JACQUES TITS

Groupes à croissance polynomiale

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. nº 572, p. 176-188

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__176_0>

Séminaire BOURBAKI 572-01
33e année, 1980/81, n° 572 Février 1981

GROUPES À CROISSANCE POLYNOMIALE
[d'après M. Gromov et al.]

par Jacques TITS

§ 1. Introduction

Soient Γ un groupe de type fini et E un système générateur fini. Pour $g \in \Gamma$, notons $\ell_E(g) = \ell(g)$ la "longueur" de g, c'est-à-dire le plus petit entier n tel que g soit égal à un produit de n éléments de $E \cup E^{-1}$. Pour $r \in \mathbb{R}_+$, on pose $c_{\Gamma,E}(r) = c(r) = \mathrm{Card}\{g \in \Gamma \mid \ell(g) \leq r\}$. Il est immédiat que si E' est un autre système générateur fini de Γ, il existe des constantes $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ telles que

(1) $$c_{\Gamma,E}(ar) \leq c_{\Gamma,E'}(r) \leq c_{\Gamma,E}(br) .$$

On dit que Γ est à *croissance polynomiale* s'il existe $c, d \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

(2) $$c_{\Gamma,E}(r) \leq cr^d + 1 \qquad (r \in \mathbb{R}_+^*) ,$$

et l'on appelle alors *degré* de la croissance la borne inférieure des d tels que (2) soit vrai pour un choix convenable de c. Ces définitions sont légitimes vu (1). Les notions qui précèdent, inspirées par des problèmes de topologie et de géométrie différentielle, sont dues à J. Milnor [5].

Il est facile de voir que le groupe libre engendré par un ensemble fini de cardinal ≥ 2 et, plus généralement, tout groupe de type fini possédant un sous-groupe libre non abélien, est à *croissance exponentielle* (i.e. il existe $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$, tel que $c(r) \geq b^r$ pour tout $r \geq 1$). Par contre, tout groupe abélien de type fini est à croissance polynomiale. L'objet de l'exposé est le

THÉORÈME.— *Un groupe de type fini est à croissance polynomiale si et seulement s'il possède un sous-groupe nilpotent d'indice fini.*

"Si" est dû à J. Wolf [10] et "seulement si" (beaucoup plus difficile) à M. Gromov [3] . Le cas particulier des groupes résolubles avait été obtenu précédemment par J. Wolf [10] et J. Milnor [6], et le cas des groupes linéaires s'en déduisait par [9] (cf. 3.3 ci-dessous). Pour un groupe résoluble ou linéaire, les références citées montrent en outre que si le groupe n'est pas à croissance polynomiale, il est à croissance exponentielle ; on ignore si cela reste vrai en général.

Le théorème précédent a des applications géométriques intéressantes. Par exemple, il entraîne, grâce à des résultats de M. Shub et J. Franks (cf. [8]), que *si* M *est une variété riemannienne compacte et si* $\alpha : M \to M$ *est une application accroissant localement les distances, alors il existe un groupe de Lie nilpotent connexe* N *, un sous-groupe discret* Γ *de l'"holomorphe"* $\mathrm{Aut}\, N \ltimes N$ *de* N *opérant sur* N *sans point fixe et un automorphisme* β *de* N *appliquant* Γ *dans lui-même, tels que les couples* (M,α) *et* $(N/\Gamma,\beta)$ *(où* β *opère sur* N/Γ *de façon évidente) soient topologiquement isomorphes (cf.* [3]*).*

§ 2. Croissance d'un groupe nilpotent

2.1. f-croissance

Soit Γ un groupe doté d'une filtration $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\Gamma = \Gamma_1$, $[\Gamma_i,\Gamma_j] \subset \Gamma_{i+j}$ et $\Gamma_k = \{1\}$ pour presque tout k . Un *f-système générateur fini* est une partie finie E de Γ telle que, pour tout i , $E_i = E \cap \Gamma_i$ engendre Γ_i . Posons $E_i' = E - E_{i+1}$ et appelons *f-longueur* d'un mot en les éléments de $E \cup E^{-1}$, la suite croissante $(n_1,n_2,\ldots)$ où n_i est la longueur (usuelle) de la contribution de $E_i' \cup E_i'^{-1}$ au mot considéré. Un élément de Γ est dit de longueur $\leq (r_1,r_2,\ldots)$ avec $r_i \leq \mathbb{R}_+$ s'il peut s'écrire sous la forme d'un mot de longueur $(n_1,n_2,\ldots)$ avec $n_i \leq r_i$ pour tout i . Soit ${}_fc(r_1,r_2,\ldots)$ le nombre de tels éléments. Si ${}_fc'$ est la fonction analogue définie à partir d'un autre f-système générateur fini, il existe des constantes $a , b \in \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$ {}_fc(ar_1,ar_2,\ldots) \leq {}_fc'(r_1,r_2,\ldots) \leq {}_fc(br_1,br_2,\ldots) \; . $$

Cela donne un sens à la définition suivante : nous disons que Γ est à *f-croissance polynomiale* de *degré* $\leq d$ s'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout r ,

$$ {}_fc(r,r^2,\ldots) \leq cr^d + 1 \; . $$

2.2. PROPOSITION.— *Si* d_i *désigne le rang du groupe abélien* Γ_i/Γ_{i+1} *, le groupe* Γ *est à f-croissance polynomiale de degré* $\leq \Sigma\, id_i$ *.*

On procède par induction descendante sur $a = \sup\{i \mid \Gamma = \Gamma_i\}$ et, pour a donné, par induction (ordinaire) sur le minimum m des cardinaux des systèmes générateurs de Γ_a/Γ_{a+1} . Choisissons le f-système générateur E de Γ de telle façon que $\mathrm{Card}\, E_a' = m$, que $[E \cup E^{-1} , E \cup E^{-1}] \subset E$ et que si $x \in E_a'$ possède une puissance d'exposant non nul dans Γ_{a+1} , la puissance d'exposant strictement positif le plus petit avec cette propriété appartienne à E . Soit $y \in E_a'$. L'assertion suivante se vérifie facilement par "saute-mouton" et induction sur l'entier q :

Si w est un mot de f-longueur $(n_1,n_2,\ldots)$ en les éléments de $E \cup E^{-1}$ et si $(y_1,y_2,\ldots,y_p)$ est la contribution de $\{y,y^{-1}\}$ à ce mot (de sorte que $y_i = y$ ou y^{-1} et $p \leq n_a$), alors, pour $0 \leq q \leq p$, il existe un mot représentant le même élément de Γ que w, ayant la même contribution de $\{y,y^{-1}\}$, débutant par $y_1y_2\dots y_q$ et de f-longueur $(n'_1,n'_2,\dots)$, avec

$$n'_i \le n_i + qn_{i-a} + \binom{q}{2}n_{i-2a} + \dots .$$

Supposant $n_i \le r^i$ (pour $r \in \mathbb{R}_+$ donné), faisant $q = p \le r^a$, majorant $\binom{q}{j}$ par q^j ($\le r^{aj}$) et désignant par e le plus petit indice i tel que $\Gamma_i = \{1\}$, on en déduit que

(*) tout élément $g \in \Gamma$ de f-longueur $\le (r,r^2,\dots)$ peut s'écrire $g = y^sg'$, où $|s| \le r^a$ et g' est un élément de f-longueur $\le (er - |s|, er^2 - |s|,\dots)$ appartenant au sous-groupe Γ' de Γ engendré par $E - \{y\}$.

Si Γ/Γ' est d'ordre infini, l'hypothèse d'induction appliquée à Γ' assure l'existence d'une constante $c' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le nombre des g' possibles soit majoré par

$$c'r^{\Sigma(id_i)-a} + 1 .$$

Le nombre des valeurs admissibles pour s étant majoré par $2r^a + 1$, la proposition s'ensuit. Si Γ/Γ' est un groupe fini d'ordre t, on réécrit g sous la forme $g = y^{s_1}g'_1$, où $0 \le s_1 < t$ et g'_1 est un élément de Γ' de f-longueur $\le (er,er^2,\dots)$, et l'on applique à nouveau l'hypothèse d'induction.

2.3. *Lemme.— Soient* Γ *un groupe nilpotent de type fini de classe* e, Z *le dernier terme non trivial de sa suite centrale descendante,* E *une partie génératrice finie de* Γ *et* z *un élément de* Z. *Alors, il existe une constante* $c \in \mathbb{R}_+^*$ *telle que, pour* $n \in \mathbb{N}$, *on ait* $\ell_{\Gamma,E}(z^n) \le c\sqrt[e]{n}$.

La preuve se fait par induction sur e.

Il suffit évidemment de démontrer l'assertion pour le commutateur $z = [x,y]$ d'un élément x de E et d'un élément y appartenant à l'avant-dernier terme non trivial de la suite centrale descendante. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, n_1 le plus petit entier strictement supérieur à $\sqrt[e]{n}$, et a_1, a_2 des entiers positifs définis par $n = a_1n_1^{e-1} + a_2$, $a_1 < n_1$, $a_2 \le n_1^{e-1}$. Par l'hypothèse d'induction, il existe $c' \in \mathbb{R}_+^*$ (indépendant de n) et des éléments y_1 et y_2 de longueur $\le c'n_1$ congrus respectivement à $y^{n_1^{e-1}}$ et à y^{a_2} mod. Z. L'assertion résulte alors de ce que l'élément

$$z^n = [x^{a_1},y^{n_1^{e-1}}].[x,y^{a_2}] = [x^{a_1},y_1].[x,y_2]$$

est de longueur $\le 2a_1 + 4c'n_1 + 2$.

2.4. PROPOSITION (Bass-Wolf).— *Soient* Γ *un groupe nilpotent de type fini et* d_i *le rang du* i-*ième quotient* Γ_i/Γ_{i+1} *de sa suite centrale descendante* (Γ_i). *Posons* $d = \Sigma\, id_i$. *Alors, pour tout système générateur fini* E *de* Γ, *il existe des constantes* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ *telles que*

$$c_1r^d \le c_{\Gamma,E}(r) \le c_2r^d + 1 \qquad (r \in \mathbb{R}_+) .$$

En particulier, Γ *est à croissance polynomiale de degré* d .

L'existence de c_2 résulte aussitôt de 2.2 appliqué à (Γ_i) . Prouvons l'existence de c_1 par induction sur la classe e de Γ . Posons $d' = d - ed_e$. L'hypothèse d'induction implique l'existence d'une constante $c'_1 \in \mathbb{R}^*_+$ telle qu'il existe au moins $c'_1 r^{d'}$ éléments de longueur $\leq \frac{r}{2}$ deux à deux non congrus mod. Γ_e , et le lemme 2.3 entraîne l'existence d'une constante $c''_1 \in \mathbb{R}^*_1$ telle que Γ_e possède au moins $c''_1 \, r^{ed_e}$ éléments distincts de longueur $\leq \frac{r}{2}$, d'où l'assertion.

(N.B. La preuve donnée ici de l'existence de c_1 est, à la présentation près, celle de J. Wolf [10], qui donne aussi, pour $c_{\Gamma,E}(n)$, une borne supérieure, assez grossière mais suffisante pour établir la croissance polynomiale. La borne supérieure de l'énoncé est due à H. Bass [1], qui en donne une démonstration différente de celle proposée ici.)

2.5. Sous-groupes d'indice fini

Il est immédiat que si Γ est un groupe de type fini, Γ_1 un sous-groupe d'indice fini et E , E_1 des systèmes générateurs finis de Γ , Γ_1 , alors il existe des constantes $a , b , b' \in \mathbb{R}^*_+$ telles que

$$c_{\Gamma_1,E_1}(ar) \leq c_{\Gamma,E}(r) \leq b'c_{\Gamma_1,E_1}(br) \qquad (r \in \mathbb{R}^*_+) .$$

On a donc le

COROLLAIRE.— *Un groupe de type fini possédant un sous-groupe nilpotent d'indice fini est à croissance polynomiale.*

Le théorème de Gromov [3] affirme la réciproque.

§ 3. Principe de la démonstration de Gromov

3.1. Dorénavant, Γ désigne un groupe infini de type fini à croissance polynomiale et E , un système générateur fini de Γ .

Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, on note (abusivement) $\varepsilon\Gamma$ l'espace métrique obtenu en dotant Γ de la distance invariante à gauche $(x,y) \longrightarrow \varepsilon\ell_E(x^{-1}y)$ (si $\varepsilon = 1$, $\varepsilon\Gamma$ est aussi noté Γ). Gromov montre que, pour un choix convenable d'une suite (ε_i) tendant vers 0 ,

(i) *on peut définir de façon naturelle un espace métrique* $Y = \lim_{i\to\infty} \varepsilon_i\Gamma$ *; cet espace est localement compact, connexe, localement connexe, homogène et de dimension finie.*

L'espace Y décrit en quelque sorte le "comportement à l'infini" de Γ (ou plutôt du système (Γ,E)). Le groupe Γ opère sur les $\varepsilon\Gamma$ (par translation à gauche) et l'on en déduit, par passage à la limite, une action de Γ sur Y , c'est-à-dire un homomorphisme $\Gamma \to \mathrm{Isom}\, Y$ (groupe des isométries de Y). On se souvient alors des deux résultats suivants.

3.2. PROPOSITION (Corollaire du "cinquième problème de Hilbert").— *Le groupe des isométries d'un espace métrique localement compact, connexe, localement connexe, homogène et de dimension finie est un groupe de Lie ne possédant qu'un nombre fini de composantes connexes*. (Cf. [7], chap. VI).

3.3. PROPOSITION.— *Tout sous-groupe d'un groupe de Lie connexe possède un sous-groupe résoluble d'indice fini ou contient un groupe libre non abélien.*

Si le groupe de Lie est linéaire, c'est un cas particulier du théorème principal de [9], et l'on se ramène immédiatement à ce cas en passant à la représentation adjointe.

3.4. On a vu au § 1 que Γ (qui est, rappelons-le, à croissance polynomiale) ne peut posséder de sous-groupe libre non abélien. Cela étant, 3.2 et 3.3 ramèneraient la démonstration du théorème au cas - déjà connu - d'un groupe résoluble si l'on était assuré que l'homomorphisme $\Gamma \to \mathrm{Isom}\ Y$ du n° 3.1 est injectif. Mais le cas des groupes abéliens (où Γ "bouge $\varepsilon\Gamma$ de moins en moins" à mesure que $\varepsilon \to 0$, et opère donc trivialement sur Y) montre qu'il n'en est rien. Cependant, si Γ n'a pas de sous-groupe commutatif d'indice fini, Gromov montre qu'en conjuguant l'action de Γ sur $\varepsilon\Gamma$ par des automorphismes intérieurs "d'amplitude croissante", on peut toujours obtenir à la limite une action non triviale de Γ sur Y. Plus précisément :

(ii) *Si* Γ *n'est pas fini, il possède un sous-groupe d'indice fini ayant des images homomorphes dans* $\mathrm{Isom}\ Y$ *d'ordres arbitrairement grands (c'est-à-dire, une image infinie ou une infinité d'images finies d'ordres non bornés).*

Enfin, Gromov montre que

(iii) *l'assertion précédente suffit à déduire le théorème des propositions* 3.2 *et* 3.3[(1)].

Les trois paragraphes restants traiteront respectivement des assertions (i), (ii) et (iii).

§ 4. Limites d'espaces métriques

La fonction distance d'un espace métrique X est notée dist_X ou simplement dist .

4.1. *Lemme.— Etant donnés un nombre réel positif* R , *une suite* $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *de nombres strictement positifs tendant vers zéro et une suite* $(N_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *d'entiers naturels, il existe un espace métrique compact* X *possédant la propriété suivante : si un espace*

---

(1) En fait, le "lemme algébrique" utilisé par Gromov a un énoncé plus compliqué que (ii) ; Gopal Prasad m'a fait observer qu'avec l'organisation (légèrement différente de celle de [3]) adoptée ici pour la démonstration du théorème, on peut se contenter de (ii).

métrique compact K *de diamètre* $\leq R$ *peut, pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$, *être recouvert par* N_i *boules fermées de rayon* ε_i , *alors* K *est plongeable isométriquement dans* X .

Soit A l'ensemble des suites finies $\underline{n} = (n_1,\dots,n_s)$ d'entiers naturels telles que $1 \leq n_i \leq N_i$ pour tout i . Alors, la condition requise est satisfaite si l'on prend pour X l'espace des fonctions $f : A \to \mathbb{R}_+$ telles que

$$f((n_1)) \leq R ,$$

$$|f((n_1,\dots,n_{s+1})) - f((n_1,\dots,n_s))| \leq 2\varepsilon_s \qquad \text{pour } s \geq 1 ,$$

doté de la métrique L^∞ :

$$\operatorname{dist}(f,g) = \sup_A |f(\underline{n}) - g(\underline{n})| .$$

En effet, soit K comme dans l'énoncé. Construisons inductivement une application $\varphi : A \to K$ possédant les propriétés suivantes :

L'espace K est à distance $\leq \varepsilon_1$ de $\{\varphi((n_1)) \mid 1 \leq n_1 \leq N_1\}$ et, pour $n_1,\dots,n_{s-1}$ donnés $(s \geq 2)$, la boule de rayon $2\varepsilon_{s-1}$ centrée en $\varphi((n_1,\dots,n_{s-1}))$ contient $\{\varphi((n_1,\dots,n_s)) \mid 1 \leq n_s \leq N_s\}$ et est à distance $\leq 2\varepsilon_s$ de cet ensemble.

Alors, on vérifie aussitôt que l'application

$$k \longmapsto (\underline{n} \longmapsto \operatorname{dist}_K(k,\varphi(\underline{n})) \qquad (k \in K \ , \ \underline{n} \in A)$$

est une isométrie de K dans X .

4.2. Distances

Si (X,x) est un espace métrique pointé, on note $B_r(X,x)$, $B_r(X)$ ou B_r la boule de rayon r et de centre x dans X . S'agissant d'un tel espace (X,x) , on omettra souvent la mention explicite du point distingué x .

A toute paire $((X,x),(X',x'))$ d'espaces métriques pointés *propres* (i.e. les boules fermées de rayon fini sont compactes) on se propose d'associer une sorte de "distance" à la Hausdorff, notée (abusivement) $h(X,X')$. Une distance δ sur $X \amalg X'$ est dite *admissible* si elle coïncide avec dist_X (resp. $\operatorname{dist}_{X'}$) sur X (resp. X'). Soit $h(X,X';\delta)$ la borne inférieure des $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tels que $\delta(x,x') \leq \varepsilon$ et que $B_{1/\varepsilon}(X,x)$ (resp. $B_{1/\varepsilon}(X',x')$) soit contenu dans le ε-voisinage de X' (resp. X) pour δ ; on définit alors $h(X,X')$ comme la borne inférieure des $h(X,X';\delta)$ lorsque δ parcourt l'ensemble des distances admissibles sur $X \amalg X'$. (Cette définition est due à O. Gabber qui a remarqué que la distance initialement proposée par Gromov était inadéquate.) On a $h(X,X') = 0$ si et seulement si (X,x) et (X',x') sont isométriques ; de plus, h satisfait à l'inégalité triangulaire dès que deux des trois "distances" concernées sont $\leq \frac{1}{2}$. On dit qu'une suite d'espaces pointés (X_i,x_i) *converge* vers un espace (X,x) si $\lim_{i\to\infty} h(X_i,X) = 0$; il est facile de voir que la convergence d'une suite $((X_i, x_i))$ est équivalente à la convergence de la suite $((B_n(X_i), x_i))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'existence de l'espace Y du n° 3.1 résulte de la proposition suivante.

4.3. Critère de convergence. *Soit* $((X_i, x_i))$ *une suite d'espaces métriques pointés propres. Supposons que pour* $r, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, *il existe un entier* $N_{r,\varepsilon}$ *tel que, pour tout* i, $B_r(X_i)$ *puisse être recouvert par* $N_{r,\varepsilon}$ *boules fermées de rayon* ε *("compacité uniforme" des boules de rayon* r *). Alors on peut extraire de la suite* $((X_i, x_i))$ *une suite convergente.*

Il suffit de montrer la propriété pour chacune des suites $((B_n(X_i), x_i))$, c'est-à-dire qu'on peut supposer les X_i compacts de diamètres bornés, auquel cas l'assertion est une conséquence facile de 4.1.

4.4. L'espace Y

Rappelons que Γ désigne un groupe de type fini à croissance polynomiale, et $c(r)$ le nombre de points de Γ contenus dans la boule de centre 1 et de rayon r (pour la métrique définie à partir du système générateur fini E). Soient d le degré de la croissance et d' un nombre réel strictement plus grand que d.

Nous renvoyons à [3], § 3, pour la démonstration (assez facile) de l'assertion suivante, intuitivement plausible :

(1) *Il existe une suite divergente* $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *telle que, pour* $i \in \mathbb{N}$ *et* $j \in \{1,\ldots,i\}$, *on ait*

$$c(2^{-j} r_i) \geq 2^{-jd'} c(r_i) \ ;$$

pour une telle suite, $c(2^j r_i) c(r_i)^{-1}$ *est borné supérieurement par un nombre dépendant seulement de* j *et* d'.

Il n'est pas difficile de voir que c'est précisément la propriété dont on a besoin pour pouvoir appliquer le critère 4.3 à la suite des espaces métriques pointés $(r_i^{-1}\Gamma, 1)$ (avec la notation $\varepsilon\Gamma$ de 3.1). Quitte à remplacer (r_i) par une suite extraite, on en conclut que

pour une suite divergente (r_i) *convenablement choisie, la suite* $(r_i^{-1}\Gamma, 1)$ *tend vers un espace pointé* (Y, y_0), *où* Y *est un espace métrique propre (donc localement compact).*

Si $g, g' \in \Gamma$ et si la distance $\ell(g^{-1}g')$ est égale à ℓ, il existe évidemment une suite $g = g_0, g_1, \ldots, g_\ell = g'$ telle que $\ell(g_i^{-1} g_j) = |j - i|$; "multipliant par ε et faisant tendre ε vers zéro" on en déduit que

pour $y, y' \in Y$ *à distance* r, *il existe un plongement isométrique* $f : [0,r] \longrightarrow Y$ *tel que* $f(0) = y$ *et* $f(r) = y'$.

En particulier

l'espace Y *est connexe et localement connexe.*

L'assertion suivante est aussi une conséquence facile de (1) :

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *, il existe un recouvrement dénombrable de* Y *par des parties (en fait, par des boules)* Y_i *de diamètres* $\leq \varepsilon$ *, tel que*

$$\Sigma\ (\mathrm{diam}\ Y_i)^{d'} < \infty\ .$$

En d'autres termes, la "dimension de Hausdorff" de Y (cf. [4], VII 4) est inférieure à d' ; par conséquent (même réf.)

la dimension (topologique) de Y *est au plus égale à* d .

4.5. Un exemple

Supposons que Γ soit le groupe nilpotent engendré par $E = \{e_1,e_2,e_3\}$ et défini par les relations $[e_1,e_2] = e_3$, $[e_1,e_3] = [e_2,e_3] = 1$. On se propose de décrire l'espace Y correspondant. Son support sera le "groupe de Heisenberg", i.e. $\mathbb{R}^3$ doté du produit

$$(x,y,z).(x',y',z') = (x+x'\ ,\ y+y'\ ,\ z+z'+xy')\quad .$$

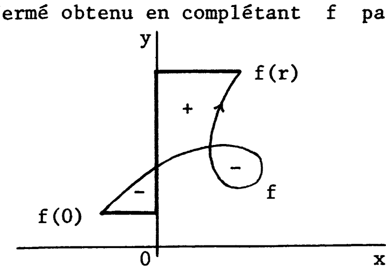
On note ξ , η , ζ les trois projections $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et l'on pose $\pi = (\xi,\eta) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Le plan $\mathbb{R}^2 = \pi(\mathbb{R}^3)$ est doté de la métrique minkowskienne

$$\mu((x,y),(x',y')) = |x-x'| + |y-y'|\ .$$

A tout chemin (continu) $f : [0,r] \to \mathbb{R}^2$, on associe une *longueur*

$$\lambda(f) = \sup_{\substack{m\\(x_i)}} \sum_1^m \mu(f(x_{i-1}),f(x_i)) \qquad (0 = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_m = r)\ ,$$

et une *aire* $\alpha(f)$, à savoir, l'aire du chemin fermé obtenu en complétant f par un segment parallèle à l'axe des x , un segment de l'axe des y et, à nouveau, un segment parallèle à l'axe des x (cf. la figure ci-contre). Un chemin $h : [0,r] \to \mathbb{R}^3$ est dit *horizontal* si, pour $x \in [0,r]$, on a



$$\zeta(h(x)) = \zeta(h(0)) + \alpha(\pi \circ h|_{[0,x]})\ ;$$

ainsi, h est l'unique "relèvement" horizontal de $\pi \circ h$ d'origine h(0) . Finalement, Y est l'espace $\mathbb{R}^3$ doté de la métrique δ suivante : $\delta(p,q)$ est le minimum de la longueur $\lambda(\pi \circ h)$ où h parcourt l'ensemble des chemins horizontaux joignant p et q . Il est facile de donner des formules explicites pour δ : pour $x \geq y \geq 0$ et $z \geq 0$, on a

$$\delta((0,0,0),(x,y,z)) = \begin{cases} x+y & \text{si } z \le xy , \\ \frac{2z}{x} + x - y & \text{si } xy \le z \le x^2 , \\ 4\sqrt{z} - x - y & \text{si } x^2 \le z , \end{cases}$$

et la distance de deux points quelconques s'en déduit en utilisant l'invariance de δ par les translations à gauche du groupe de Heisenberg, par les automorphismes

$$(x,y,z) \longmapsto (y,-x,z-xy) \longmapsto (-x,-y,z) \longmapsto (-y,x,z-xy) ,$$
$$(x,y,z) \longmapsto (y,x,xy-z)$$

et par l'inversion $(x,y,z) \longmapsto (-x,-y,xy-z)$. Les "arcs géodésiques" dans Y peuvent être caractérisés comme suit : un chemin $h : [0,r] \to Y$ est un plongement isométrique de $[0,r]$ dans Y si et seulement s'il est horizontal, s'il est "paramétrisé par la longueur de $\pi \circ h$ " (i.e. $\lambda(\pi \circ h|_{[0,x]}) = x$) et si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

- h est "monotone" (i.e., les fonctions $\xi \circ h$ et $\eta \circ h$ le sont) ;
- h parcourt sans répétition, sauf coïncidence éventuelle des extrémités, une partie d'un carré parallèle aux axes.

Signalons enfin que la dimension de Hausdorff de Y est égale à 4 .

4.6. Remarque

Une définition élégante de l'espace $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\Gamma$, inspirée des méthodes de l'analyse non standard et valable pour tout groupe de type fini, a été donnée par L. P. D. van den Dries et A. J. Wilkie. En voici le principe. Soient Γ^* , $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^*$ des *extensions non standard* de Γ , $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ (cf. par ex. J. Keisler, Foundations of infinitesimal calculus, Weber & Schmidt, 1976, chap. I). Ces extensions s'interprètent comme des ultrapuissances définies à l'aide d'un ultrafiltre non principal $\underline{U}$ sur un ensemble d'indices I (cf. par ex. P. C. Eklof, Ultraproducts for algebraists, in Handbook of Logic, éd. J. Barwise, North Holland, 1977, 105-137) : ainsi, Γ^* est le quotient du groupe des applications de I dans Γ par le sous-groupe distingué des applications φ telles que $\varphi^{-1}(1) \in \underline{U}$. L'"hyperlongueur" $\Gamma^* \to \mathbb{N}^*$ qui prolonge naturellement la longueur ℓ sera aussi notée ℓ . On choisit un nombre hyperréel $R \in \mathbb{R}^*$ supérieur à tout entier. Soit $\Gamma^{(R)}$ (resp. $\Gamma_o^{(R)}$) le groupe des éléments g de Γ^* tels que $\ell(g)/R$ soit inférieur à un nombre (resp. à tout nombre) réel > 0 . Alors, on définit Y comme étant l'espace homogène $\Gamma^{(R)}/\Gamma_o^{(R)}$ doté de la métrique suivante : pour g , $h \in \Gamma^*$, $\mathrm{dist}(g\Gamma_o^{(R)}, h\Gamma_o^{(R)})$ est l'unique nombre réel qui diffère de $\ell(g^{-1}h)/R$ d'une quantité infinitésimale.

§ 5. Actions de Γ sur Y. Preuve de 3.4 (ii)

5.1. Dans ce paragraphe, $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ désigne une suite tendant vers 0 et telle que les espaces $(\varepsilon_i\Gamma,1)$ convergent vers (Y,y_0). Pour tout i, on se donne une distance admissible δ_i sur $\varepsilon_i\Gamma \amalg Y$ (cf. 4.2), les δ_i étant choisies de façon que

$$\lim_{i\to\infty} h(\varepsilon_i\Gamma,Y;\delta_i) = 0 \ , \quad \text{où } h(X,X';\delta) \text{ est la fonction définie en 4.2.}$$

On dit alors qu'une suite (p_i), avec $p_i \in \varepsilon_i\Gamma$ tend vers un point p de Y si $\lim_{i\to\infty} \delta_i(p_i,p) = 0$, et qu'une suite d'isométries $\alpha_i : \varepsilon_i\Gamma \longrightarrow \varepsilon_i\Gamma$ tend vers une isométrie α de Y si, pour (p_i) et p comme ci-dessus, $\alpha_i(p_i)$ tend vers $\alpha(p)$.

5.2. PROPOSITION.— *Si* $(\alpha_i : \varepsilon_i\Gamma \to \varepsilon_i\Gamma)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'isométries et si* $\mathrm{dist}_{\varepsilon_i\Gamma}(1,\alpha_i(1))$ *reste bornée lorsque* $i\to\infty$*, alors il existe une suite infinie* $N \subset \mathbb{N}$ *telle que* $(\alpha_i)_{i\in N}$ *tende vers une isométrie de* Y.

La démonstration est un argument facile de compacité.

5.3. COROLLAIRE.— *L'espace* Y *est homogène.*

En effet, chacun des $\varepsilon_i\Gamma$ l'est.

5.4. Preuve de 3.4 (ii)

Pour $g \in \Gamma$ et $r \in \mathbb{R}_+$, posons

$$\Delta(g,r) = \sup\{\ell(x^{-1}gx) \mid x \in B_r(\Gamma)\} \ ;$$

c'est l'"amplitude du déplacement de la boule $B_r(\Gamma)$ par g". Pour $i \in \mathbb{N}$ et $g \in \Gamma$, notons $\lambda_i(g)$ la translation à gauche de $\varepsilon_i\Gamma$ par g. Quitte à remplacer la suite (ε_i) par une suite extraite et à réindexer, on peut, grâce à 5.2, supposer que, pour $g \in E$ – et par conséquent pour tout $g \in \Gamma$ –, les isométries $\lambda_i(g)$ tendent vers une isométrie $\lambda_\infty(g)$ de Y, d'où un homomorphisme $\lambda_\infty : \Gamma \to \mathrm{Isom}\, Y$.

Si l'image de λ_∞ est infinie, 3.4 (ii) est démontré. Supposons donc que $\lambda_\infty(\Gamma)$ est fini et substituons $\mathrm{Ker}\,\lambda_\infty$ à Γ. Autrement dit, supposons $\lambda_\infty(\Gamma) = \{1\}$, ce qui veut dire que, pour $g \in \Gamma$,

$$(1) \qquad \lim_{r\to\infty} r^{-1}\Delta(g,r) = 0 \ .$$

Si les classes de conjugaison des éléments de E sont toutes finies, les centralisateurs de ces éléments sont d'indice fini dans Γ, donc le centre de Γ est d'indice fini et 3.4 (ii) s'ensuit aussitôt (car $\dim \mathrm{isom}\, Y \geq 1$). Supposons donc que l'un au moins des éléments de E a une classe de conjugaison infinie. Cela implique que

(2) pour $r, R \in \mathbb{R}_+$, il existe $g \in E$ et $a \in \Gamma$ tels que

$$\Delta(aga^{-1},r) \geq R \ .$$

Utilisant simultanément (1) et (2), le fait que a est produit d'éléments de E et que, pour $x \in \Gamma$ et $e \in E$ on a

$$|\Delta(x,r) - \Delta(exe^{-1},r)| \leq 2 \ ,$$

on vérifie aussitôt que, pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+$, il existe une suite (a_i) d'éléments de Γ telle que

$$\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i \sup_{g\in E} \Delta(a_i g a_i^{-1}, \varepsilon_i^{-1}) = \eta \ . \tag{3}$$

Quitte à extraire à nouveau une suite partielle de (ε_i) et à réindexer, on peut supposer que pour $g \in E$, donc pour tout $g \in \Gamma$, la suite d'isométries $\lambda_i'(g) = \lambda_i(a_i g a_i^{-1})$ tend vers une isométrie $\lambda_\infty'(g)$, d'où un nouvel homomorphisme $\lambda_\infty' : \Gamma \to \mathrm{Isom}\, Y$. La relation (3) implique que pour un élément $g \in E$ convenable, on ait

$$\sup_{y \in B_1(Y)} \mathrm{dist}_Y(y, \lambda_\infty'(g)(y)) = \eta \ .$$

Si η est "très petit", cela implique que l'ordre de $\lambda_\infty'(g)$ est "très grand" (car le groupe de Lie Isom Y n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit), d'où 3.4 (ii).

§ 6. Fin de la démonstration du théorème : preuve de 3.4 (iii)

On procédera par induction sur le degré d de la croissance polynomiale de Γ ; plus exactement, on suppose le théorème établi pour tout groupe à croissance polynomiale de degré $\leq d-1$.

6.1. *Lemme.— Le groupe* Γ *possède un sous-groupe d'indice fini ayant un quotient isomorphe à* $\mathbb{Z}$.

Si Γ possède une image homomorphe d'indice infini dans Isom Y , cette image ne peut contenir de sous-groupe libre non abélien (sinon Γ posséderait aussi un tel sous-groupe, et serait à croissance exponentielle), donc elle possède un sous-groupe résoluble d'indice fini (cf. 3.3) et l'assertion en résulte, car Γ est de type fini.

Supposons donc que Γ ne possède pas d'image homomorphe infinie dans Isom Y . Par 3.4 (ii) (et le § 5), il existe des homomorphismes $\alpha_i : \Gamma \to \mathrm{Isom}\, Y$ tels que $\{\mathrm{Card}\, \alpha_i(\Gamma)\}$ ne soit pas borné. Un théorème bien connu de C. Jordan (cf. par ex. [2], 36.13) implique l'existence d'un entier N tel que tout sous-groupe fini de Isom Y possède un sous-groupe abélien d'indice divisant N (le théorème de Jordan concerne les groupes linéaires ; on s'y ramène en se souvenant par exemple que les sous-groupes compacts maximaux de Isom Y sont linéaires et conjugués entre eux). Soit Γ_1 l'intersection de tous les sous-groupes de Γ d'indice fini divisant N ; ces sous-groupes sont en nombre fini (car Γ est de type fini), donc $[\Gamma:\Gamma_1] < \infty$. Soit Γ_1' le groupe dérivé de Γ_1 . Les définitions de N et Γ_1 impliquent que, pour tout i , $\alpha_i(\Gamma_1') = \{1\}$. Comme $\{\mathrm{Card}\, \alpha_i(\Gamma_1)\}$ n'est pas borné, Γ_1/Γ_1' est infini, et le lemme s'ensuit.

6.2. *Lemme.— Soient* Λ *un groupe abélien libre et* $\alpha : \Lambda \to \Lambda$ *un automorphisme.*

(i) *Si* α *est semi-simple et si toutes ses valeurs propres sont de module* 1 , *alors*

α *est d'ordre fini.*

(ii) *Si* α *possède une valeur propre de valeur absolue* ≥ 2 *, il existe* $\lambda \in \Lambda$ *tel que les éléments* $\varepsilon_0\lambda + \varepsilon_1\alpha(\lambda) + \varepsilon_2\alpha^2(\lambda) + \dots$ *(* $\varepsilon_i = 0$ *ou* 1 *, et* $= 0$ *pour presque tout* i *) soient deux à deux distincts.*

(i) Il suffit d'observer que toute orbite de $\{\alpha^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ dans $\Lambda \otimes \mathbb{C}$ a une adhérence compacte, donc que les orbites de $\{\alpha^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ dans Λ sont compactes.

(ii) Soit $\beta : \Lambda \to \mathbb{C}$ une forme linéaire telle que $\beta \circ \alpha = \rho\beta$ avec $|\rho| \geq 2$. Alors l'assertion est vraie pour tout $\lambda \in \Lambda$ tel que $\beta(\lambda) \neq 0$; en effet $\beta(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i\alpha^i(\lambda)) = (\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i\rho^i).\beta(\lambda)$, et, vu l'hypothèse faite sur ρ , les nombres $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i\rho^i$ sont deux à deux distincts.

6.3. Supposons désormais que Γ soit un produit semi-direct $Z \ltimes \Gamma_1$, avec $Z \cong \mathbb{Z}$: le lemme 6.1 nous y autorise. Observons que, vu la croissance polynomiale de Γ ,

(*) *Si* $z \in Z$ *et* $g \in \Gamma$ *, les éléments* $g^{\varepsilon_0}.(zgz^{-1})^{\varepsilon_1}.(z^2gz^{-2})^{\varepsilon_2}\dots$ *(* ε_i *comme en* 6.2*) ne peuvent être deux à deux distincts.*

En particulier, il existe un entier $m > 0$ tel que $z^m g z^{-m}$ appartienne au groupe engendré par les $z^i g z^{-i}$ pour $i \leq m-1$. Cela implique que pour tout $g \in \Gamma_1$ - donc aussi pour tout $g \in \Gamma$ -, l'intersection de Γ_1 avec le groupe $< Z \cup \{g\} >$ engendré par Z et g est de type fini. Il s'ensuit que Γ_1 lui-même est de type fini. Il est alors immédiat que sa croissance est polynomiale de degré $\leq d-1$ (prendre pour E la réunion de systèmes générateurs finis de Z et de Γ_1). Vu l'hypothèse d'induction, Γ_1 possède un sous-groupe nilpotent d'indice fini. Nous supposerons, sans nuire à la généralité, qu'il est lui-même nilpotent.

Soient z_0 un générateur de Z , $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots \supset \Gamma_e = \{1\}$ une suite centrale de Γ_1 stable par Z et α_i l'automorphisme de Γ_i/Γ_{i+1} induit par z_0 . Supposons la suite (Γ_i) choisie de telle façon que tout quotient Γ_i/Γ_{i+1} infini soit un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini dont α_i soit un automorphisme semi-simple. D'après 6.3 (ii) et (*) appliqué aux puissances de z_0 , toute valeur propre de toute puissance de chacun des α_i en question est de module ≤ 2 ; autrement dit, toute valeur propre de α_i (toujours pour Γ_i/Γ_{i+1} infini) est de module 1 , ce qui implique, par 6.2 (i), que α_i est d'ordre fini. Cela étant vrai pour tout i , il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_i^M = 1$ pour tout i , et le groupe $< z_0^M > \ltimes \Gamma_1$, qui est d'indice fini dans Γ , est alors nilpotent, q.e.d.

6.4. <u>Remarque</u>. Contrairement à ce que laissait prévoir le schéma de démonstration du § 3, on n'a pas eu besoin du cas particulier du théorème pour les groupes résolubles (ou plutôt, la petite partie de ce résultat qui s'avérait nécessaire a été redémontrée en 6.3).