

# *Astérisque*

ANDRÉ VOROS

**Problème spectral de Sturm-Liouville : le cas  
de l'oscillateur quartique**

*Astérisque*, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 602, p. 95-104

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1982-1983\\_\\_25\\_\\_95\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__95_0)

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME SPECTRAL DE STURM-LIOUVILLE :  
LE CAS DE L'OSCILLATEUR QUARTIQUE

par André VOROS\*

On considère sur la droite réelle le problème aux valeurs propres de Sturm-Liouville constitué par l'équation de Schrödinger stationnaire en mécanique quantique

$$(1) \quad [-\hbar^2 \frac{d^2}{dq^2} + (V(q) - E)]\psi(q) = 0 .$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck, la fonction potentiel  $V(q) = q^{2M} + \dots$  est ici un *polynôme réel* de degré  $2M \geq 2$ , avec  $E$  (l'énergie) le paramètre spectral, ajusté de sorte que  $\inf_{q \in \mathbb{R}} \{V(q)\} = 0$ . Le problème (1) admet alors un spectre purement discret  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  [1] :

$$(2) \quad 0 < E_0 < E_1 < \dots < E_k < \dots \quad (E_k \uparrow +\infty)$$

mais on ne dispose pas de formules exactes sauf pour  $M = 1$  (oscillateur harmonique = équation d'Hermite) :  $V(q) = q^2 \Rightarrow E_k = (2k+1)\hbar$ . Aussi les méthodes asymptotiques *semi-classiques* (en puissances de  $\hbar$ ), qui produisent d'excellentes approximations, ont-elles été très étudiées [2] du point de vue analytique [3-4], et sous l'angle de leurs relations avec l'optique géométrique [5-7]. Ces méthodes relient le comportement asymptotique du spectre (2) aux *orbites fermées* du champ de vecteurs hamiltonien de la fonction

$$(3) \quad H(p, q) = p^2 + V(q)$$

dans l'espace de phase  $\mathbb{R}^2$  (*limite classique* du problème (1)). On trouve ainsi la règle spectrale de Bohr-Sommerfeld [2] :

$$(4) \quad \hbar^{-1} \oint_{H=E_k} p dq = (2k+1)\pi + o(\hbar k^{-1}) \quad (\hbar k^{-1} \rightarrow 0)$$

qui précise, dans les problèmes unidimensionnels, la formule asymptotique de Weyl [7].

Notre travail [8] vise à établir que ces méthodes, que l'on considère irrémédiablement approximatives, dissimulent en fait un procédé d'attaque *exact* du problème (1). L'illustration sera fournie par l'*oscillateur quartique*, à savoir  $V(q) = q^4$ , qui est le cas non-trivial le plus simple et qui a servi de banc d'essai pour l'élaboration de la méthode [9-10], ainsi que sa vérification à l'aide des valeurs numériques assez précises disponibles par ailleurs pour le spectre [11]. L'extension à  $V$  de degré  $> 4$  ne présente que des difficultés calculatoires.

\* Chercheur au C.N.R.S.

1. Rappels et notations

On définit (pour  $M > 1$ ) les fonctions spectrales [10] :

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta(E) = \prod_0^\infty (1 - E/E_k) & \text{(déterminant de Fredholm)} \\ \zeta(s) = \sum_0^\infty E_k^{-s} & \text{(fonction zêta du problème (1))} \end{cases} .$$

On utilisera plus tard la série de Taylor (convergente pour  $|E| < E_0$ ) :

$$(6) \quad \log \Delta(E) = - \sum_{n=1}^\infty \zeta(n) E^n / n .$$

Des techniques spécifiques aux équations différentielles ordinaires [1] simplifient l'étude du spectre à une dimension. Soit l'impulsion classique :

$$(7) \quad p(q) = (E - V(q))^{1/2} \text{ avec } \text{Arg } p(q) = -\pi/2 \quad (q \rightarrow -\infty) .$$

On pose  $x = \hbar^{-1}$  (paramètre de fréquence, plus commode que  $\hbar$ ) .

Il existe alors une solution unique de (1) vérifiant [3] :

$$(8) \quad \psi(q) \sim p(q)^{-1/2} \exp ix \int_{q_0}^q p(q') dq' \quad (q \rightarrow -\infty) ,$$

solution *récessive* (évanescence) en  $-\infty$ . De l'autre côté :

$$(9) \quad \lim_{q \rightarrow +\infty} \psi(q) [p(q)^{-1/2} \exp ix \int_{q_0}^q p(q') dq']^{-1} = a$$

existe, et  $a = 0$  ssi  $E$  est valeur propre de (1). On a même l'identité remarquable [8] :

$$(10) \quad \begin{cases} D(E, x) \equiv \Delta_{c1}(E, x) a(E, x) , & \text{où} \\ D = e^{-\zeta'(0)} \Delta , & \Delta_{c1} = \exp x \int_0^\infty \frac{d(\int_{H < E'} dp dq)}{E' - E} = \exp x \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{V-E} - \sqrt{V}) dq \end{cases}$$

définie par prolongement analytique à partir de  $E < 0$  ;  $\Delta_{c1}(E)$  désigne la partie divergente de  $\Delta(E)$ , laquelle provient de la formule semi-classique (4).

*Remarque.*— afin d'alléger les formules nous omettons d'écrire les variables muettes ou non significatives telles que  $\hbar$  dans (5),  $E$  dans (8).

2. La méthode semi-classique exacte. Principales étapes :

a) on complexifie la coordonnée  $q$ , et les paramètres  $E$  et  $x = \hbar^{-1}$  ;

b) on calcule les solutions formelles de (1) du type Liouville-Green ou eikonal (c'est la "méthode BKW complexe" [2-5]) :

$$(11) \quad \psi_{\pm}(q; x) = a(q; x) p^{-1/2} \exp \pm ix \int_{q_0}^q p(q') dq'$$

où  $a$  se calcule comme série formelle :

$$(12) \quad a(q; x) \sim 1 + \sum_1^\infty \alpha_n(q) x^{-n} ;$$

c) on passe en représentation conjuguée de Fourier-Laplace par rapport à la variable  $x$  (transformation de Balian-Bloch [5]),  $C(q)$  étant un chemin infini à spécifier :

$$(13) \quad \psi(q; x) = x \int_{C(q)} \tilde{\psi}(q, s) e^{-xs} ds .$$

OSCILLATEUR QUARTIQUE

Le problème (1) devient alors l'équation aux dérivées partielles homogène :

$$(14) \quad \partial^2 \tilde{\Psi} / \partial q^2 + (E - V(q)) \partial^2 \tilde{\Psi} / \partial s^2 = 0 \quad ;$$

d) on cherche (11) comme image d'une solution  $\tilde{\Psi}(q,s)$  analytique en  $(q,s)$  et à ramification logarithmique isolée (problème de Cauchy ramifié [12]). Le lieu de ramification est nécessairement le graphe  $\Sigma$  d'une solution complexe de l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$(15) \quad \Sigma = \{(q, s(q)) \mid s'(q)^2 = V(q) - E\} \quad ,$$

et la série de Puiseux de la ramification est la transformée de Borel de (12) :

$$(16) \quad \tilde{a}(q,s) = -(2\pi i)^{-1} \log s \left[ 1 + \sum_1^{\infty} \alpha_n(q) s^n / n! \right] \quad ;$$

e) on résout (14) sous les conditions aux limites pour  $q \rightarrow -\infty$  :

$$(17) \quad \begin{cases} s(q) = - \int_{q_0}^q |p| dq & \text{(choix d'une branche positive pour } s(q) \text{)} \\ \lim_{q \rightarrow +\infty} \tilde{a}(q,s) = -(2\pi i)^{-1} \log s \quad ; \quad \lim_{q \rightarrow +\infty} \partial \tilde{a} / \partial q = 0 \quad ; \end{cases}$$

conditions garantissant, si  $\tilde{\Psi}$  existe, que  $\Psi(q,x)$  obtenu par l'intégration (13) est la solution récessive (8) qui nous intéresse ;

f) on détermine la structure analytique complète de la fonction  $s \rightarrow \tilde{\Psi}(q,s)$  pour  $q$  quelconque par prolongement analytique à partir de  $q = -\infty$  (méthode de déformation par isotopies ambiantes [13-14]) ;

g) de même qu'en (9) on prend la limite  $q \rightarrow +\infty$  dans (11-16)

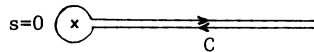
$$(18) \quad a(x) = \lim_{q \rightarrow +\infty} a(q;x) = x \int_C \tilde{a}(+\infty, s) e^{-xs} ds \quad (\text{fig. 1})$$

$$(19) \quad = x \int_0^{\infty} a_B(s) e^{-xs} ds \quad , \quad \text{où}$$

$$(20) \quad a_B(s) = \tilde{a}(+\infty, s) - \tilde{a}(+\infty, e^{2i\pi} s)$$

est la variation de  $\tilde{a}(+\infty, s)$  autour du point de ramification  $s = 0$  .

Figure 1.



La méthode indiquée en f) aboutit donc à la structure analytique complète (au groupe de monodromie globale [14]) de la fonction transformée de Borel  $a_B(s)$  , liée au spectre  $\{E_k\}$  par la formule de sommation de Borel (19) puis l'identité (10). On trouve ainsi que  $a_B(s)$  est une fonction résergente au sens d'Ecalte [15], se ramifiant au-dessus du réseau des points :

$$(21) \quad s = \omega_Y = -i \int_Y p dq$$

où  $Y$  est toute orbite périodique, réelle ou complexe, du hamiltonien (3) à l'énergie  $E$  considérée ; les déterminations de  $a_B$  sont indexées par ces mêmes orbites et forment en outre une algèbre de convolution (à base dénombrable) ;

h) pour avoir le spectre (les zéros de  $a(x;E)$  ) il ne "reste qu'à" reconstruire

$a_B(s)$  à partir de sa monodromie (puis intégrer (19)). Ce problème de Riemann-Hilbert [16] n'est hélas pas résolu, et seul un résultat partiel peut être explicité [8] : les symétries de la monodromie imposent au déterminant  $\Delta(E)$  de vérifier une *équation fonctionnelle polynômiale*, dont la structure rappelle les équations de Sibuya pour les multiplicateurs de Stokes [17]. Dans le cas de l'oscillateur harmonique cette équation est la formule des compléments pour la fonction  $\Gamma$  d'Euler ; pour les potentiels homogènes ( $V(q) = q^{2M}$ ), le développement des équations fonctionnelles en puissances de  $E$  fournit une infinité d'*identités arithmétiques* entre les valeurs de la fonction zêta aux divers points entiers.

### 3. Remarques et exemples

L'argumentation détaillée étant longue [8], nous ferons seulement quelques commentaires explicatifs illustrés par quelques résultats relatifs à l'*oscillateur quartique*  $V(q) = q^4$ . Les lettres a), c)... renvoient à l'énumération ci-dessus.

a) l'analyticité de  $V$  est une condition fondamentale car la méthode de prolongement utilisée en f) n'est efficace qu'en coordonnées complexes. En revanche il est concevable de l'étendre à des potentiels non polynômiaux, voire méromorphes, ou encore à des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur.

c) on fait l'*hypothèse* qu'une telle représentation (13) existe pour un chemin ouvert  $C$  (autorisé à dépendre de  $q$ ) et pour une fonction analytique  $\tilde{\Psi}$  tempérée à l'infini en  $s$ . Par déformation de contour, seules les singularités de  $\tilde{\Psi}$  contribuent au résultat, donc  $\tilde{\Psi}$  est à considérer comme une fonction ramifiée modulo des fonctions analytiques (un genre de microfonction globale et tempérée).

d) les formules (15-16) décrivent la propagation dans le complexe des singularités des solutions de l'équation aux dérivées partielles homogène (14) (la coordonnée  $q$  jouant le rôle du "temps"). Ce sont des analogues holomorphes [12] des théorèmes sur les fronts d'onde  $C^\infty$  [6].

e) la validation mathématique de notre procédure se réduit entièrement à démontrer que le problème aux limites (17) est bien posé dans une classe de fonctions tempérées à l'infini en  $s$  et à ramifications isolées. Actuellement ce résultat est *conjectural*, mais il est corroboré par de nombreuses conséquences se prêtant à des vérifications numériques précises.

f) le problème est de déformer le groupe de monodromie de la fonction  $s \rightarrow \tilde{\Psi}(q,s)$  par rapport à  $q$ , partant d'un voisinage de  $q = -\infty$  où la formule (17) impose la monodromie (connue) de la fonction  $\log s$ . Cette déformation est induite par la géométrie de la courbe complexe  $\Sigma$  ; les obstructions à la déformation triviale proviennent des singularités de  $\Sigma$ , pour lesquelles on invoque les formules de Picard-Lefschetz. Si l'on se limite aux valeurs de  $E$  (génériques) telles que les racines  $q_j^{\pm}$  de  $V(q) = E$  soient simples, alors l'équation de Hamilton-Jacobi (15) n'autorise comme singularités que des self-intersections transverses, et des "points cuspidaux"

## OSCILLATEUR QUARTIQUE

au-dessus des  $q_j^!$ , où :

$$(22) \quad s(q) - s(q_j^!) \sim c(q - q_j^!)^{3/2} .$$

L'effet des self-intersections se trouve être nul ; en revanche le sous-groupe de monodromie relatif à deux branches de  $\Sigma$  se raccordant suivant (22) doit représenter le groupe du *noeud de trèfle*, et cette contrainte le détermine complètement.

Dans le problème initial (1), l'obstruction ainsi décrite est connue sous le nom de "phénomène de Stokes" [2-4] : la décomposition d'une solution  $\psi$  sur une base de solutions formelles du type (5) :

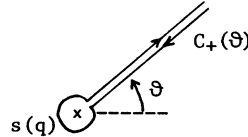
$$(23) \quad \psi = b_+ \psi_+ + b_- \psi_-$$

est locale en  $q$  et ne se prolonge globalement qu'en autorisant des variations *finies* des coefficients  $b_{\pm}$ , variations données par des *règles de raccordement* ("connection formulas") dont la précision et la portée sont assez obscures dans la littérature asymptotique. Le passage à l'équation transformée de Borel (14) a rendu le problème analytique, et conduit par notre raisonnement à une réponse exacte, unique et générale au problème du raccordement (possibilité pressentie par Dingle [4], Knoll et Schaeffer [18]) :

1) si  $\psi_{\pm}$  sont resommés par la méthode de Borel dans la direction  $\vartheta$ , à savoir par exemple (*fig. 2*) :

$$(24) \quad \psi_+(q; x) = x \int_{C_+(\vartheta)} \tilde{\psi}(q; s) e^{-xs} ds ,$$

Figure 2.



alors  $b_+$  et  $b_-$  subissent des *sauts* à chaque traversée d'une *ligne de Stokes*, courbe du plan  $q$  définie par la condition :

$$(25) \quad ix \int_{q_j^!}^q p(q') dq' \in \mathbb{R} \quad (q_j^! \text{ racine de } V(q) = E) .$$

2) sauf pour les valeurs (en nombre fini) de  $\text{Arg } x = -\vartheta$  vérifiant :

$$(26) \quad ix \int_{q_j^!}^{q_k^!} p(q') dq' \in \mathbb{R} \quad (q_k^! \text{ racine distincte de } q_j^!)$$

les sauts  $\delta b_{\pm}$  à la traversée d'une ligne de Stokes dans le sens trigonométrique (vu de l'origine  $q_j^!$ ), en supposant que  $\psi_+$  est la solution dominante :

$ix \int_{q_j^!}^q p(q') dq' > 0$  (le cas opposé se traite de même), valent :

$$(27) \quad \begin{cases} \delta b_+ = 0 & \delta b_- = i u_{\Gamma}^{\vartheta} b_+ & \text{avec} \\ u_{\Gamma} = \exp ix \int_{\Gamma} (p - ia'/xa) dq & \text{(fig. 3) et} \\ u_{\Gamma}^{\vartheta} = \text{somme de Borel de } u_{\Gamma} & \text{dans la direction } \vartheta \end{cases}$$

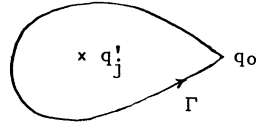


Figure 3.

Remarques. — la sommabilité de Borel des séries formelles  $\psi_{\pm}$  et  $u_{\Gamma}$ , dans les directions  $\vartheta$  non exclues par (25) et (26) respectivement, fait partie du résultat.

— lorsque  $\vartheta$  traverse une valeur exclue, les expressions formelles finales ont des sauts exponentiellement petits qui mesurent en dernière analyse la non-commutativité du groupe de monodromie ; le rôle essentiel de ce groupe n'apparaît pas dans les présentations habituelles.

— la restriction des formules (27) au domaine réel redonne les règles de saut de l'indice de Maslov à une dimension [6].

g) pour  $V(q) = q^4$  (cas quartique) et  $E < 0$ , soient  $\gamma, \gamma'$  (fig. 4) deux orbites matérialisant les périodes primitives de la trajectoire classique complexe (une fonction elliptique  $cn$ ), et soient les actions classiques :

$$(28) \quad \omega = -i \int_{\gamma} pdq = \frac{\Gamma(1/4)^2}{3\sqrt{\pi}}, \quad \omega' = -i \int_{\gamma'} pdq = i\omega$$

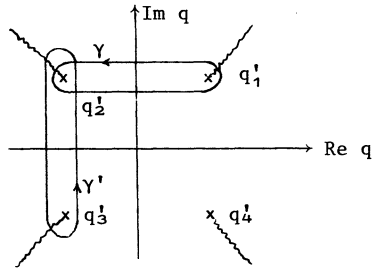


Figure 4.

On peut décrire la structure analytique de  $a_B(s)$  dans un plan coupé de sorte que le premier feuillet ne contienne qu'un nombre fini de points de branchement de  $a_B(s)$ , tous de la forme  $s_{mm} = m\omega + m'\omega'$ . Les variations de  $a_B$  autour des  $s_{mm}$ , sont indiquées sur la figure 5 ; plus précisément, si  $a'(x) = a(ix)$  :

$$(29) \quad a_B(s_{mm} + s) - a_B(s_{mm} + e^{2i\pi}s) = c_{mm} [a(x)^{1-m} a'(x)^{-m'}]_B(s), \quad (c_{mm} \in \mathbb{Z}).$$

On peut réécrire le membre de droite à l'aide de la notation :

$$(30) \quad [f(x)g(x)]_B(s) = f_B(s) \star g_B(s) = \frac{d}{ds} \int_0^s f_B(t)g_B(s-t)dt$$

(au niveau des séries de Taylor :  $\left(\frac{s^p}{p!}\right) \star \left(\frac{s^q}{q!}\right) = \frac{s^{p+q}}{(p+q)!}$ ). Grâce à une formule combinatoire générale donnant les discontinuités d'un produit de convolution comme (30) en termes de celles des facteurs, on étend ensuite la formule (29) à tous les feuillets de la surface de Riemann de  $a_B(s)$ , seul le poids  $c_{mm}$ , dépendant du feuillet d'une manière en principe calculable.

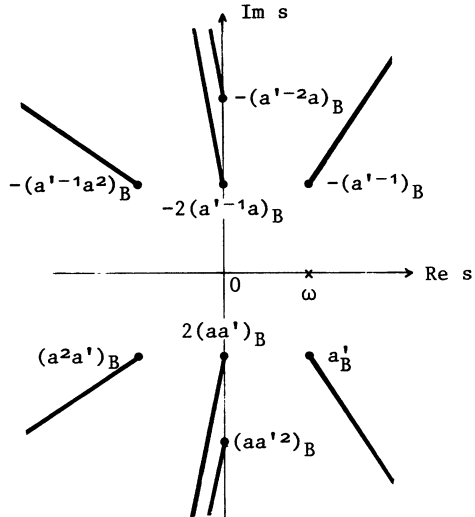


Figure 5.

La formule (29) contient donc sous forme condensée toute la monodromie de  $a_B(s)$  : la base naturelle des déterminations est indexée par le réseau des périodes classiques et se construit par convolution-traduction (noter le changement d'origine par rapport à (29)) :

$$(31) \quad \varphi_{mm'}(s) = [a_B(\cdot)^{\dot{*}(-m)} \dot{*} a_B(-i\cdot)^{\dot{*}(-m')}] (s - s_{mm'}) .$$

La monodromie est engendrée par une famille de formules du type :

$$(32) \quad \varphi_{mm'}(s_{nn'} + s) - \varphi_{mm'}(s_{nn'} + e^{2i\pi}s) = C_{mm'}^{nn'} \varphi_{nn'}(s_{nn'} + s) , \quad C_{mm'}^{nn'} \in \mathbb{Z} .$$

Remarque.— chaque fonction  $\varphi_{mm'}$ , se trouve être analytique aux points  $s = 0$  et  $s = s_{mm'}$ , (et sur toute la droite passant par ces points).

Cette structure analytique remarquable est, pour des raisons qui nous échappent, exactement du type "résurgent" défini et étudié par Ecalle [15] dans des contextes tout autres. Ici cette structure est d'origine purement dynamique et se généralise à  $V(q)$  quelconque (avec la seule complication technique que les points de branchement forment, en projection sur  $\mathbb{C}$ , un réseau partout dense).

h) Nous ne savons malheureusement pas exploiter complètement l'information analytique ainsi obtenue pour ce qui nous intéresse, à savoir le spectre (2). Nous donnons seulement deux approches partielles, mais intéressantes à double titre :

- elles fournissent des résultats exacts et de type global à partir d'une analyse *microlocale* complexe, interprétée à l'aide d'hypothèses raisonnables ;
- elles sont incomplètes à cause de questions mathématiques qu'il serait intéressant de résoudre.

1) La première approche consiste à effectuer la somme de Borel de  $a(x)$  par l'intégrale (19) et à repasser au déterminant par (10). Les contraintes imposées par la rigidité de la structure analytique de  $a_B(s)$  se traduisent par une *équation fonc-*



tionnelle polynômiale pour le déterminant. Pour  $V = q^4$  :

$$(33) \quad D(E)D(jE)D(j^2E) = D(E) + D(jE) + D(j^2E) + 2 \quad (j = e^{2i\pi/3}) .$$

Exemple inhomogène :  $V = q^4 + Kq^2$  ; la structure de  $a_B(s;K)$  se déduit du cas  $K = 0$  par *déformation isomonodromique* (le réseau cesse d'être carré) ; l'équation fonctionnelle garde sa forme mais implique maintenant aussi la variable  $K$  :

$$(34) \quad D(E,K)D(jE,j^2K)D(j^2E,jK) = D(E,K) + D(jE,j^2K) + D(j^2E,jK) + 2 .$$

Les méthodes de Sibuya [17] devraient reproduire ces mêmes équations plus directement, mais c'est bien par resommation d'une série semi-classique divergente que les résultats exacts (33-34) sont apparus.

Le problème ouvert est maintenant de décrire les solutions de (33) par exemple, compatibles avec la forme de produit infini (5). Mais une *vérification* très simple de (33) existe : on la développe en série de Taylor dans le disque  $|E| < E_0$  à l'aide de la formule (6) et par identification on obtient une infinité d'identités arithmétiques [8] dont les deux premières sont :

$$(35) \quad \zeta'(0) = -\log 2$$

$$(36) \quad \zeta(3) = \frac{1}{6} \zeta(1)^3 - \frac{1}{2} \zeta(1)\zeta(2) .$$

La première se démontre par ailleurs [10], et les suivantes se contrôlent numériquement à l'aide des tables de valeurs propres existantes [11] (il existe une famille plus complète de telles identités, impliquant la fonction zêta alternée

$$\zeta^P(s) = \sum_0^\infty (-1)^k E_k^{-s} , \text{ et généralisable explicitement à } V(q) = q^{2M} \text{ [8]} .$$

*Remarque.*— ces résultats sont distincts du calcul des  $\zeta(n)$  pour les entiers *néga-*  
*tifs* par la méthode des identités de trace [19-10].

2) La seconde approche s'applique aux transformées de Borel  $\varphi_{mm}(s)$  elles-mêmes, par exemple  $\varphi_{-1,0}(s) = a_B(\omega + s)$ . D'abord, si  $a_B(s)$  est "raisonnablement tempérée à l'infini", i.e.  $a_B(s) \sim As^\gamma/\Gamma(\gamma+1)$ , il découle des théorèmes abéliens [20] que  $a(x) \sim A/x^\gamma$  (pour  $x \rightarrow 0^+$ ) et, comparant (10) et (35) :

$$(37) \quad a_B(s) \longrightarrow e^{-\zeta'(0)} = +2 \quad (s \rightarrow +\infty) .$$

De même tous les  $\varphi_{mm}$  ont des *limites finies* calculables dans tout secteur (ce par application répétée des formules de monodromie (32)).

Par ailleurs les coefficients  $C_{mm}^{nn'}$  ont des symétries qui font que :

$$(38) \quad f(s) = \varphi_{-1,0}(s) + \varphi_{-1,0}(is) + \varphi_{-1,0}(i^2s) + \varphi_{-1,0}(i^3s)$$

est une fonction sans singularités donc entière, mais bornée par ce qui précède, donc *constante* :

$$(39) \quad f(s) = \varphi_{-1,0}(+\infty) + \varphi_{-1,0}(i\infty) + \varphi_{-1,0}(-\infty) + \varphi_{-1,0}(-i\infty) = 3e^{-\zeta'(0)}$$

grâce à (37) et aux valeurs explicites des  $C_{mm}^{nn'}$  [8]. Alors (38) équivaut à :

## OSCILLATEUR QUARTIQUE

$$(40) \quad \varphi_{-1,0}(0) = 3/2 \quad , \quad \frac{d^n \varphi_{-1,0}}{ds^n}(0) = 0 \quad \text{pour } n = 4, 8, 12, \dots ,$$

résultat découvert numériquement avec une grande précision, et qui paraîtrait inexplicable si (37) devait être faux (ceci confirme que nos transformées de Borel ont un comportement à l'infini encore bien meilleur que tempéré).

De même  $\varphi_{mm}(0)$  est calculable explicitement, après quoi les formules de monodromie (29) livrent en principe la valeur de  $\varphi_{-1,0}(s)$  en tout point de sa surface de Riemann au-dessus de  $s = 0$ . La reconstruction de  $a_B(s)$  (puis du spectre par resommation de Borel) devient alors un problème ouvert, et pas des plus simples, d'*interpolation* analytique.

Conclusion : la méthode semi-classique exacte, élaborée à partir des anciennes techniques d'équations différentielles ordinaires, a déjà pu produire des résultats inattendus, mais il reste encore beaucoup à faire pour expliciter davantage ses possibilités et surtout pour l'étendre aux problèmes à plusieurs dimensions (au moins dans les cas intégrables).

### RÉFÉRENCES

- [1] E.C. TITCHMARSH, *Eigenfunction Expansions*, vol.1, Oxford University Press, 1961.
- [2] M.V. BERRY, K. MOUNT, *Rep. Prog. Phys.* 35(1972), 315 (article de revue).
- [3] N. FRÖMAN, P. FRÖMAN, *JWKB Approximation : Contribution to the Theory*, North-Holland, 1965.
- F.W.J. OLVER, *Asymptotics and Special Functions*, Acad. Press, 1974.
- [4] R.B. DINGLE, *Asymptotic Expansions : Their Derivation and Interpretation*, Acad. Press, 1973.
- [5] R. BALIAN, C. BLOCH, *Ann. Phys.* 85(1974), 514.
- [6] V.P. MASLOV, *Théorie des Perturbations et Méthodes Asymptotiques*, Dunod, 1972.
- J.J. DUISTERMAAT, V. GUILLEMIN, *Invent. Math.* 29(1975), 39.
- J. LERAY, *Analyse Lagrangienne et Mécanique Quantique*, Collège de France, 1976, et IRMA Strasbourg, 1978, n° 10/P-03 (traduction anglaise : MIT Press, 1982).
- J. CHAZARAIN, *Comm. in PDE* 5(1980), 595.
- [7] L. HÖRMANDER, *Arkiv för Mat.* 17(1979), 297.
- B. HELFFER, D. ROBERT, *C.R.A.S.* 292, Série I(1981), 47, et *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (à paraître).
- [8] A. VOROS, *The Return of the Quartic Oscillator*, Prétirage Saclay D.Ph-T/81-48, soumis aux *Ann. Inst. H. Poincaré (série A)*, et *C.R.A.S.* 293, Série I(1981), 709. (Version anglaise : *J. Physique-Lettres* 43(1982), L-1.)
- [9] C.M. BENDER, K. OLAUSSEN, P.S. WANG, *Phys. Rev. D* 16(1977), 1740.
- R. BALIAN, G. PARISI, A. VOROS, *Quartic Oscillator*, dans : S. Albeverio et al. (eds), *Feynman Path Integrals*, Springer, *Lecture Notes in Physics*, vol. 106 (1979), 337.

A. VOROS

- [10] A. VOROS, Nucl. Phys. B165(1980), 209, et dans [16], p. 184.
- [11] C.E. REID, J. Molec. Spectrosc. 36(1970), 183.
- [12] Y. HAMADA, J. LERAY, C. WAGSCHAL, J. Math. Pures et Appl. 55(1976), 297.
- [13] D. FOTIADI, M. FROISSART, J. LASCoux, F. PHAM, Topology 4(1965), 159.
- [14] G. PONZANO, T. REGGE, E.R. SPEER, M.J. WESTWATER, Comm. Math. Phys. 15(1969), 83.
- [15] J. ÉCALLE, Les fonctions résurgentes, Publications Mathématiques de l'Université Paris-Sud vol. 81-05 et 81-06, Orsay, 1981.
- [16] D. CHUDNOVSKY, G. CHUDNOVSKY (eds.), The Riemann Problem..., Springer, Lecture Notes in Maths. vol. 925(1982).
- [17] Y. SIBUYA, Global Theory of a second Order Linear Ordinary Differential Equation with a Polynomial Coefficient, chap. V, North-Holland, 1975.
- [18] J. KNOLL, R. SCHAEFFER, Ann. Phys. 97(1976), 307.
- [19] G. PARISI, dans [16], p. 178.
- [20] D. WIDDER, The Laplace Transform, chap. V, Princeton University Press, 1946.

André VOROS  
Service de Physique Théorique  
CEN Saclay  
F-91191 GIF-SUR-YVETTE