Séminaire N. Bourbaki

Paul Gérardin

Formes automorphes associées aux cycles géodésiques des surfaces de Riemann hyperboliques

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 562, p. 23-35
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__23_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI 562-01
33e année, 1980/81, n° 562 Novembre 1980

FORMES AUTOMORPHES ASSOCIÉES AUX CYCLES GÉODÉSIQUES DES SURFACES DE RIEMANN HYPERBOLIQUES

[d'après S. Kudla et J. Millson]

par Paul GÉRARDIN

Il s'agit de surfaces de Riemann connexes, complètes, orientées, sans bord, de volume fini et dont le plan hyperbolique est le revêtement universel.

Lorsqu'une telle surface M est compacte, le théorème de dualité de Poincaré dit que la forme d'intersection sur le groupe $H_1(M)$ d'homologie singulière est unimodulaire, et le théorème de Hodge que l'espace $\mathcal{H}^1(M)$ des 1-formes harmoniques réelles réalise la 1-cohomologie de de Rham de M ([25], [27]) ; celle-ci s'identifie canoniquement avec la cohomologie singulière réelle $H^1(M,\underline{\underline{R}})$, dual de l'espace vectoriel $H_1(M,\underline{\underline{R}}) = H_1(M) \otimes \underline{\underline{R}}$. On en déduit que chaque géodésique orientée fermée η de M définit une unique 1-forme harmonique $\hat{\eta}$, dite <u>duale</u> de η , caractérisée par

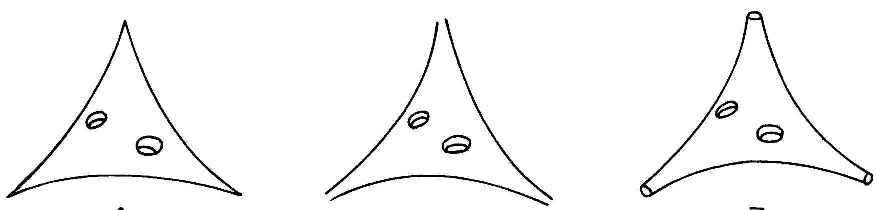
(0.1) $$\int_C \hat{\eta} = C.\eta \quad , \text{ pour tout cycle } C \text{ sur } M ,$$

ou encore par

(0.2) $$\int_M \hat{\eta} \wedge \alpha = \int_\eta \alpha \quad \text{pour toute 1-forme fermée } \alpha \text{ sur } M .$$

Cette 1-forme duale est donnée explicitement par J. Fay [2], de lecture difficile. S. Kudla et J. Millson en donnent une construction invariante ([1]), susceptible de généralisation à d'autres espaces localement symétriques.

Lorsque la surface de Riemann M n'est plus compacte, elle provient d'une surface de Riemann compacte $\hat{M}$ en en retirant un nombre fini de points, appelés les <u>pointes</u> de M . Soit $\overline{M}$ la variété à bord obtenue de $\hat{M}$ en remplaçant chaque pointe p par l'ensemble des géodésiques de M dont p est un bout ; l'inclusion de M dans $\overline{M}$ est une équivalence d'homotopie ; on note ∂M le bord de $\overline{M}$.



$\hat{M}$ M $\overline{M}$

On a les deux suites exactes longues d'homologie et de cohomologie singulières :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H_\bullet(M) \arrow[dl] & \\ H_\bullet(M,\partial M) \arrow[rr] & & H_\bullet(\partial M) \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & H^\bullet(M) \arrow[dr] & \\ H^\bullet(M,\partial M) \arrow[ur] & & H^\bullet(\partial M) \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

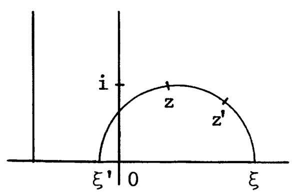
que la dualité de Lefschetz montre isomorphes, en induisant la dualité de Poincaré au niveau du bord ∂M . Avec le genre g et le nombre f de pointes, on a les dimensions suivantes : $\dim H^1(M) = \dim H_1(M) = 2g + f - 1$, $\dim H^0(\partial M) = f$, $\dim H^0(M) = 1$, $H_2(M) = 0$. La caractéristique d'Euler-Poincaré de M est $\chi(M) = 2 - 2g - f$ (cf. [10], [19], [26]). On note $H^\bullet_!(M)$ l'image de $H^\bullet(M,\partial M)$ dans $H^\bullet(M)$. Le théorème de de Rham donne la cohomologie singulière réelle avec la cohomologie du complexe $A^\bullet(M)$ des formes différentielles sur $\overline{M}$, et la cohomologie relative $H^\bullet(M,\partial M)$ apparaît comme la cohomologie des formes différentielles à support compact. On note $\mathcal{H}^\bullet(M)$ l'espace des formes différentielles harmoniques, et $^-\mathcal{H}^\bullet(M)$ celles qui sont cuspidales et de carré intégrable. G. Harder a montré ([8], [9]) que toute la cohomologie $H^\bullet(M,\underline{\underline{R}})$ était représentée par des formes harmoniques, et a donné un relèvement canonique $^+H^\bullet(M,\underline{\underline{R}})$ dans $H^\bullet(M,\underline{\underline{R}})$ de son image dans $H^\bullet(\partial M,\underline{\underline{R}})$ (voir n° 2) ; on sait aussi que $^-\mathcal{H}^1(M)$ s'envoie isomorphiquement sur $H^1_!(M,\underline{\underline{R}})$, ce qui donne la décomposition en somme directe :

$$H^1(M,R) = {}^-\mathcal{H}^1(M) + {}^+H^1(M;\underline{\underline{R}}) \ . \tag{0.4}$$

Kudla et Millson donnent dans leur article ([1]) une construction géométrique de la 1-forme $\hat{\eta}$ harmonique de carré intégrable cuspidale duale d'une géodésique orientée fermée η , c'est-à-dire vérifiant (0.2) pour toute 1-forme fermée à support compact α . H. Petersson avait aussi obtenu ce résultat, mais pas sous forme invariante, dans le cas de la surface de groupe fondamental $\Gamma_0(N)$ ([3]).

1. Le plan hyperbolique

Le modèle standard de la géométrie hyperbolique plane est le demi-plan supérieur H des $z \in \underline{\underline{C}}$ de partie imaginaire > 0 , muni de la structure riemannienne $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ au point $z = x + iy$; on l'appelle aussi demi-plan de Poincaré. Les géodésiques sont les demi-cercles et demi-droites de H qui sont orthogonaux à l'axe réel. On compactifie H en prenant son adhérence dans la sphère de Riemann $\underline{\underline{C}} \cup \{\infty\}$; on lui ajoute donc la droite projective réelle $F = \underline{\underline{R}} \cup \{\infty\}$. La distance est donnée par la formule



$$d(z,z') = \mathrm{Log}\begin{bmatrix} z & z' \\ \xi & \xi' \end{bmatrix} \ , \quad z\ ,z' \in H \ \text{distincts}, \tag{1.1}$$

où $\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$ est le birapport et $\xi\ ,\xi'$ désignent les intersections de la géodésique qui passe par z et z' avec le bord F , l'ordre étant $\xi\ ,z'\ ,z\ ,\xi'$.

Le groupe G des automorphismes analytiques de H est aussi le groupe des isométries directes ; c'est le groupe $PSL_2(\underline{\underline{R}})$ des homographies $z \longmapsto (az+b)(cz+d)^{-1}$ pour a , b , c , d réels vérifiant $ad - bc = 1$. Les éléments de G autres que 1 sont classés en hyperboliques, paraboliques, elliptiques, suivant qu'ils fixent 2 , 1 , 0 points de F .

On a $|dx| = y = |dy|$ en $z = x + iy$, et la forme volume s'écrit $v_H = y^{-2}dx \wedge dy = (-2iy^2)^{-1}dz \wedge d\bar{z}$. On note $\langle \,|\, \rangle$ la métrique sur les formes différentielles induite par la structure riemannienne, et $*$ l'opérateur sur les formes différentielles défini par

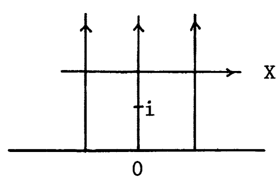
$$\alpha \wedge *\beta = \langle\alpha|\beta\rangle v_H \;; \tag{1.2}$$

il envoie dx sur dy et dy sur $-dx$; il échange 1 et v_H . Avec l'opérateur de différentiation extérieure d , on définit l'opérateur $\delta = -*d*$, et le laplacien $\Delta = d\delta + \delta d$; sur les fonctions Δ opère par $-y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$.

Les formes différentielles qu'on prend sont supposées indéfiniment différentiables et à valeurs réelles. A une telle 1-forme ω , on associe deux 1-formes complexes, ${}^+\omega = i\omega - *\omega$ et ${}^-\omega = \overline{({}^+\omega)} = -i\omega - *\omega$, la première étant de type $(1,0)$ et la seconde de type $(0,1)$; on retrouve ω par $\omega = \mathrm{Im}({}^+\omega)$.

Les <u>horicycles</u> au point ∞ sont les droites de partie imaginaire constante, orientées par abscisses croissantes ; en un autre point de F , ce sont les cercles de H tangents à l'axe réel, avec l'orientation directe ; le <u>centre</u> d'un horicycle est le point du bord auquel il est attaché. Le groupe G permute les horicycles transitivement, et le stabilisateur d'un horicycle ne dépend que de son centre ; pour le centre ∞ , c'est le groupe des translations réelles $z \longmapsto z + u$, $u \in \underline{\underline{R}}$, sous-groupe maximal de G formé d'éléments paraboliques.

Soit X un horicycle, G_X son stabilisateur dans G , p_X la projection orthogonale de H sur X : les fibres de p_X sont les géodésiques orthogonales à X , c'est-à-dire celles de bout le centre de X . Ceci fait apparaître H comme le fibré normal à X . Soit $d_X(z)$ la distance orientée de X à $z \in H$, et $(z:X) = e^{d_X(z)}$.

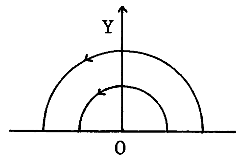


Soit v_X la forme volume sur X invariante par G_X , telle que la 1-forme sur H

$$\omega_X = *p_X^* v_X$$

ait pour valeur $(z:X)$ en $z \in H$ sur le champ de vecteurs unitaires porté par les fibres de p_X . La forme ω_X est invariante par G_X , elle est exacte et harmonique, et $|\omega_X| = (z:X)$. Dans la situation standard où X est $y = 1$, et Γ_X est engendré par $z \to z+1$, on a $v_X = dx$, $\omega_X = dy = \mathrm{Im}(dz)$, $(z:X) = y = \mathrm{Im}(\ z)$.

Chaque géodésique orientée Y de H définit un groupe G_Y , sous-groupe maximal de G formé d'éléments hyperboliques : c'est le groupe des transvections le long de Y , composante neutre du stabilisateur de Y dans G . Soit p_Y la projection



orthogonale de H sur Y ; ses fibres sont les géodésiques orthogonales à Y, et H apparaît comme le fibré normal à Y. Soit $d_Y(z)$ la distance orientée de z à Y ; on pose $(z:Y) = 1/\mathrm{ch}\, d_Y(z)$. Soit v_Y la forme volume sur Y induite par la métrique riemannienne sur Y ; on pose

$$\omega_Y = *p_Y^* v_Y \ ;$$

sur le champ de vecteurs unitaires porté par les fibres de p_Y, cette forme vaut $(z:Y)$; elle est invariante par G_Y, elle est exacte et harmonique, et $|\omega_Y| = (z:Y)$. De plus $\int_{G_Y\backslash H} \omega_Y = \pi$. Dans la situation standard où $Y = i\underline{\underline{R}}_+^*$ avec l'orientation usuelle, on a $v_Y = y^{-1}dy$, $\omega_Y = d\theta = \mathrm{Im}(z^{-1}dz)$, avec l'argument θ de z.

Dans chacun des deux cas, on introduit un paramètre complexe $s \in \underline{\underline{C}}$ et les 1-formes.

(1.3) $$\omega_Z^s = |\omega_Z|^{s-1}\omega_Z \quad , \quad Z = X \text{ ou } Y .$$

Alors, avec l'action du laplacien Δ, on a

(1.4) $$\Delta\omega_X^s = s(1-s)\omega_X^s \quad , \text{ pour le cas horicyclique,}$$

(1.5) $$\Delta\omega_Y^s = s(1-s)\omega_Y^s - (1-s^2)\omega_Y^{s+2} \quad , \text{ pour le cas géodésique.}$$

Dans le second cas, la forme sur $G_Y\backslash H$ définie par ω_Y^s est intégrable pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, et

(1.6) $$\int_{G_Y\backslash H} \omega_Y^s = B(s/2, 1/2) = L(s)/L(s+1) ,$$

en introduisant la fonction L de $\underline{\underline{R}}$, $L(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$. Pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, on a donc

(1.7) $$\Delta \frac{L(s+1)}{L(s)} \omega_Y^s = s(1-s)\left(\frac{L(s+1)}{L(s)}\omega_Y^s - \frac{L(s+3)}{L(s+2)}\omega_Y^{s+2}\right) .$$

2. Surfaces de Riemann hyperboliques

Les surfaces de Riemann hyperboliques sont celles admettant le plan hyperbolique comme revêtement universel, le groupe fondamental étant un groupe discret d'automorphismes analytiques de co-volume fini, et n'admettant pas d'éléments elliptiques. Si M est une telle surface, munie d'un revêtement universel

(2.1) $$H \longrightarrow M$$

on note $\Gamma = \pi_1(M)$; soient g le genre de M et f le nombre de ses pointes ; le volume de M pour la mesure quotient par Γ de celle définie par v_H est

(2.2) $$\int_{\Gamma\backslash H} v_H = -2\pi\chi(M) \quad , \quad \chi(M) = 2 - 2g - f .$$

On supposera toujours M munie de la structure riemannienne quotient.

Les géodésiques de M sont les images des géodésiques de H. Dire qu'une géodésique Y de H se projette en une géodésique fermée η de M signifie que Y possède une transvection dans Γ , et comme une transvection de Γ n'est jamais conjuguée dans Γ à son inverse, on voit que les géodésiques fermées orientées de M sont paramétrées par les classes de conjugaison des éléments hyperboliques primitifs de son groupe fondamental ; de plus, le groupe fondamental de η est alors $\Gamma_Y = \Gamma \cap G_Y$, avec les notations précédentes.

L'existence de pointes de M correspond à la présence d'éléments paraboliques dans Γ . Les points du bord F de H fixés par des éléments paraboliques de Γ en forment une partie notée F_Γ , et les pointes de M sont les orbites de Γ dans F_Γ . Les horicycles de M sont les images des horicycles de H de centre dans F_Γ ; si X est un horicycle de H de centre $n \in F_\Gamma$, se projetant sur l'horicycle ξ de M en la pointe p , le stabilisateur G_X de X dans G ne dépend que de n , et le groupe fondamental de ξ est $\Gamma_X = \Gamma \cap G_X$. Un élément parabolique de Γ n'est pas conjugué à son inverse ; si on qualifie de positif un élément parabolique qui déplace ses horicycles dans le sens positif, on voit que l'ensemble des pointes de M est paramétré par l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments paraboliques primitifs positifs de son groupe fondamental.

En plus des géodésiques fermées, il y a celles joignant deux pointes ; elles sont orthogonales aux horicycles entre les deux pointes.

Soit ξ un horicycle de M en la pointe p . On se fixe un revêtement $H \longrightarrow M$, et on note $H(\xi)$ l'ensemble des horicycles de H qui se projettent sur ξ . Avec les notations du n° 1, en particulier (1.3), on définit la <u>série d'Eisenstein associée à l'horicycle</u> ξ comme étant la série de 1-formes suivantes, dépendant du paramètre complexe s :

(2.3) $$\hat{\xi}^s = \sum_{X \in H(\xi)} \omega_X^s .$$

Il est bien connu (voir [6]) que cette série converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, vers une 1-forme invariante par le groupe fondamental de M , qui dépend analytiquement de s , et qui admet un prolongement méromorphe à tout le plan des s , avec au plus des pôles simples situés sur l'intervalle $]1/2,1[$, bornes exclues, et vérifiant, par (1.4), la relation

(2.4) $$\Delta \hat{\xi}^s = s(1-s)\hat{\xi}^s ,$$

Soit $|\xi|$ la longueur de l'horicycle ξ ; la forme $|\xi|^{-s}\hat{\xi}^s$ ne dépend pas du choix de l'horicycle ξ en la pointe p ; on la note $\hat{p}^s$. Le relèvement ${}^+H^1(M)$ donné par Harder de $\mathrm{Im}(H^1(M) \to H^1(\partial M))$ est fourni par l'application qui au couple de pointes (p,q) associe la 1-forme harmonique fermée $\hat{q}^1 - \hat{p}^1$.

Lorsque la surface de Riemann M est compacte, on décompose l'espace de Hilbert des formes de carré intégrable à l'aide des valeurs propres du laplacien, dont le spectre est discret, formé de nombres $\geqslant 0$ sans point d'accumulation. La multiplicité de la valeur propre 0 dans l'espace des 1-formes de carré intégrable est $2g$, où g est le genre de M . Lorsque M n'est pas compacte, le laplacien possède un spectre continu, lié aux séries d'Eisenstein $\hat{p}^s$ relatives aux pointes p de M de la façon suivante. On introduit les formes, de type $(1,0)$ et $(0,1)$ respectivement,

$$(2.5) \qquad {}^{+}\hat{p}^s_X = i\hat{p}^s_X - *\hat{p}^s_X \quad \text{et} \quad {}^{-}\hat{p}^s_X = -i\hat{p}^s_X - *\hat{p}^s_X \ .$$

Pour les 1-formes de carré intégrable suffisamment régulières, la décomposition spectrale est ([6])

$$(2.6) \qquad \omega = \sum_\lambda (\omega)_\lambda + \sum_p \frac{1}{4\pi i} \int_{\mathrm{Re}(s)=1/2} (<{}^{+}\hat{p}^s|\omega>{}^{+}\hat{p}^s + <{}^{-}\hat{p}^s|\omega>{}^{-}\hat{p}^s)ds$$

où $(\ )_\lambda$ désigne la projection orthogonale sur le sous-espace associé à la valeur propre λ du spectre discret de Δ , et la sommation en p porte sur les différentes pointes de M .

Les formes différentielles sur M sont aussi les formes différentielles sur H qui sont invariantes par le groupe Γ ; une forme différentielle ω (indéfiniment dérivable) sur H est dite <u>forme automorphe</u> pour Γ , si elle est invariante par Γ , de type fini sous l'action du laplacien, et, dans chaque pointe, croît moins vite qu'un polynôme en $(z:X)$, avec un horicycle X relatif à la pointe. Une forme automorphe est dite <u>cuspidale</u> si les intégrales sur tous les horicycles de M sont nulles. Pour une forme sur M de carré intégrable, la condition d'être harmonique équivaut au fait qu'elle est fermée et co-fermée.

3. <u>Série d'Eisenstein d'une géodésique orientée fermée</u>

On part d'une géodésique orientée fermée η de la surface de Riemann hyperbolique M , munie d'un revêtement universel (2.1). Soit $H(\eta)$ l'ensemble des géodésiques orientées de H se projetant sur η . Avec la notation (1.3), on introduit la série

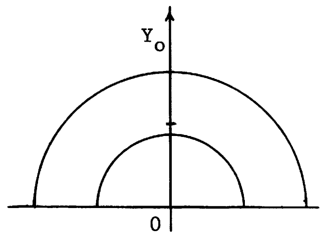
$$(3.1) \qquad \hat{\eta}^s = \frac{L(s+1)}{L(s)} \sum_{Y \in H(\eta)} \omega^s_Y \quad , \quad s \in \underline{\underline{C}} \ ;$$

c'est la <u>série d'Eisenstein associée à la géodésique orientée fermée</u> η ; Kudla-Millson l'appelle série d'Eisenstein hyperbolique. Leur premier résultat est le suivant.

THÉORÈME 1.- <u>Pour</u> $\mathrm{Re}(s) > 1$, <u>la série d'Eisenstein de la géodésique orientée fermée converge uniformément sur tout compact, sa somme est une</u> 1-<u>forme bornée fermée dont la classe de cohomologie est la classe duale de la classe d'homologie définie par</u> η , <u>et c'est une fonction analytique de</u> s <u>dans</u> $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Kudla-Millson démontre la convergence de la façon suivante. On fixe Y_o dans $H(\eta)$; alors $H(\eta) = \Gamma Y_o = (\Gamma/\Gamma_{Y_o})Y_o$; soit $|\eta|$ la longueur de η : $|\eta| = \int_{\Gamma_{Y_o}\backslash Y_o} v_{Y_o}$;

le groupe G_{Y_o} permute les géodésiques orthogonales à Y_o de façon simplement transitive ; un domaine fondamental pour l'action de Γ_{Y_o} sur ces géodésiques est donné par celles qui coupent Y_o suivant un intervalle d'amplitude $|\eta|$. On fixe un horicycle X_o de H de centre le bout positif de Y_o ; par un automorphisme de H , on peut supposer qu'on se trouve dans la situation standard où Y_o est le demi-axe des ordonnées positives et X_o la droite $y = 1$. On a donc $|\omega_{Y_o}| = y/|z|$, et $|\omega^s_{Y_o}| = y^\sigma/|z|^\sigma$, avec $\sigma = \mathrm{Re}(s)$. Pour $|z|$ dans un intervalle multiplicativement borné, et s restant dans un compact, on a $|\omega^s_{Y_o}| \asymp y^\sigma = |\omega^s_{X_o}|$. Soit $K \subset H$ une partie compacte ; on choisit un système complet de représentants S de Γ/Γ_{Y_o} tel que $S^{-1}K$ soit multiplicativement borné. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit de façon que, pour tout $z \in K$, z soit le seul point de Γz dont la distance à z soit $< \varepsilon$. Comme la fonction $z \longmapsto (\mathrm{Im}\, z)^\sigma$ est fonction propre du Laplacien sur H , sa valeur moyenne sur toute boule est proportionnelle à sa valeur au centre, le facteur de proportionalité ne dépendant que du rayon de la boule, et de σ [6]. On en déduit



$$\sum_{Y\in H(\eta)} |\omega^s_Y|_z = \sum_{S^{-1}} \gamma^*|\omega^s_{Y_o}|_z \asymp \sum_{S^{-1}} (\mathrm{Im}(\gamma z))^\sigma = \sum_{S^{-1}} C(\varepsilon,\sigma)\int_{d(z',\gamma z)\leqslant\varepsilon/2} (\mathrm{Im}\, z')^\sigma |v_H(z')|$$

que l'hypothèse faite majore par $C(\varepsilon,\sigma)\int_{e^{-a}\leqslant|z'|\leqslant e^a} (\mathrm{Im}\, z')^\sigma |v_H(z')|$. Cette intégrale se calcule : on trouve $\frac{2\mathrm{sh}(\sigma a)L(\sigma-1)}{L(\sigma)}$, ce qui donne la majoration de la série des modules par $C/(\sigma-1)$, uniformément sur K et pour s restant dans un compact de $\mathrm{Re}(s) > 1$. Ceci donne la convergence uniforme de la série d'Eisenstein sur les compacts de H , uniformément sur les compacts du demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Pour le reste du théorème, on observe que chaque ω^s_Y étant une 1-forme sur H invariante par G_Y définit une 1-forme sur $\Gamma_Y\backslash H$, et que la projection orthogonale $p_Y : H \longrightarrow Y$ induit une projection orthogonale $\Gamma_Y\backslash H \longrightarrow \Gamma_Y\backslash Y$, faisant apparaître $\Gamma_Y\backslash H$ comme le fibré normal à la courbe $\Gamma_Y\backslash Y$ de $\Gamma_Y\backslash H$, qui s'identifie naturellement à la géodésique η . Les propriétés de ω_Y et ω^s_Y données au n° 1 montrent alors que la classe de ω^s_Y dans $H^1(\Gamma_Y\backslash H, \underline{\mathbb{C}})$ est la classe duale de la section nulle du fibré $\Gamma_Y\backslash H \longrightarrow \eta$, au facteur $L(s)/L(s+1)$ près. La convergence de la série d'Eisenstein montre alors que la classe de $\hat{\eta}^s$ dans $H^1(M, \underline{\mathbb{C}})$ est la classe duale de η . J. Oesterlé a démontré (voir Appendice) que la forme $\hat{\eta}^s$ était bornée.

4. Equation fonctionnelle et prolongement analytique

La relation (1.7) donne alors l'équation fonctionnelle.

THÉORÈME 2.- Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a

(4.1) $$\Delta\hat{\eta}^s = s(1-s)[\hat{\eta}^s - \hat{\eta}^{s+2}] .$$

Le théorème principal de Kudla-Millson est alors le suivant.

THÉORÈME 3.- La série d'Eisenstein $\hat{\eta}^s$ associée à une géodésique orientée fermée vérifie les propriétés suivantes :

a) elle se prolonge analytiquement au demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1/2$,

b) sa valeur en $s = 1$ est une forme harmonique cuspidale de carré intégrable, qui est la forme duale de la géodésique orientée η .

La démonstration repose sur la décomposition spectrale des 1-formes de carré intégrable ; ici, on a, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\hat{\eta}^s = \sum_\lambda (\hat{\eta}^s)_\lambda + \sum_p \frac{1}{4\pi i} \int_{\mathrm{Re}(t)=1/2} (\langle {}^+\hat{p}^t | \hat{\eta}^s \rangle\, {}^+\hat{p}^t + \langle {}^-\hat{p}^t | \hat{\eta}^s \rangle\, {}^-\hat{p}^t)\, dt \,, \tag{4.2}$$

la première somme portant sur le spectre discret du laplacien, et la seconde sur les pointes de M . L'équation fonctionnelle (4.1) de $\hat{\eta}^s$ conduit aux équations fonctionnelles de ses conposantes

$$\left\{ \begin{aligned} (\hat{\eta}^s)_\lambda &= \frac{s(1-s)}{s(1-s)-\lambda} (\hat{\eta}^{s+2})_\lambda \\ \langle {}^\pm\hat{p}^t | \hat{\eta}^s \rangle &= \frac{s(1-s)}{s(1-s)-|t|^2} \langle {}^\pm\hat{p}^t | \hat{\eta}^{s+2} \rangle \,. \end{aligned} \right. \tag{4.3}$$

Le décalage du second membre en s , appliqué plusieurs fois, montre la décroissance améliorée des premiers membres par rapport au paramètre spectral, et donc que pour $\mathrm{Re}(s) > 1/2$, où les dénominateurs dans (4.3) , pour $\lambda \neq 0$, ne s'annulent pas, la somme du second membre de (4.2) définit une 1-forme analytique en s , pour chaque point de H . En particulier, $\hat{\eta}^1$ est bien définie, réelle, et comme les relations (4.3) montrent que les composantes, pour $s = 1$, autres que $(\hat{\eta}^1)_0$ sont nulles, on a $\hat{\eta}^1 = (\hat{\eta}^1)_0$. D'un autre côté, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, $(\hat{\eta}^s)_0$ est la composante harmonique de $\hat{\eta}^s$, et comme elle est de carré intégrable, c'est la forme harmonique duale de η ; en particulier elle ne dépend pas de s ; la périodicité $s \longmapsto s+2$ de cette fonction ramène $(\hat{\eta}^1)_0$ à cette fonction constante. Ceci montre que $\hat{\eta}^1$ est de carré intégrable, et que c'est la forme harmonique de carré intégrable duale de η . Qu'elle soit cuspidale résulte de ce que les 1-formes harmoniques de carré intégrable le sont toutes. Ceci démontre donc le théorème.

COROLLAIRE.- La 1-forme holomorphe de carré intégrable, duale de η est $\dfrac{i\hat{\eta}^1 - *\hat{\eta}^1}{2}$.

Lorsque la surface M est compacte, on peut préciser davantage. Par le comportement asymptotique des valeurs propres du laplacien ($\lambda_n \sim cn$ pour la n-ème valeur propre), les composantes $(\hat{\eta}^s)_\lambda$ se prolongent méromorphiquement à tout le plan des s , les pôles apparaissant éventuellement aux valeurs de s pour qui $s(1-s)$ est valeur propre du laplacien, et alors ils sont simples. Plus précisément, Kudla-Millson donne la caractérisation suivante des pôles de la série d'Eisenstein $\hat{\eta}^s$.

THÉORÈME 4.- Lorsque la surface de Riemann M est compacte, la série d'Eisenstein se prolonge méromorphiquement à tout le plan des s , et ses pôles sont les nombres de la forme $\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4-\lambda} - 2n$, où n est un entier $\geqslant 0$ et λ une valeur propre du laplacien, pour qui le sous-espace propre correspondant n'annule pas η .

5. Remarques

5.1. Lorsque η est une géodésique orientée entre deux pointes p et q de la surface de Riemann hyperbolique M , on peut se demander si la série (3.1), dont le terme général conserve un sens, converge encore pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, définit une fonction analytique de s dans ce demi-plan, admet un prolongement analytique au delà, et donne pour $s = 1$ une forme harmonique duale de η ; ceci donnerait une réalisation automorphe des symboles modulaires de Mazur. En particulier, une combinaison linéaire naturelle des géodésiques "les plus courtes" entre les deux pointes p et q produirait la forme harmonique $\hat{q} - \hat{p}$, comme le laisse entendre Kudla-Millson ([1], p. 194 et 208).

5.2. Pour les espaces hyperboliques compacts réels de rang 1 , Kudla et Millson généralisent leur construction des séries d'Eisenstein, et relient les formes harmoniques duales obtenues aux formes harmoniques produites par la représentation de Weil ([11]) ; ils ont aussi des résultats pour les espaces hyperboliques compacts associés aux groupes $SU(p,q)$ et $SO(p,q)$.

5.3. Dans ([12]) Millson et Ragunathan introduisent certains cycles géodésiques sur les espaces localement symétriques, appelés spéciaux par Kudla et Millson : ils sont localement les points fixes des isométries involutives, et leur article montre que ce sont les cycles totalement géodésiques admettant un complément orthogonal totalement géodésique, ce qui devrait faire intervenir efficacement les paires réductives duales de R. Howe. Ils appliquent leur construction à l'étude de la cohomologie de groupes arithmétiques. Voir aussi un preprint de Ash ([14]).

5.4. Dans le cas d'un quotient compact du bi-disque, Kudla et Millson construisent la forme harmonique duale de type (1,1) d'une courbe lisse irréductible totalement géodésique, par leur technique ; il leur faut introduire un terme correctif dans le terme général de leur série d'Eisenstein, qui tient compte du fait que le fibré normal à la courbe n'est pas plat ([13]).

5.5. Un exemple, tiré d'un résultat de Schwermer ([21]) montre, pour un quotient convenable de la boule hyperbolique, qu'il n'y a pas de 1-cohomologie cuspidale, alors que l'espace possède des géodésiques fermées homologiquement non nulles.

5.6. Ce travail de Kudla et Millson pour les surfaces de Riemann hyperboliques prouve qu'on a une bonne théorie de Hodge pour la partie cuspidale de la 1-cohomologie. Pour l'étude des espaces localement symétriques à courbure négative non compacts, Borel et Serre ont introduit une compactification en une variété à coins qui a même type d'homotopie ; on peut alors étudier la cohomologie à l'infini, à la Harder, ce qu'a fait J. Schwermer pour SL_n ([20]) ; A. Ash donne l'ampleur de la cohomologie qui n'est pas de carré intégrable dans [15]. On peut aussi se ramener à l'étude de la cohomologie continue des groupes semi-simples ([16], [18]).

APPENDICE

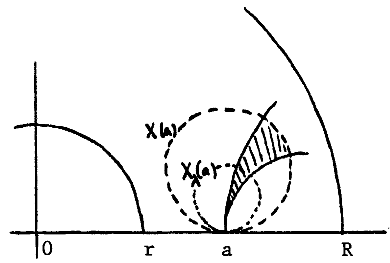
Comportement des formes $\hat{\eta}^s$ aux pointes

par J. Oesterlé

Le but de cet appendice, où nous utilisons librement les définitions et notations de Gérardin, est de montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, la 1-forme fermée $\hat{\eta}^s$ sur M introduite au n° 3 tend vers zéro aux pointes.

On se ramènera au cas où $Y_0 = i\mathbb{R}_+^{\times}$, avec son orientation usuelle, est un relèvement de η . Fixons un nombre complexe s de partie réelle $\sigma > 1$. Notons p une pointe de M , et A un système de représentants modulo Γ_{Y_0} des relèvements de p , qui soit multiplicativement bornée dans $\mathbb{C}$. Soit ξ un horicycle en p , suffisamment petit pour que les horicycles $X(a)$, $a \in A$, se projetant sur ξ soient deux à deux disjoints. La réunion (disjointe) des horiboules $B(a)$ de centre a et frontière $X(a)$, $a \in A$, est contenue dans une couronne $C = \{z \mid r \le |z| \le R\}$.

Fixons a_0 dans A . L'ensemble S des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma a_0 \in A$ est un système de représentants de $\Gamma_{Y_0}\backslash\Gamma$, et il existe un domaine de Siegel Σ en a_0 tel que $\bigcup_{a\in A} B(a)$ soit la réunion disjointe des $\gamma\Sigma$, $\gamma \in S$.



La partie hachurée représente Σ .

Pour tout réel $\lambda > 0$, soit $X_\lambda(a)$ (resp. $B_\lambda(a)$) l'ensemble des $z \in B(a)$ dont la distance à $X(a)$ est égale (resp. supérieure ou égale) à λ . Posons $\Sigma_\lambda = \Sigma \cap B_\lambda(a_0)$. Il existe $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ tels que le diamètre de $\Sigma_\lambda - \Sigma_{\lambda+1}$ soit majoré par c_1 , et que le volume (pour v_H) de $\Sigma_\lambda - \Sigma_{\lambda+1}$ soit égal à $c_2 e^{-\lambda}$. Il existe $c_3 > 0$ tel que pour $z, z' \in H$, $d(z,z') \le c_1$, on ait $|\omega^s_{Y_0}(z)| \le c_3 |\omega^s_{Y_0}(z')|$ (rappelons que $|\omega^s_{Y_0}(z)| = (\mathrm{Im}(z)/|z|)^\sigma$).

Soit $z \in \Sigma$, ζ sa projection dans M et $\lambda = d(\zeta,\xi)$ la distance de ζ à ξ . On a

$$c_2 e^{-\lambda} \sum_{\gamma\in S} |\omega^s_{Y_0}(\gamma z)| = \int_{\Sigma_\lambda - \Sigma_{\lambda+1}} \sum_{\gamma \in S} |\omega^s_{Y_0}(\gamma z)|\,|v_H|(z')$$
$$\le c_3 \int_{\Sigma_\lambda - \Sigma_{\lambda+1}} \sum_{\gamma \in S} |\omega^s_{Y_0}(\gamma z')|\,|v_H|(z')$$
$$\le c_3 \int_{\bigcup_{\gamma\in S} \gamma\Sigma_\lambda} |\omega^s_{Y_0}(z')|\,|v_H|(z')$$
$$\le c_3 \sum_{a\in A} \int_{B_\lambda(a)} (\mathrm{Im}(z')/r)^\sigma |v_H|(z') .$$

Mais l'homothétie de centre a et rapport $e^{-\lambda}$ laisse v_H invariant et transforme $B(a)$ en $B_\lambda(a)$, de sorte que

$$\sum_{a\in A}\int_{B_\lambda(a)}(\mathrm{Im}(z'))^{\sigma}|v_H|(z') = e^{-\lambda\sigma}\sum_{a\in A}\int_{B(a)}(\mathrm{Im}(z'))^{\sigma}|v_H|(z') \leq e^{-\lambda\sigma}\int_C(\mathrm{Im}(z'))^{\sigma}|v_H|(z') .$$

Nous aurons donc

$$|\hat{\eta}^s(\zeta)| \leq \left|\frac{L(s+1)}{L(s)}\right| \sum_{\gamma\in S} |\omega^s_{Y_o}(\gamma z)| \leq e^{-\lambda(\sigma-1)}\left|\frac{L(s+1)}{L(s)}\right|(c_3/c_2)r^{-\sigma}\int_C(\mathrm{Im}(z'))^{\sigma}|v_H|(z') .$$

Ceci montre que $\hat{\eta}^s(\zeta)$ tend vers 0 lorsque $\lambda = d(\zeta,\xi)$ tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque ζ tend vers p .

BIBLIOGRAPHIE

Le travail de Kudla et Millson dont il s'agit est le suivant:

[1] S.-S. KUDLA and J.-J. MILLSON - *Harmonic Differentials and Closed Geodesics on a Riemann Surface*, Inv. Math., 54(1979), 193-211.

La forme harmonique duale avait été obtenue dans [2] dans le cas compact et dans [3] dans le cas $\Gamma_0(N)$:

[2] J. FAY - *Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 293-294(1977), 144-203.

[3] H. PETERSSON - *Ein Summationsverfahren für die Poincaréschen Reihe von der Dimension -2 zu der hyperbolischen Fixpunkte-Paaren*, Math. Zeit., 49 (1943/44), 441-446.

Séries d'Eisenstein aux pointes et décomposition spectrale pour les surfaces de Riemann ; en plus du cours (non publié) de Godement à Paris VII en 1971/72, il y a :

[4] I.-M. GEL'FAND, M.-I. GRAEV and I.I. PIATETSKI-SHAPIRO - *Representation theory and automorphic functions (Generalized functions, vol. 6)*, Moscou 1966. Traduction anglaise Saunders 1969.

[5] E. HECKE - *Darstellung von Klassenzahlen als Perioden von Integralen 3 . Gattung aus dem Gebiet der elliptischen Modulfunktionen*. Gesam. Werke, n° 21.

[6] T. KUBOTA - *Elementary theory of Eisenstein series*, Halsted Press, New-York, 1973.

[7] H. MAASS - *Über eine neue Art von nichanalytischen automorphen Funktionen und die Dirichlet'scher durch Funktional gleichungen*, Math. Ann., 121(1949), 141-183.

Pour l'homologie et la cohomologie des surfaces de Riemann, il y a un cours (non publié) de Serre au Collège de France en 1967, [10] pour le cas holomorphe, [8]-[9] pour la partie dite à l'infini :

[8] G. HARDER - *On the cohomology of* $SL_2(\mathcal{O})$, dans : Lie groups and their representations. Proc. of the Summer School on Group Representations, Ed. Gel'fand Hilger, London, 1975, 139-150.

[9] G. HARDER - *On the cohomology of discrete arithmetically defined groups*, dans : Proc. of the Int. Coll. on Discrete Subgroups of Lie Groups and Applications to Moduli, Bombay, 1973. Oxford University Press, 1975, 129-160.

[10] G. SHIMURA - *Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten, Japon, et Princeton University Press, Etats-Unis d'Amérique, 1971.

Généralisation des constructions géométriques de formes automorphes harmoniques :

[11] S.-S. KUDLA and J.-J. MILLSON - *Geodesic cycles and the Weil representation I* , Preprint 1979.

[12] S.-S. KUDLA and J.-J. MILLSON - *The Poincaré dual of a Geodesic Algebraic Curve in a quotient of the 2-Ball*, Preprint 1980.