{x - y} F\left(\frac{A(x) - A(y)}{x - y}\right)$ soit un noyau de Calderón-Zygmund lorsque A vérifie les hypothèses du théorème 1.

Il est tentant de développer $\frac{1}{x - y + \varphi(x) - \varphi(y)}$ en

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))^k}{(x - y)^{k+1}} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \delta^k \frac{(A(x) - A(y))^k}{(x - y)^{k+1}}.$$

Alors le théorème 2 résulte du théorème 1.

Cette approche s'est avérée impraticable ([7] et [8]). La méthode de Calderón est tout à fait différente. Il démontre d'abord le théorème 2 en prouvant un résultat très remarquable sur la distorsion de la représentation conforme pour les domaines de classe C^1 (théorème 8 ci-dessous).

Calderón en déduit le théorème 1 puis le théorème 3. Avant de décrire les grandes lignes de la démonstration des théorèmes de Calderón, nous allons donner deux applications.

THÉORÈME 4.- Soit Ω un ouvert borné et simplement connexe du plan complexe. Supposons que $\Gamma = \partial\Omega$ soit une courbe fermée simple de classe C^1 sans point stationnaire. Pour toute fonction $f \in L^2(\Gamma)$, définissons $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - \zeta}.$$

Alors $F(\zeta)$ a, pour presque tout $z_0 \in \Gamma$, une limite non tangentielle en z_0 quand $\zeta \rightarrow z_0$. Si on note par $g(z_0)$ cette limite, on a $\|g\|_2 \leq C \|f\|_2$.

En d'autres termes le noyau de Cauchy réalise une projection de L^2 sur le sous-espace de L^2 formé par les valeurs au bord des fonctions analytiques.

La preuve du théorème 4 repose sur l'identité

$$(13) \quad \lim_{\zeta \rightarrow z_0} F(\zeta) = \frac{1}{2} f(z_0) + \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} .$$

Par un choix correct des coordonnées locales, la dernière intégrale singulière est exactement celle du théorème 2.

THÉORÈME 5 (Conjecture de Denjoy). - Pour toute courbe rectifiable Γ du plan complexe et toute partie compacte K de Γ , la capacité analytique de K est nulle si et seulement si la longueur de K est nulle.

Le théorème 5 découle du théorème 4. Le lecteur peut se reporter à D. Marshall ou à V. Havin [14] et [13].

Avant d'aller plus loin, quelques remarques permettront peut-être de mieux apprécier la force des résultats obtenus.

Si dans les théorèmes 1, 2 ou 3, $A \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ou $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, les opérateurs correspondants sont des opérateurs pseudo-différentiels classiques. En revanche, il n'en est rien si l'on suppose seulement que $|A(x) - A(y)| \leq |x - y|$; et ceci, même si $A \in C^\infty(\mathbb{R})$. De plus les méthodes que l'on emploie pour étudier l'action des O.ψ.d. sur L^2 ne donnent aucun résultat ici.

Il est d'ailleurs facile de voir que l'hypothèse $\|A'\|_\infty < +\infty$ est nécessaire pour que le noyau $\frac{(A(x) - A(y))^k}{(x - y)^{k+1}}$ définisse un opérateur borné sur L^2 .

Les théorèmes 1, 2 et 3 sont donc les meilleurs possibles en ce qui concerne la régularité des fonctions A et φ .

Il est raisonnable de penser que, dans le théorème 2 tout $\delta \in [0, 1[$ convient mais on ne le sait pas encore.

Vérifions que le théorème 1 et le théorème 3 découlent simplement du théorème 2. Il suffit pour cela de poser $\varphi(x) = \zeta A(x)$ avec $|\zeta| = \delta$ et d'écrire

$$\frac{(A(x) - A(y))^k}{(x - y)^{k+1}} = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \delta} (x - y + \zeta(A(x) - A(y)))^{-1} \zeta^{-k-1} d\zeta .$$

On choisit C assez grand pour que $C^k > C_1 \delta^{-k}$ pour tout $k \geq 0$.

Enfin le théorème 3 est immédiat en développant F en série entière.

2. Démonstration du théorème 2 (première partie)

Pour obtenir le théorème 2, il suffit de montrer l'existence de deux constantes C_1 et δ telles que, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\|\varphi'\|_\infty \leq \delta$, la norme du noyau de Calderón-Zygmund $[x - y + \varphi(x) - \varphi(y)]^{-1}$ ne dépasse pas C_1 .

Naturellement, on sait alors a priori que l'opérateur correspondant est un o.ψ.d. classique, borné sur L^2 .

Calderón considère la famille à un paramètre des noyaux

$$K_t(x, y) = \frac{1}{x - y + t[\varphi(x) - \varphi(y)]} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1.$$

Le noyau K_0 est la transformation de Hilbert et $\|K_0\| = \pi$. Pour majorer $\|K_1\|$, Calderón étudie

$$\frac{\partial}{\partial t} K_t = L_t = - \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{[x - y + t(\varphi(x) - \varphi(y))]^2}$$

et démontre la proposition suivante.

PROPOSITION 1.- Il existe une constante C_2 telle que, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\|\varphi'\|_\infty \leq \frac{1}{2}$, on ait $\|\frac{\partial}{\partial t} K_t\| \leq C_2 \|K_t\|^2$ pour $0 \leq t \leq 1$.

On en déduit que $\frac{\partial}{\partial t} \|K_t\| \leq C_2 \|K_t\|^2$ et $\|K(t)\| \leq \frac{\pi}{1 - C_2 \pi t}$ à condition que $t < \frac{1}{\pi C_2}$. On choisit donc $\delta < \frac{1}{\pi C_2}$; le fait qu'on ne connaisse pas C_2 implique que l'on ne sache rien sur δ .

Quitte à poser $\psi = t\varphi$, on a $\|\psi'\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ et l'on peut oublier le paramètre t . On est ramené à $t = 1$ et l'on appelle Γ la courbe image de \mathbb{R} par $x \rightarrow x + \varphi(x)$.

Si φ est à valeur réelle, il n'y a rien à démontrer car le changement de variable $u = x + \varphi(x)$ résout le problème.

On désigne par V le demi-espace situé au-dessus de Γ et par U celui situé en-dessous.

Par un calcul très ingénieux, Calderón ramène la proposition 1 au résultat suivant.

PROPOSITION 2.- Si $F(z)$, $G(z)$ et $H(z)$ sont trois fonctions holomorphes dans U , nulles à l'infini et telles que

$$(14) \quad F'(z) = G(z) H'(z)$$

et qui se prolongent par continuité à Γ , on a

$$(15) \quad \|F\|_1 \leq C \|G\|_2 \|H\|_2 .$$

L'intérêt de l'équation fonctionnelle (14) est d'être invariante par représentation conforme. On a posé $\|F\|_1 = \int_{\Gamma} |F(z)| d|z|$ etc.

On a de même, si $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, $1 < r < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$,

$$(16) \quad \|F\|_r \leq C \|G\|_p \|H\|_q .$$

D'ailleurs l'une des inégalités (16) suffit à établir le théorème de Calderón.

Arrivé à cette étape, on utilise une représentation conforme de U sur le demi-plan supérieur.

3. Démonstration du théorème 2 (seconde partie)

DÉFINITION 3.- La classe A_p , $1 < p < +\infty$, de Muckenhoupt est l'ensemble des fonctions $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ qui sont mesurables, localement intégrables et telles qu'il existe une constante C pour laquelle on ait, pour tout cube $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-1/p-1} dx \right)^{p-1} \leq C .$$

Si $\omega \in A_p$ alors $\log \omega \in \text{BMO}$. Réciproquement, si $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à BMO , il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\omega(x) = \exp(\varepsilon b(x)) \in A_2$ ([6]).

Par exemple, $|x|^{-\alpha} \in A_p$ si $0 \leq \alpha < n$ tandis que $|x|^\alpha \in A_p$ équivaut à $0 \leq \alpha < n(p-1)$.

Un exemple moins trivial est donné, en dimension 1, par le produit de Riesz $\omega(x) = \prod_{k \geq 0} (1 + r_k \cos 3^k x)$ dans lequel $0 \leq r_k < 1$ et $\sum_0^\infty r_k^2 < +\infty$. Alors $\omega \in A_p$ pour tout $p \in]1, +\infty[$. Si $\sum_0^\infty r_k^2 = +\infty$, le produit de Riesz ne définit plus une fonction mais une mesure singulière [16].

Le résultat fondamental sur ces classes est le théorème suivant [6].

THÉORÈME 6.- Soit $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction localement intégrable et soit

$L^p(\omega dx)$ l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \omega dx \right)^{1/p} < +\infty$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes quand $1 < p < +\infty$

$$(17) \quad \omega \in A_p ;$$

(18) tous les opérateurs de Calderón-Zygmund sont bornés sur $L^p(\omega dx)$.

Les liens entre ces classes, la théorie du potentiel et la représentation conforme ont été élucidés par Dahlberg et Calderón [9] et [4].

THÉORÈME 7.- Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et connexe dont la frontière est localement le graphe d'une fonction lipschitzienne. Alors la mesure harmonique $dP(x_0, y)$ est pour tout $x_0 \in D$ absolument continue par rapport à la mesure de surface $d\sigma$ sur ∂D et plus précisément $dP(x_0, y) = \omega(y) d\sigma(y)$ où $\omega \in A_p$ pour p assez grand.

On a, en fait, $A_{p_1} \subset A_{p_2}$ si $p_1 < p_2$.

THÉORÈME 8.- Soient $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne ($|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq C|x_2 - x_1|$) et $D \subset \mathbb{R}^2$ l'ouvert défini par $y > \varphi(x)$. On appelle $\theta(z)$ la représentation conforme du demi-plan supérieur sur D normalisée par $\theta(\infty) = \infty$. Alors $\omega(x) = |\theta'(x)| \in A_2$.

En d'autres termes, même si φ est de classe C^1 , c'est-à-dire si D est un ouvert de classe C^1 , θ ne se prolonge pas au bord en un difféomorphisme C^1 ; la distorsion au bord est mesurée par $\omega(x)$.

Pour terminer la démonstration du théorème de Calderón on transporte par θ toute la situation sur le demi-plan supérieur noté Π . On doit alors démontrer que si $\omega \in A_2$ et si $F_1(z)$, $G_1(z)$ et $H_1(z)$ sont holomorphes dans Π et vérifient $F_1'(z) = G_1(z)H_1'(z)$, on a

$$(19) \int_{-\infty}^{+\infty} |F_1(x)| \omega(x) dx \leq C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G_1(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |H_1(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2}$$

où C ne dépend que de ω .

Là encore, on peut se contenter dans (19) d'autres exposants p , q et r .

Dans ce dernier cas (19) résulte facilement du théorème 6 car $F_1(x)$ se calcule à l'aide des deux fonctions $G_1(x)$ et $H_1(x)$ par des opérateurs de Calderón-Zygmund.

Cette remarque termine la démonstration du théorème de Calderón.

4. Applications à la théorie du potentiel

Soit Ω un ouvert borné et simplement connexe de \mathbb{R}^n dont la frontière est localement le graphe d'une fonction de classe C^1 .

Alors pour tout $1 < p < +\infty$, il existe une constante C_p ayant la propriété suivante :

Pour toute fonction harmonique $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se prolongeant à $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ en une fonction de classe C^1 on a

$$(20) \quad \left(\int_{\partial\Omega} |\text{Grad } u|^p d\sigma \right)^{1/p} \leq C_p \left(\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^p d\sigma \right)^{1/p}.$$

On a désigné par $\frac{\partial u}{\partial n}$ la dérivée normale de u . Pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et tout $h > 0$, on désigne par $\Gamma_{\alpha, h}(y)$, $y \in \partial\Omega$, le cône défini par les deux conditions $|x - y| \leq h$ et $(x - y) \cdot n > \alpha |x - y|$; n est la normale en y à $\partial\Omega$ orientée vers l'intérieur.

Si h est assez petit, $\Gamma_{\alpha, h}(y)$ est, pour tout $y \in \partial\Omega$, contenu dans Ω . On pose $u^*(y) = \sup_{x \in \Gamma_{\alpha, h}(y)} |u(x)|$; la fonction u^* s'appelle la fonction maximale non tangentielle de u .

Alors il existe une constante $C'_p(\alpha, h)$ telle que pour toute fonction continue $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, harmonique dans $\bar{\Omega}$, on ait

$$(21) \quad \left(\int_{\partial\Omega} (u^*)^p d\sigma \right)^{1/p} \leq C'_p(\alpha, h) \left(\int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma \right)^{1/p}.$$

Si Ω était un ouvert à bord C^∞ , on passerait de $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}$ à $\text{Grad } u|_{\partial\Omega}$, quand u est harmonique dans $\bar{\Omega}$, par un opérateur pseudo-différentiel T classique d'ordre 0. L'inégalité (20) ne serait autre que la continuité sur L^p de tels opérateurs.

Dans le cas des ouverts à frontière C^1 le passage de $\frac{\partial u}{\partial n}$ à $\text{Grad } u$ s'obtient par des intégrales singulières du type de celles du théorème 3; les opérateurs correspondants ne sont plus des o.ψ.d.

L'inégalité (20) a été obtenue par Fabes, Jodeit et Rivière; (21) a été trouvée de façon indépendante par ces auteurs et Dahlberg.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. P. CALDERÓN - Commutators of singular integral operators, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 53 (1965), p. 1092-1099.
- [2] A. P. CALDERÓN - Algebras of singular integral operators, Proc. Symp. Pure Math., 10 (1966), p. 18-55.
- [3] A. P. CALDERÓN - Singular integrals, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), p. 426-465.
- [4] A. P. CALDERÓN - Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 74 (1977), p. 1324-1327.
- [5] A. P. CALDERÓN - Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications, ICM 1978, Helsinki.
- [6] R. COIFMAN and F. FEFFERMAN - Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math., 51 (1974), p. 241-250.
- [7] R. COIFMAN et Y. MEYER - Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 28 (fasc. 3)(1978).
- [8] R. COIFMAN et Y. MEYER - Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque n° 57, SMF, 11 rue P. et M. Curie, Paris (5e).
- [9] B. E. J. DAHLBERG - Estimates of harmonic measure, Arch. Rat. Mech. Anal., 65(1977), p. 275-288.
- [10] B. E. J. DAHLBERG - Harmonic functions in Lipschitz domains, Willamstown (1978).
- [11] E. FABES, M. JODEIT and N. RIVIÈRE - Preprint.
- [12] G. GIRAUD - Equations à intégrales principales, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 51(1934), p. 251-372.
- [13] V. P. HAVIN - Boundary properties of integrals of Cauchy type and of conjugate harmonic functions in regions with rectifiable boundary, Mat. Sb. (N.S.) 68 (110) (1965), p. 499-517.
- [14] D. E. MARSHALL - Painlevé null sets, Inst. Mittag-Leffler, Report n° 9 (1977).
- [15] A. ZYGMUND - Intégrales singulières, Lecture Notes in Math. n° 204, Springer-Verlag, 1971.
- [16] A. ZYGMUND - Trigonometric series, Cambridge (1959).