YVES MEYER

Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 550, p. 293-302

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__293_0>

RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES [d'après J.-M. Bony]

par Yves MEYER

Bony vient d'obtenir de remarquables résultats sur la régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires. On appelle m l'ordre de l'équation non linéaire $F(f,\dots,\partial^\beta f,\dots)=0$; m est le maximum des ordres $|\beta|$ des dérivées $\partial^\beta f$ de la fonction inconnue $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ figurant dans l'équation. Un des théorèmes de Bony est que pour tout $r>0$, toute solution f de classe C^{m+r} appartient à C^{m+2r} microlocalement dans les directions non caractéristiques. Dans le cas général, ces directions dépendent, en fait, de la solution f en question.

Dans le cas quasilinéaire, les résultats obtenus sont meilleurs (ils sont même optimaux en vue des contre-exemples).

La méthode de Bony est très originale. On approche d'abord l'équation non linéaire par une équation pseudo-différentielle linéaire. Les opérateurs pseudo-différentiels que l'on doit utiliser ne sont d'aucun type usuel mais appartiennent aux "classes interdites" $S^m_{1,1}$ de Hörmander.

Bien qu'aucun calcul symbolique ne soit possible pour $S^m_{1,1}$, les opérateurs paradifférentiels de Bony se composent comme il faut. On inverse alors microlocalement l'équation pseudo-différentielle qui a permis de linéariser le problème non linéaire et l'on obtient le théorème de régularité.

Le texte qui suit est une adaptation libre de [1]. Tout en conservant l'organisation générale de Bony, nous nous sommes permis de modifier les démonstrations afin d'obtenir des énoncés un peu plus précis.

1. Les espaces de Sobolev et la décomposition de Littlewood-Paley

Nous fixons désormais une fonction $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ radiale telle que $\varphi(\xi)=1$ quand $|\xi|\le\frac{1}{2}$ et que $\varphi(\xi)=0$ pour $|\xi|\ge 1$; $|\xi|=(\xi_1^2+\dots+\xi_n^2)^{1/2}$. Nous désignons par $\mathcal{F}:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ la transformation de Fourier et par $S_k:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur de "sommes partielles" défini par $\mathcal{F}[S_k(f)]=\varphi(\frac{\xi}{2^k})\mathcal{F}f(\xi)$. (Nous utiliserons également dans la suite la notation $\hat f$ pour désigner la transformée de Fourier de f : $\hat f(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix.\xi}f(x)dx$).

Le "bloc dyadique" $\Delta_k(f)$ de f est défini par $\Delta_k(f) = S_{k+1}(f) - S_k(f)$ ou, de façon équivalente par

$$\mathcal{F}[\Delta_k(f)] = \psi(\frac{\xi}{2^k})\mathcal{F}f(\xi) \quad \text{où} \quad \psi(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{2}) - \varphi(\xi) .$$

Le support de la transformée de Fourier $\mathcal{F}\Delta_k(f)$ est donc contenu dans la couronne $\Gamma_k = \{\xi \in \mathbb{R}^n ; \frac{1}{2} 2^k \leq |\xi| \leq 2.2^k\}$.

Alors la décomposition (en fait on devrait dire "une décomposition" car il y a divers choix possibles pour φ) de Littlewood-Paley de f est

$$f = S_o(f) + \Delta_o(f) + \ldots + \Delta_k(f) + \ldots$$

Si, réciproquement, une distribution tempérée S s'écrit $S = \sum_o^\infty S_j$ où le spectre de S_j est contenu dans la couronne dyadique Γ_{3j} , $j \in \mathbb{N}$, alors cette décomposition est une décomposition de Littlewood-Paley de S car le no man's land qui sépare les couronnes Γ_{3j} permet la construction de φ .

En revanche une décomposition $S = \sum_o^\infty S_k$ où le spectre de S_k est contenu dans Γ_k n'est pas nécessairement une décomposition de Littlewood-Paley.

L'intérêt de cette décomposition vient de ce que la plupart des espaces fonctionnels utilisés en analyse sont caractérisés par les propriétés de la suite $\Delta_k(f)$ des blocs dyadiques de f . Donnons quelques exemples bien connus qui seront utilisés par la suite.

a) L'espace de Sobolev H^s , $s \in \mathbb{R}$, est caractérisé par la condition $\|S_o(f)\|_2 + (\sum_o^\infty \|\Delta_k(f)\|_2^2 4^{ks})^{1/2} < +\infty$.

b) L'espace de Besov $\Lambda^s_{p,1}$, $s \in \mathbb{R}$, est caractérisé par $\|S_o(f)\|_p + \sum_o^\infty \|\Delta_k(f)\|_p 2^{ks} < +\infty$. ($1 \leq p \leq +\infty$).

c) L'espace de Hölder C^r , $0 < r < 1$, coïncide avec Λ_r (fonctions hölderiennes d'exposant r). Quand $r = 1$ nous noterons C^1 l'espace usuel et C^1_* la classe de Zygmund des fonctions continues $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ telles qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle on ait $|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq C|h|$ (pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$). Enfin si $r > 1$, $r = m+s$ où $0 < s \leq 1$, on définit C^r comme l'ensemble des fonctions $f \in C^s$ telles que si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| \leq m$, $\partial^\alpha f \in C^s$ (la dérivée étant prise au sens des distributions). Naturellement si $r = m+1$, on définit C^r_* en remplaçant C^1 par la classe de Zygmund C^1_* .

Dans ces conditions $f \in C^r$ $(r \notin \mathbb{N})$ et $f \in C^r_*$ $(r \geq 1 , r \in \mathbb{N})$ sont équivalents à $\|\Delta_k f\|_\infty \leq C2^{-kr}$ et $\|S_o(f)\|_\infty \leq C$.

d) L'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ usuel est caractérisé (si $1 < p < +\infty$) par $S_o(f) \in L^p$ et $(\sum_o^\infty |\Delta_k(f)|^2)^{1/2} \in L^p$.

e) On désigne par $S^o_{1,o}$ la classe des symboles vérifiant $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^n$. Si $0 < p \leq 1$ les opérateurs correspondants $T \in \mathrm{Op}\, S^o_{1,o}$ ne sont pas bornés sur L^p et l'on définit [3] la version locale de l'espace H^p de Stein et Weiss comme l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telles que $Tf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $T \in Op\, S^0_{1,0}$. Alors f appartient à la version locale de H^p si et seulement si $S_0(f) \in L^p$ et $(\sum_0^\infty |\Delta_k(f)|^2)^{1/2} \in L^p$.

f) Supposons de nouveau $1 < p < +\infty$ et $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev généralisant L^p_s est l'ensemble des distributions $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que $(I - \Delta)^{s/2} S \in L^p(\mathbb{R}^n)$. C'est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme $\|(I - \Delta)^{s/2} S\|_{L^p}$. De sorte que si $s = k \in \mathbb{N}$ et si $1 < p < +\infty$, L^p_s est le sous-espace de L^p formé des fonctions f telles que $\partial^\beta f \in L^p$ pour $0 \leq |\beta| \leq k$ (les dérivées sont prises au sens des distributions, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ $\partial^\beta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\beta_1} \ldots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\beta_n}$ et $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$).

Cet espace est caractérisé par les conditions $S_0(f) \in L^p$ et $(\sum_0^\infty 4^{ks} |\Delta_k(f)|^2)^{1/2} \in L^p$.

2. Un premier exemple de linéarisation d'un problème non linéaire

Pour commencer par un exemple simple, nous allons redémontrer le résultat bien connu suivant.

THÉORÈME 1.- *Soit* $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ *une fonction nulle en* 0 . *Alors si* $1 < p < +\infty$, $s > \frac{n}{p}$ *et* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *appartient à* L^p_s , *la fonction composée* $F(f) \in L^p_s$.

Pour le voir on écrit la décomposition de Littlewood-Paley de f

$f = S_0(f) + \Delta_0(f) + \ldots + \Delta_k(f) + \ldots$ et l'on a $S_{k+1}(f) = f_{k+1} = S_0(f) + \ldots + \Delta_k(f)$ Finalement f_k converge uniformément vers f sur tout $\mathbb{R}^n$. De sorte que l'on peut écrire $F(f)$ sous la forme d'une série télescopique

$$F(f) = F(f_0) + [F(f_1) - F(f_0)] + \ldots + [F(f_{k+1}) - F(f_k)] + \ldots$$

Le terme $F(f_0)$ est trivial. En fait $f_0 \in L^p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et également à L^∞_k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors un calcul immédiat donne que $F(f_0) \in L^p_k$.

Nous écrirons ensuite

$$F(f_{k+1}) - F(f_k) = F(f_k + \Delta_k(f)) - F(f_k) = \Delta_k(f) \int_0^1 F'(f_k + t\Delta_k(f))dt = m_k \Delta_k(f) .$$

Nous avons posé $m_k = \int_0^1 F'(f_k + t\Delta_k(f))dt$.

Soit $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur linéaire défini par $L(g) = \sum_0^\infty m_k \Delta_k(g)$. L'opérateur L est un cas particulier d'opérateurs de la classe exotique $S^0_{1,1}$ qui joue dans ce qui suit un rôle fondamental. On a, par des calculs très simples $\|\partial^\beta m_k\|_\infty \leq C_\beta 2^{k|\beta|}$; on part pour cela de $\|f_k\|_\infty \leq C$ qui est donné par le théorème de Sobolev. Puis l'inégalité de Bernstein donne $\|\partial^\beta f_k\|_\infty \leq C 2^{k|\beta|}$ et enfin il vient $\|\partial^\beta F'(f_k)\|_\infty \leq C_\beta 2^{k|\beta|}$ par dérivation d'une fonction composée. Le symbole de L est $\sum_0^\infty m_k(x)\psi(\frac{\xi}{2^k})$ qui appartient à $S^0_{1,1}$.

Les opérateurs $T \in Op^0_{1,1}$ (et en particulier L) jouissent de propriétés de continuité remarquables. En particulier, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 2.- Soit C_α , $\alpha \in \mathbb{N}^n$, une suite de constantes positives et $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et telles que $\|\partial^\alpha m_k\|_\infty \le C_\alpha 2^{k|\alpha|}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Alors l'opérateur $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ défini par $L(g) = \sum_0^\infty m_k(x)(\Delta_k g)(x)$ se prolonge en un opérateur borné de L^p_s dans lui-même pour tout $p \in]1,+\infty[$ et tout $s > 0$.

Le théorème 2 implique le théorème 1 qui est donc prouvé.

Le théorème 2 est encore vrai si $p = +\infty$ à condition de remplacer L^p_s par C^s (défini ci-dessus) si $s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$ et par C^s_* si $s \ge 1$, $s \in \mathbb{N}$ (C^s est défini en termes de fonctions hölderiennes d'exposant $s-k$ et C^s_* à l'aide de la classe de Zygmund).

Le point remarquable du théorème 2 est que l'opérateur L est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole $\sigma(x,\xi) = \sum_0^\infty m_k(x)\psi(2^{-k}\xi) \in S^0_{1,1}$. L'opérateur correspondant n'est pas en général borné sur L^p pour $1 < p < +\infty$ de sorte que le théorème 2 est inexact si $s = 0$. Par ailleurs le cas $p = +\infty$ est dû à E. Stein (notes d'un cours donné à Princeton en 1972-1973).

Naturellement le théorème 2 n'est qu'un cas particulier du résultat plus général suivant.

THÉORÈME 3.- Soit σ un symbole appartenant à la classe $S^m_{1,1}$. Alors pour tout $s > 0$ et tout $p \in]1,+\infty[$, l'opérateur pseudo-différentiel $\sigma(x,D)$ se prolonge en un opérateur borné de L^p_{s+m} dans L^p_s .

Ici $m \in \mathbb{R}$ est arbitraire et $\sigma \in S^m_{1,1}$ signifie que $\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et que $|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\beta|}$.

3. La seconde linéarisation d'un problème non linéaire

Nous empruntons maintenant à Bony la notion de paraproduit entre deux fonctions (ou distributions). Soient $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Comme ci-dessus nous utilisons la décomposition de Littlewood-Paley $f = S_0(f) + \sum_0^\infty \Delta_k(f)$ de f . Alors le paraproduit $\pi(a,f)$ est défini par

$$\pi(a,f) = \sum_2^\infty S_{k-2}(a)\Delta_k(f) . \tag{1}$$

Naturellement le choix de $k-2$ n'est pas fortuit. Il est fait de sorte que la série définissant $\pi(a,f)$ puisse s'écrire $\sum_{k\in 3\mathbb{N}+2} + \sum_{k\in 3\mathbb{N}+3} + \sum_{k\in 3\mathbb{N}+4}$ et que chacune de ces trois séries se présente comme une décomposition de Littlewood-Paley. Par exemple on observe que le spectre du produit $S_{k-2}(a)\Delta_k(f)$ est contenu dans la somme algébrique $\{|\xi| \le \frac{1}{4}2^k\} + \{\frac{1}{2}2^k \le |\xi| \le 2.2^k\} \subset \{\frac{1}{4}2^k \le |\xi| \le \frac{9}{4}2^k\} = \tilde{\Gamma}_k$. Les "couronnes dyadiques" $\widetilde{\Gamma}_k$ prises trois par trois sont deux à deux disjointes ce qui prouve que les termes à l'intérieur de la somme $S(a,f)(x) = \sum_{k\in 3\mathbb{N}+2} S_{k-2}(a)\Delta_k(f)$ constituent une décomposition de Littlewood-Paley de $S(a,f)$.

THÉORÈME 4.- Soient $n \geq 1$ un entier, $p \in]1,+\infty[$ et $s > \frac{n}{p}$ deux nombres réels. Posons $s = \frac{n}{p} + r$, $r > 0$. Alors pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ appartenant à $L^p_s(\mathbb{R}^n)$ et pour toute fonction $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$F(f) = \pi(F'(f),f) + g \tag{2}$$

où $g \in L^p_{s'}$, $s' = \frac{n}{p} + 2r$.

Cet énoncé généralise et améliore le résultat correspondant de Bony [1] dans lequel $p = 2$ et $s' < \frac{n}{p} + 2r$. La preuve de (2) est immédiate (en théorie). Notre première linéarisation donnait

$$F(f) = L(f) + S_o(f) \tag{3}$$

où $L \in \mathrm{Op}\, S^0_{1,1}$ est défini par la symbole $\sum_0^\infty m_k(x)\psi(2^{-k}\xi)$ et $m_k(x) = \int_0^1 F'(f_k + t\Delta_k)dt$, $f_k = S_k(f)$.

Le paraproduit $\pi(a,f)$ associé à une fonction $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est également un opérateur linéaire (agissant sur f), défini par la symbole $\sum_0^\infty S_{k-2}(a)\psi(2^{-k}\xi) \in S^0_{1,1}$.

Le théorème 4 découle alors du fait que, avec les notations ci-dessus, $L(f) - \pi(a,f) = \rho(x,D)f$ où $\rho \in S^{-r}_{1,1}$.

Remarques.- La démonstration que nous avons utilisée se généralise aussitôt au cas de m fonctions $f_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ appartenant à $L^p_s(\mathbb{R}^n)$ $(s = \frac{n}{p} + r$, $r > 0)$ et d'une fonction $F = F(X_1,\ldots,X_m)$ appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Alors on a

$$F(f_1,\ldots,f_m) = \sum_1^m \pi\left[\frac{\partial F}{\partial X_j}(f_1,\ldots,f_m),f_j\right] + g \tag{4}$$

où $g \in L^p_{s'}$, $s' = \frac{n}{p} + 2r$.

D'autre part, dans le cas particulier où $p = 2$ (c'est-à-dire des espaces de Sobolev usuels) on peut montrer que non seulement $g \in H^{s'}$ mais que plus précisément g appartient à l'espace de Besov $\Lambda^{2s}_{1,1} \subset \Lambda^{s'}_{2,1} \subset H^{s'}$.

4. Les opérateurs paradifférentiels

Dans ce qui suit C^r sera toujours remplacé, quand $r \in \mathbb{N}$, par l'espace C^r_* défini à l'aide de la classe de Zygmund.

DÉFINITION 1.- Soit $r > 0$. Nous dirons qu'un opérateur linéaire $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est régularisant d'ordre r si L se prolonge en un opérateur continu de $L^p_s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p_{s+r}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in]1,+\infty[$ et tout $s > -r$.

Par exemple tout opérateur $L \in \mathrm{Op}\, S^{-r}_{1,1}$ est régularisant d'ordre r en ce sens.

Comme le remarque Bony, il est impossible d'inclure dans une même algèbre d'opérateurs tous les opérateurs différentiels à coefficients constants ainsi que tous les opérateurs de multiplication (ordinaire) par les fonctions de classe C^r $(r > 0)$.

L'idée fondamentale de Bony est que ce programme peut être réalisé si la multiplication ordinaire est remplacée par la paramultiplication $\pi(a,f)$, $a \in C^r$.

L'algèbre que l'on obtient est décrite dans [1]. Nous allons présenter une algèbre plus grande contenant les classes de Hörmander $\mathrm{Op}\, S^m_{1,0}$, $m \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION 2.- <u>La classe</u> A^m_r <u>de symboles est définie si</u> $r > 0$ <u>et</u> $m \in \mathbb{R}$. <u>Un symbole</u> $\sigma(x,\xi) \in A^m_r$ <u>s'il vérifie les conditions suivantes</u> : <u>d'une part</u>

(5) $$\|\partial^\alpha_\xi \sigma(x,\xi)\|_{C^r(dx)} \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n ;$$

<u>d'autre part, pour tout</u> $\beta \in \mathbb{N}^n$ <u>tel que</u> $|\beta| > r$ <u>et tout</u> $\alpha \in \mathbb{N}^n$

(6) $$\|\partial^\beta_x \partial^\alpha_\xi \sigma(x,\xi)\|_{L^\infty(dx)} \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\beta|-r} .$$

Si $r = 0$, on convient que $A^m_0 = S^0_{1,1}$ et dans (5), C^r est remplacé par les classes de Zygmund quand $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$.

On a, de façon évidente, $S^m_{1,0} \subset A^m_r \subset S^m_{1,1}$. Si $m = 0$, on écrira A_r au lieu de A^0_r .

DÉFINITION 3.- <u>On désigne par</u> $\mathrm{Op}\, A_r$ <u>l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels</u> $\tau(x,D)$ <u>associés aux symboles</u> $\tau \in A_r$.

La correspondance entre symbole et opérateur est la correspondance usuelle telle que $\tau(x,D)e^{i\xi.x} = \tau(x,\xi)^{i\xi.x}$.

DÉFINITION 4.- <u>Nous désignons par</u> $B^m_r \subset A^m_r$ <u>le sous-espace des symboles</u> $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ <u>tels que</u>

(7) $$\|\partial^\alpha_\xi \sigma(x,\xi)\|_{C^r(dx)} \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

<u>et que</u>

(8) <u>pour tout</u> ξ <u>fixé, le spectre de</u> $x \longrightarrow \sigma(x,\xi)$ <u>soit contenu dans la boule</u> $|\eta| \leq \frac{1}{10}|\xi|$.

<u>Si</u> $r = 0$, <u>on remplace</u> $C^r(dx)$ <u>par</u> $L^\infty(dx)$ <u>dans</u> (7).

L'inclusion $B^m_r \subset A^m_r$ résulte alors des inégalités classiques de Bernstein.

Donnons quelques exemples.

Si $f \in L^p_s$, $s = \frac{n}{p} + r$ et $r > 0$, l'opérateur L défini dans la démonstration du théorème 1 appartient à $\mathrm{Op}\, A_r$.

Si $a \in C^r(\mathbb{R}^n)$, $r > 0$, l'opérateur $f \longrightarrow \pi(a,f)$ appartient à $\mathrm{Op}\, A_r$. Il appartiendrait à $\mathrm{Op}\, B_r$ si le paraproduit était défini par $\sum_6^\infty S_{k-6}(a)\Delta_k(f)$. En fait $\mathrm{Op}\, A_r \equiv \mathrm{Op}\, B_r$, modulo les opérateurs régularisants d'ordre r . La démonstration qui suit est tirée de [2] p. 43.

<u>Lemme</u>.- <u>Tout symbole</u> $\sigma \in A_r$ <u>s'écrit</u> $\sigma = \tau + \rho$ <u>où</u> $\tau \in B_r$ <u>et</u> $\rho \in S^{-r}_{1,1}$.

Pour le voir; on désigne par $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ une fonction ayant les propriétés suivantes

(9) $\theta(\eta,\xi) = 0$ si $|\xi| \leq \frac{1}{10}$ ou si $|\eta| \geq \frac{1}{10}|\xi|$

(10) $\theta(\eta,\xi) = 1$ si $|\eta| \leq \frac{1}{20}|\xi|$ et $|\xi| \geq 1$

(11) $\theta(\lambda\eta,\lambda\xi) = \theta(\eta,\xi)$ si $\lambda \geq 1$ et $|\eta| + |\xi| \geq 1$.

On appelle $\hat{\sigma}(\eta,\xi)$ la transformée de Fourier partielle par rapport à la variable x de $x \longrightarrow \sigma(x,\xi)$ et l'on pose $\hat{\tau}(\eta,\xi) = \hat{\sigma}(\eta,\xi)\theta(\eta,\xi)$ et $\hat{\rho}(\eta,\xi) = [1-\theta(\eta,\xi)]\hat{\sigma}(\eta,\xi)$. Les détails sont faciles et laissés au lecteur.

Comme illustration de cette méthode, donnons une preuve nouvelle d'un théorème de Nagase [4].

THÉORÈME 5.- <u>Supposons que</u> $|\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$ <u>et que</u> $|\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi) - \partial_\xi^\alpha\sigma(y,\xi)| \leq C_\alpha|x-y|^\sigma(1+|\xi|)^{-|\alpha|+\sigma\tau}$ <u>où</u> $0 \leq \sigma \leq 1$ <u>et</u> $0 \leq \tau < 1$. <u>Ceci pour tout</u> $\alpha \in \mathbb{N}^n$. <u>Alors l'opérateur pseudo-différentiel correspondant</u> $\sigma(x,D)$ <u>est borné sur tous les</u> $L^p(\mathbb{R}^n)$ <u>pour</u> $1 < p < +\infty$.

On découpe le symbole σ en $\tau + \rho$ en employant la méthode ci-dessus. Alors, de façon évidente $\tau \in B_0$ et un calcul immédiat montre que $|\partial_\xi^\alpha\rho(x,\xi) - \partial_\xi^\alpha\rho(y,\xi)| \leq C_\alpha|x-y|^{(1-\tau)\sigma}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$. L'opérateur $\rho(x,D)$ est borné sur tous les L^p en vertu du théorème 9 page 38 de [2] ($1 < p < +\infty$).

En ce qui concerne le terme principal $\tau(x,D)$, il appartient à $\mathrm{Op}\, B_r$ avec $r = 0$; à ce titre il est borné sur tous les espaces L_s^p ($1 < p < +\infty$, $s \in \mathbb{R}$) comme on le voit en reprenant la preuve du théorème 9, page 38 de [2].

5. <u>Le calcul symbolique pour les opérateurs paradifférentiels</u>

THÉORÈME 6.- <u>Soient</u> $r > 0$, $\sigma \in B_r$ <u>et</u> $\tau \in S_{1,1}^0$. <u>Alors</u>

$$\tau(x,D) \circ \sigma(x,D) = \omega(x,D) + \rho(x,D)$$

<u>où</u> $\omega(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq r} \frac{1}{(i)^{|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \tau(x,\xi)\partial_x^\alpha\sigma(x,\xi)$ <u>et où</u> $\rho(x,\xi) \in S_{1,1}^{-r}$.

Le théorème 6 exprime que l'on a un calcul symbolique mais seulement à l'ordre r . En imitant les techniques habituelles de calcul sur les opérateurs pseudo-différentiels, on en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION.- <u>Soient</u> $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ <u>et</u> $\sigma \in B_r$ <u>tels que</u> $\liminf|\sigma(x_0,\lambda\xi_0)| > 0$ ($\lambda \longrightarrow +\infty$). <u>Alors il existe</u> $\tau \in A_r$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ <u>et</u> $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ <u>tels que</u>

(12) $\varphi(x_0) = 1$, $\mu(\lambda\xi_0) = 1$ si $\lambda \geq \lambda_0$ et $\mu(\lambda\xi) = \mu(\xi)$ si $\lambda \geq 1$ et $|\xi| \geq \lambda_0$

(13) $\tau(x,D) \circ \sigma(x,D) = \varphi(x)\mu(D) + \rho(x,D)$ où $\rho \in S_{1,1}^{-r}$.

6. <u>Application aux équations aux dérivées partielles non linéaires</u>

Désignons par $N \geq 1$ un entier, par $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction des variables $X_0,\ldots,X_n$ et par $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^m ($m \in \mathbb{N}$) vérifiant $F(x,f(x),\ldots,\partial^\alpha f(x),\ldots) = 0$ où $|\alpha| \leq m$, m étant le maximum de ces $|\alpha|$.

THÉORÈME 7.- <u>Définissons le lieu caractéristique</u> Γ_f <u>associé à la solution</u> f <u>de</u> $F(x,f(x),\dots,\partial^\beta f(x),\dots) = 0$ <u>comme l'ensemble des</u> $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ <u>tels que</u> $\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial X_\alpha}(x,f(x),\dots,\partial^\beta f(x),\dots)(i\xi)^\alpha = 0$.

<u>Alors toute solution</u> $f \in L^p_s(\mathbb{R}^n)$ <u>de</u> $F(x,f(x),\dots,\partial^\beta f(x),\dots) = 0$ $s = m + \frac{n}{p} + r$, $r > 0$, $1 < p \leq +\infty$, <u>appartient microlocalement à</u> $L^p_{s'}$, $s' = m + \frac{n}{p} + 2r$, <u>en dehors du lieu caractéristique</u>.

On écrit, en effet, $F(x,f(x),\dots,\partial^\beta f(x),\dots) = \sum_1^N \pi(\frac{\partial F}{\partial X_\alpha}(x,\dots,\partial^\beta f,\dots),\partial^\alpha f(x)) + g(x)$ où $g \in L^p_{\frac{n}{p}+2r}$. On pose $L_\alpha(u) = \pi(\frac{\partial F}{\partial X_\alpha}(x,\dots,\partial^\beta f,\dots),u)$. Alors f est solution de $\sum_1^N L_\alpha(\partial^\alpha f) = -g$.

On appelle L l'opérateur $\sum_1^N L_\alpha \circ \partial^\alpha \circ (I-\Delta)^{-m/2} \in \mathrm{Op}\, B_r$. Il vient, en posant $h = (I-\Delta)^{m/2} f$, $L(h) = g$; équation que l'on inverse grâce à la proposition. On obtient $\varphi(x)\mu(D)h \in L^p_{\frac{n}{p}+2r}$ ce qu'il fallait démontrer.

Dans le cas où $p = +\infty$, on remplace $L^p_{\frac{n}{p}+r}$ par C^r avec la convention habituelle que, si $2r \in \mathbb{N}$, C^{2r} est remplacé par l'espace C^{2r}_* défini à l'aide de la classe de Zygmund.

7. <u>Les équations quasi-linéaires et le contre-exemple</u>

Supposons que l'équation non linéaire s'écrive $\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(f,\dots,\partial^\beta f,\dots)\partial^\alpha f = 0$ où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à L^p_s , $s = m + \frac{n}{p} + r$, $r > 0$ et où $c_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec la condition que les seules dérivées $\partial^\beta f$ qui interviennent soient d'ordre $|\beta| \leq m-1$. L'équation est alors appelée quasi-linéaire.

On pose $\gamma_\alpha(x) = c_\alpha(f,\dots,\partial^\beta f,\dots) \in C^{r+1}$ et l'on a $\gamma_\alpha(x)\partial^\alpha f = \pi(\gamma_\alpha,\partial^\alpha f) + r_\alpha$ où $r_\alpha \in L^p_{\frac{n}{p}+2r+1}$. Il ne reste plus qu'à imiter le raisonnement ci-dessus pour obtenir $f \in L^p_{m+\frac{n}{p}+2r+1}$ dans les directions non caractéristiques.

On a donc une amélioration de la régularité d'une unité dans les directions non caractéristiques par rapport au cas purement non-linéaire. L'exemple suivant montre que la méthode utilisée est optimale. Dans $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \log(1 + x_+^\alpha + y_+^\alpha)$ est de classe C^α $(\alpha > 0)$ et est solution de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Les directions caractéristiques sont les axes de coordonnées du plan dual. Or, en développant $\log(1+t)$ en série, on voit que $f(x,y) = a(x) + a(y) - x_+^\alpha y_+^\alpha + r(x,y)$ où $r(x,y) \in C^{3\alpha}$ dans les directions non caractéristiques ($a(x) + a(y) \in C^\infty$ dans les directions non caractéristiques). On a donc $f \in C^{2\alpha}$ dans les directions non caractéristiques ce qui est exactement ce qu'on obtient en linéarisant $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$ par $\pi(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}) + \pi(\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x})$ et en appliquant le calcul paradifférentiel.

8. Le cas p-adique

On désigne par $\mathbb{Z}_p$ le groupe des entiers p-adiques et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $\mathcal{F}_n$ l'algèbre de Boole des classes d'équivalence $E \subset \mathbb{Z}_p$ modulo le sous-groupe $p^n\mathbb{Z}_p$. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{Z}_p)$, on appelle $S_n(f)$ l'espérance conditionnelle de f par rapport à $\mathcal{F}_n$ et l'on définit $\Delta_n(f) = S_{n+1}(f) - S_n(f)$.

Alors la décomposition (canonique) de Littlewood-Paley de f est $f = c_o + \sum_o^\infty \Delta_n(f)$ où $c_o = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx$. Cette décomposition peut être lue de deux façons différentes. D'une part, il s'agit d'une martingale ; d'autre part, il s'agit réellement de blocs de la série de Fourier de f associés aux fréquences ξ telles que $|\xi|_p = p^{n+1}$.

En effet, les caractères $\xi : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{T}$ sont définis par $\xi(x) = \exp 2\pi i \frac{\ell}{p^n} x$ où $n \in \mathbb{N}$, $(\ell,p) = 1$ et $1 \leq \ell \leq p^n - 1$ (naturellement $\ell = 0$ correspond à $\xi = 1$). On pose alors $|\xi|_p = p^n$ et l'on remarque que les caractères de longueur p^n sont caractérisés par la propriété d'être $\mathcal{F}_n$-mesurables. Cette observation permet de relier les deux points de vue sur la série $c_o + \sum_o^\infty \Delta_n(f)$.

Le paraproduit $\pi(a,f)$ est alors donné par

$$\pi(a,f) = \sum_o^\infty S_n(a)\Delta_n(f) .$$

L'aspect remarquable de cette formule est que l'opérateur $f \longrightarrow \pi(a,f)$ est une transformation de martingale au sens de Doob.

Les transformations de martingale les plus générales sont définies par une suite m_n, $m \in \mathbb{N}$, de fonctions $\mathcal{F}_n$-mesurables. Alors $T(f) = \sum_o^\infty m_n(x)\Delta_n f(x)$.

Ces opérateurs jouent le rôle analogue à celui des opérateurs pseudo-différentiels $\sigma(x,D)$ définis par les symboles $\sum_o^\infty m_n(x)\psi(\frac{\xi}{2^n})$ tels que le spectre de chaque $m_n(x)$ soit contenu dans la boule $|\eta| \leq 1/4\ 2^n$.

RÉFÉRENCES

[1] J.-M. BONY - Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Prépublication, Dépt. Math. Univ. Paris-Sud, 91405 Orsay (France).

[2] R.-R. COIFMAN et Y. MEYER - Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, Soc. Math. France, Astérisque 57(1978).

[3] D. GOLDBERG - Local Hardy spaces, Proc. Symp. Pure Math., XXXV (1979).

[4] M. NAGASE - The L^p-boundedness of pseudo-differential operators with non-regular symbols, Comm. Part. Diff. Equ., 2(10)(1977), 1045-1061.

[5] E. STEIN - Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, (1970).

[6] A. ZYGMUND - Trigonometric series, (2nd. ed.), Cambridge, (1959).

Yves MEYER

Université de Paris XI
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY