JEAN-MARC DESHOUILLERS

Théorème de Fermat : la contribution de Fouvry

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 648, p. 309-318

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__309_0>

Séminaire BOURBAKI
37ème année, 1984-85, n° 648

Juin 1985

THÉORÈME DE FERMAT : LA CONTRIBUTION DE FOUVRY

par Jean-Marc DESHOUILLERS

Le "théorème" de Fermat -ou problème de Fermat- concerne l'impossibilité de résoudre, en entiers naturels strictement positifs, l'équation $x^n + y^n = z^n$, pour $n \geq 3$. Eu égard à la simplicité de son énoncé et au fait que Fermat lui-même a détruit une "barrière psychologique" en annonçant qu'il en détenait une preuve, cette question a fasciné maints arithmomanes et arithméticiens et a été un stimulus fécond dans le développement des mathématiques (théorie des nombres algébriques et concept d'idéal notamment). A l'inverse, diverses branches des mathématiques ont apporté leur concours à l'étude de ce problème : parmi les succès récents, citons la finitude des solutions primitives de l'équation $x^n + y^n = z^n$, pour n fixé ≥ 3, démontrée par Faltings via la Géométrie algébrique, et *l'infinitude des nombres premiers* ℓ[(†)] *tels que l'on ait*

$$(1.1) \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \; : \; x^\ell + y^\ell + z^\ell = 0 \Longrightarrow xyz \equiv 0 \pmod{\ell} \; .$$

obtenue par Adleman, Heath-Brown et Fouvry par des méthodes qui relèvent ultime- de l'Algèbre, la Géométrie et l'Analyse. La relation (1.1), qui intervient naturellement dans l'étude du problème de Fermat est connue sous le nom de "1er cas du théorème de Fermat" pour l'exposant ℓ.

Adleman et Heath-Brown (1985) démontrent que l'hypothèse

$$(1.2) \qquad \exists x_0, \exists \delta > \frac{2}{3}, \exists c_0 > 0, \forall x \geq x_0 \; : \; \#\{p \leq x / p \equiv 2[3], P(p-1) \geq x^\delta\} \geq \frac{c_0\, x}{\operatorname{Log} x}$$

(où $P(n)$ désigne le plus grand facteur premier de n) entraîne que la relation (1.1) a lieu pour une infinité de nombres premiers ℓ. Ce critère étend celui de Sophie Germain ($2\ell + 1$ premier $\Longrightarrow$ (1.1)) ; on explique dans l'Appendice 1 comment le déduire du théorème de Wendt. *La validité de* (1.2) *est dûe à Fouvry* (1985).

Indépendamment de son application au problème de Fermat, l'inégalité (1.2) a été étudiée pour elle-même, la valeur des δ admissibles donnant une mesure de la connaissance que l'on a de la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

(*) Une date suivant un nom propre renvoie à la bibliographie et correspond à la date de publication.

(†) Les lettres ℓ et p désignent exclusivement des nombres premiers.

Nous commencerons par l'historique des progrès obtenus sur la valeur des δ admissibles, en soulignant chaque fois l'innovation introduite, puis nous esquisserons la façon dont Fouvry a "passé" la valeur 2/3 en nous plaçant dans le cadre général du théorème de Bombieri-Vinogradov ; on notera au passage l'importance quantitative et qualitative des idées introduites par Iwaniec. L'Appendice 2 se veut un petit dépliant touristique invitant à la promenade sur les sentiers rocailleux et ensoleillés des formes modulaires, agrémentés de jolis points de vue sur la Géométrie et l'Analyse.

2. Petit historique, ou le théorème de Brun-Titchmarsh en moyenne

Nous nous attacherons dans ce paragraphe à la détermination d'un réel $\delta > 0$, tel que l'on ait :

(2.1) $$\lim_{x\to 0} {}^{\#}\{p \le x / \text{le plus grand facteur premier de } p-1 \text{ est supérieur à } {}^{\delta}\} = +\infty$$

en remarquant que la résolution de cette question est de difficulté analogue à la démonstration de l'hypothèse (1.2) d'Adleman et Heath-Brown pour le même δ.

Un problème similaire se trouve abordé dans l'oeuvre de Čebyšev : l'étude des entiers n tels que $n^2 + 1$ admette un grand facteur premier. Čebyšev réduit le problème de minoration posé à la recherche de majorations et cette idée est reprise par Motohashi (1970) pour la première détermination d'un δ satisfaisant (2.1).

2.1. *Transformation du problème*. On considère le produit $\prod_{p\le x}(p-1)$ dont on évalue d'une part l'ordre de grandeur, et d'autre part la contribution des facteurs premiers $\le x^{\delta}$.

Par le théorème des nombres premiers,

$$\pi(x) \ := {}^{\#}\{p \le x\} \sim \ell i x\left(\sim \frac{x}{\operatorname{Log} x}\right),$$

on a

$$x \sim \operatorname{Log} \prod_{p\le x} (p-1) = \sum_{p\le x} \sum_{\ell | p-1} \operatorname{Log} \ell + o(x) = \sum_{\ell \le x} \operatorname{Log} \ell \,.\, \pi(x;\ell,1) + o(x)$$

où

$$\pi(x;q,a) \ := {}^{\#}\{p \le x | p \equiv a (\mathrm{mod}\ q)\} .$$

Pour démontrer (2.1), il suffit donc d'établir l'existence d'un réel $\eta > 0$, tel que pour x assez grand, on ait :

$$\sum_{\ell \le x^{\delta}} \operatorname{Log} \ell \,.\, \pi(x;\ell,1) \le (1-\eta)x .$$

2.2. *Le théorème de Brun - Titchmarsh*. Pour étudier la somme $\sum_{p\le x} d(p-1)$, Titchmarsh (1930) utilise le crible de Brun et démontre que l'on a :

(2.2) $\forall\varepsilon>0, \exists C_\varepsilon, \exists x_0(\varepsilon), \forall x \geq x_0(\varepsilon), \forall q < x^{1-\varepsilon}, \forall a \ : \ \pi(x;q,a) \leq C_\varepsilon \dfrac{x}{\varphi(q) \operatorname{Log} x/q}$ (*)

Le crible de Selberg, ou celui de Rosser, conduit à la validité de (2.2) avec $C_\varepsilon := 2+\varepsilon$. On en déduit que (2.1) est valide pour tout $\delta < 1-e^{-0,5} = 0,393\ldots$

2.3. *Le théorème de Bombieri-Vinogradov.* L'hypothèse de Riemann généralisée aux fonctions L de Dirichlet implique que l'on a $\pi(x;q,a) \leq \dfrac{(1+\varepsilon)x}{\varphi(q)\operatorname{Log} x}$ uniformément pour $q \leq x^{1/2-\varepsilon}$, ce qui implique

(2.3) $$\sum_{\ell \leq x^{1/2-\varepsilon}} \operatorname{Log} \ell \, . \, \pi(x;\ell,1) \leq \frac{1}{2} x$$

Or, quel que soit le statut actuel de l'hypothèse de Riemann généralisée, certaines de ses conséquences concernant la répartition des nombres premiers, en moyenne dans les progression arithmétiques, peuvent être démontrées directement : ainsi la relation (2.3) est-elle une conséquence du célèbre théorème de Bombieri-Vinogradov (1965) (*cf.* § 3). En combinant (2.3) et (2.2), on obtient (2.1) pour tout $\delta < 1-\frac{1}{2}e^{-0,25} = 0,61059\ldots$; ce résultat est dû à Motohashi (1970).

2.4. *Le théorème de Brun-Titchmarsh en moyenne.* Le théorème de Bombieri-Vinogradov implique également que la constante $\frac{1}{2}$ de (2.3) est optimale ; le cas des modules $q < x^{1/2-\varepsilon}$ est donc complètement réglé. L'innovation suivante est dûe à Hooley (*cf.* (1973)), qui remarque la possibilité d'améliorer les performances du crible en introduisant dans le crible de Selberg la sommation sur le module q ; il démontre ainsi que la majoration

$$\pi(x;q,a) \leq \frac{(4+\varepsilon)x}{\varphi(q)\operatorname{Log} x}$$

a lieu pour presque tout q de l'intervalle $[x^{1/2}, x^{3/4}]$, dans un sens que nous ne précisons pas ici, mais qui implique que (2.1) est valide pour tout $\delta < 5/8 = 0,625$. Ce traitement non trivial du terme reste du crible est mis en oeuvre par Motohashi (1974) pour majorer les expressions individuelles $\pi(x;q,a)$ lorsque q est assez grand par rapport à x ; cette voie culmine dans

2.5. *Le crible de Rosser-Iwaniec* (1980), déjà présenté ici dans l'exposé 520, auquel le lecteur est prié de se reporter ; soulignons que toute la souplesse de ce crible provient de la présentation du terme d'erreur comme une forme bilinéaire dont les coefficients ont une interprétation arithmétique (*cf.* le th. 2, p. 09) ; nous avions donné, dans le paragraphe 4, un exemple d'application montrant comment une méthode de dispersion permet de ramener la majoration du terme d'erreur à celle

---

(*) Remarque sur une idiosyncrasie de certains arithméticiens : la proposition (2.2) est souvent énoncée ainsi :
"il existe C_ε tel que l'on ait $\pi(x;q,a) \leq C_\varepsilon \dfrac{x}{\varphi(q)\operatorname{Log} x/q}$, uniformément en $q < x^{1-\varepsilon}$ et a ", voire
"$\pi(x;q.a) = O_\varepsilon\left(\dfrac{x}{\varphi(q)\operatorname{Log} x/q}\right)$ uniformément en $q < x^{1-\varepsilon}$ et a ".

de sommes trigonométriques, en l'occurence les sommes de Kloosterman

(2.4) $$S(m,n;c) = \sum_{\substack{x,y \bmod c \\ xy \equiv 1 (\bmod c)}} \exp\left(2\pi i \frac{mx+ny}{c}\right) .$$

Utilisant son crible et la majoration de Weil des sommes de Kloosterman, Iwaniec (1982) démontre la validité de (2.1) pour tout $\delta < 0,63810 \ldots$

2.6. *Les sommes de Kloosterman en moyenne.* Les sommes de Kloosterman intervenant elles-même en moyenne (sur le module c et les coefficients m et n), on peut espérer des compensations entre elles ; par le biais des formes modulaires, Kuznecev (1980) et Bruggeman (1978) obtiennent de telles compensations concernant la moyenne sur le module et Deshouillers et Iwaniec (1982) étendent ces résultats (*cf.* Appendice 2), et démontrent (1984) que (2.1) a lieu pour tout $\delta < 1 - \frac{1}{2}e^{-3/8} = 0,65635 \ldots$

Nous abordons maintenant la contribution de Fouvry, qui établit successivement la borne $0,65785$ pour les δ satisfaisant (2.1), et finalement (1985), motivé par le problème de Fermat, la borne $0,6687 > \frac{2}{3}$.

3. Exposant de répartition et phénomène de parité

3.1. DÉFINITION.- *Soit* $\underline{a} = \{a_1,\ldots,a_n,\ldots\}$ *une suite de nombres réels telle que* $\forall\varepsilon > 0$, $|a_n| = O_\varepsilon(n^\varepsilon)$. *On dit que* α *est un exposant de répartition pour la suite* $\underline{a}$ *si et seulement si* ; $\forall\varepsilon > 0$, $\forall A > 0$, $\forall a \in \mathbb{N}$:

(3.1) $$\sum_{\substack{q \le x^{\alpha-\varepsilon} \\ (q,a)=1}} \left| \sum_{\substack{n\le x \\ n\equiv a[q]}} a_n - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n\le x \\ (n,q)=1}} a_n \right| = O_{\varepsilon,A}\left(\frac{x}{(\operatorname{Log} x)^A}\right)$$

Le théorème de Bombieri-Vinogradov

$$\forall A > 0 \ , \ \exists B \ , \ \exists C \ , \ \forall x \ge 2$$

$$\sum_{q \le x^{1/2}(\operatorname{Log} x)^{-B}} \ \operatorname*{Sup}_{y \le x} \ \operatorname*{Max}_{(a,q)=1} \left|\pi(y;q,a) - \frac{1}{\varphi(q)} \ell i x\right| \le \frac{Cx}{(\operatorname{Log} x)^A}$$

entraîne que la fonction indicatrice des nombres premiers admet $1/2$ pour exposant de répartition. Signalons que l'hypothèse de Riemann *n'implique rien de plus* et que l'hypothèse de Montgomery

$$\pi(x;q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \ell i x + O\left(q^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

entraîne que l'exposant 1 est admissible (hypothèse d'Elliott et Halberstam). La valeur $1/2$ est critique et dépend directement de la façon dont le grand crible intervient dans la preuve ; elle est en revanche très générale : Motohashi (1976) établit que si deux suite $\underline{a}$ et $\underline{b}$ admettent $1/2$ pour exposant de répartition, alors leur convolée également (où $\underline{a} * \underline{b} = \{\ldots, \sum_{m\ell=n} a_m b_\ell, \ldots\}$) .

3.2. Fouvry et Iwaniec (1980) obtiennent le premier résultat significatif avec un exposant de répartition supérieur à $1/2$: il s'agit d'une suite d'entiers n'ayant pas de petits facteurs premiers $(p|n \Longrightarrow p > n^{1/883})$, analogue dans sa structure à la suite des nombres premiers. Dans sa thèse, Fouvry développe considérablement cette méthode : il y démontre que si les suites d_k $(d_k(n) = \sum_{n_1 \dots n_k = n} 1)$ ont un exposant de répartition supérieur à $1/2$ pour $3 \le k \le 12$, alors il en va de même, non seulement pour toutes les suites d_k , mais aussi pour la suite des nombres premiers ; cette voie est prometteuse car le problème sur les suites d_k peut se réduire à la majoration des sommes trigonométriques en moyenne sur le module.

3.3. L'idée de départ consiste à considérer une suite $\underline{a}$ convolée de deux suites $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ pour ramener l'évaluation du membre de gauche de (3.1) à l'étude d'expressions de la forme

$$(3.2) \qquad E = \sum_{\substack{q \\ (q,a)=1}} \Big| \sum_{m} \sum_{\substack{\ell \\ m\ell \equiv a[q]}} \alpha_m \beta_\ell - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{m} \sum_{\substack{\ell \\ (m\ell,q)=1}} \alpha_m \beta_\ell \Big|$$

où la notation $\sum_k$ remplace $\sum_{K<k\le 2K}$

De telles écritures "bilinéaires" se rencontrent dans la version d'Iwaniec du crible de Rosser, dans l'identité de Vaughan (1977) et dans les identités combinatoires du type Linnik développées par Heath-Brown (1982).

Un des traitements possibles consiste à appliquer Cauchy-Schwarz à (3.2) :

$$E^2 \le QM \sup_m |\alpha_m| \sum_{\substack{q \\ (q,a)=1}} \sum_{\substack{m \\ (m,q)=1}} \Big(\sum_{\substack{\ell \\ \ell m \equiv a[q]}} \beta_\ell - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\ell \\ (\ell,q)=1}} \beta_\ell \Big)^2$$

et on évalue directement chacun des trois termes résultant du développement du carré ; les trois termes principaux se compensent (méthode de dispersion). Considérons le terme le plus délicat

$$W = \sum_{\substack{q \\ (q,a)=1}} \sum_{\substack{\ell_1 \\ (\ell_1,q)=1}} \beta_{\ell_1} \sum_{\substack{\ell_2 \\ \ell_1 \equiv \ell_2 [q]}} \beta_{\ell_2} \sum_{\substack{m \\ m \equiv a\bar{\ell}_1 [q]}} 1$$

(où $\ell\bar{\ell} \equiv 1 \pmod q$). Puisque l'on cherche q le plus grand possible, on ne majore pas directement en module le terme d'erreur

$$\sum_{\substack{m \\ m \equiv a\bar{\ell}[q]}} 1 - \frac{M}{q}$$

mais on le développe en série de Fourier. La somme sur ℓ_1 s'interprète alors comme une somme de Kloosterman qui, majorée par la borne de Weil, conduit aux résultats historiques cités ; on peut maintenant faire appel à la "kloostermanie" et tenir compte de la sommation sur le module q .

3.4. Le "phénomène de parité" va nous aider à présenter le dernier ingrédient de la démonstration de Fouvry. Selberg a remarqué que l'ensemble des entiers admettant un nombre pair de facteurs premiers a un exposant de répartition égal à 1 . Cela implique, d'une part, que le crible est incapable de produire des nombres premiers, même s'il est alimenté par une suite d'exposants de répartition 1 , et, d'autre part, que l'inégalité

$$\pi(x;q,a) < \frac{Cx}{\varphi(q)\,\mathrm{Log}\,x}$$

n'est accessible -par le crible- pour aucun $C < 2$. Or, Fouvry établit que l'on peut prendre $C = 1{,}73$ pour q proche de $x^{1/2}$ ... D'où vient le gain ? De l'utilisation de termes qui sont traités trivialement dans le crible général, mais qui peuvent être évalués, dans certains cas, par des méthodes ne relevant pas du crible, mais de la théorie analytique classique -e.g. séries de Dirichlet, combinatoire. Cette idée a été introduite par Iwaniec et Jutila (1979) dans leur travail sur les différences entre nombres premiers consécutifs.

3.5. Signalons, pour conclure, que Bombieri, Fouvry, Friedlander et Iwaniec développent actuellement ses méthodes pour obtenir des succédanés utilisables de l'hypothèse d'Elliott et Halberstam, où la valeur absolue est remplacée par une fonction "bien factorisable" et l'exposant 1/2 par un réel strictement supérieur à 1/2 , et ils les appliquent, par exemple, à l'étude des nombres premiers jumeaux.

<u>Appendice 1</u> : *Le critère d'Adleman et Heath-Brown*

Le résultat suivant est indiqué dans le livre de Ribenboim (1979).

THÉORÈME (Wendt).- *Soient* k *un entier pair non divisible par* 3 *et* W_k *le produit* $\Pi((1+\zeta)^k - 1)$ *étendu aux racines* k*-ièmes de l'unité ; si les nombres* ℓ *et* $k\ell+1$ *sont des nombres premiers tels que* $k\ell+1$ *ne divise pas* $(k^k-1)W_k$, *alors* (1.1) *a lieu.*

Nous allons montrer comment en déduire un critère pour le premier cas du "théorème" de Fermat.

THÉORÈME (Adleman - Heath-Brown).- *La validité de* (1.2) *implique l'existence d'une infinité de nombres premiers* ℓ *tels que* (1.1) *ait lieu.*

Démonstration.- De $\delta > \frac{2}{3}$, on déduit que pour x assez grand, on a

$$\text{(A1.1)} \qquad \sum_{k \le x^{1-\delta}} 3k^2 \le \frac{C_0}{2}\cdot\frac{x}{\mathrm{Log}\,x} \;.$$

Considérons un tel x ; pour tout k pair non divisible par 3 , on pose :

$$E_k : = \{p \le x : \frac{p-1}{k} \text{ est un premier } \ell_p \text{ supérieur ou égal à } x^{\delta}\}$$

et

$$E'_k : = \{p \in E_k : p \nmid (k^k - 1)W_k\}$$

On note que les E_k sont 2 à 2 disjoints et vides si $k > x^{1-\delta}$; on a donc, d'après (1.2)

(A1.2)
$$\sum_{\substack{k<x^{1-\delta} \\ 2|k,3\nmid k}} {}^{\#}E_k \geq c_0 \frac{x}{\operatorname{Log} x} .$$

L'entier $(k^k-1)W_k$ est strictement positif et inférieur à $k^k.k.2^k$; il a donc au plus $k+(k+1)\operatorname{Log}_2 k$ $(\leq 3k^2)$ facteurs premiers, d'où

(A1.3)
$${}^{\#}E'_k \geq {}^{\#}E_k - 3k^2 .$$

Des inégalités (A1.1), (A1.2) et (A1.3) et de la disjonction des E'_k, on déduit
$${}^{\#}\{p\leq x | p=\ell k+1, k\ x^{1-\delta}, 2|k, 3\nmid k,\ \ell \text{ premier}, p\nmid (k^k-1)W_k\} \geq \frac{C}{2}\frac{x}{\operatorname{Log} x}$$
et il résulte alors du critère de Wendt que l'on a
$${}^{\#}\{\ell\leq x : \ell \text{ vérifie (1.1)}\} \geq \frac{C_0}{2}\frac{x^{\delta}}{\operatorname{Log} x}$$

Appendice 2 : *Sommes de Kloosterman et formes modulaires*

A2.1. Les sommes $S(m,n;c)$ (*cf.* (2.4)) ont été introduites par Kloosterman qui en a obtenu des majorations non triviales ; il a pu ainsi majorer les coefficients de Fourier des formes modulaires paraboliques (on peut penser aux coefficients $\tau(n)$ de Ramanujan définis par $\sum_{n>1}\tau(n)q^n = q\prod_{m\geq 1}(1-q^m)^{24}$, forme parabolique de poids 12). En 1932, Petersson donne une représentation très explicite des coefficients de Fourier des formes paraboliques de poids k en terme des sommes
$$\sum_{c>0}\frac{1}{c}S(n,1;c)\, J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}\right) .$$

C'est en partant de telles relations que l'on déduit des majorations de Weil pour les sommes de Kloosterman, la relation $\tau(n) = O_\varepsilon\left(n^{\frac{11}{2}+\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)$. La conjecture de Ramanujan, maintenant théorème de Deligne, affirme que l'on a $\tau(n) = O_\varepsilon\left(n^{\frac{11}{2}+\varepsilon}\right)$ et conduit à espérer des compensations dans les sommes de sommes de Kloosterman ; Linnik et Selberg ont conjecturé que la compensation maximale
$$\sum_{c<C}\frac{1}{c}S(m,n;c) = O_{\varepsilon,m,n}(C^{\varepsilon}) \quad \text{pour} \quad (m,n)\neq(0,0)$$
a lieu.

A2.2. Bruggeman et Kuznecov, indépendamment, relient les coefficients de Fourier $\rho_j(n)$ des formes modulaires paraboliques de Maass (fonctions réelles analytiques définies sur $PSL_2(\mathbb{Z})\backslash H$, propres pour le laplacien Δ ; l'indice j se rapporte à la valeur propre λ_j associée) et des sommes de sommes de Kloosterman pondérées par des fonctions de Bessel d'ordre imaginaire pur ; inversant cette relation, Kuznecov en déduit des formules sommatoires du type

$$\text{(A2.1)} \qquad \sum_{c} \frac{1}{c} g(c)\, S(m,n;c) = \sum_{\lambda_j \text{ v.p. de } \Delta} \overline{p_j(m)}\, p_j(n)\, \hat{g}(\lambda_j)$$

où $\hat{g}$ est une transformée de g impliquant des fonctions de Bessel (d'ordre imaginaire pur). Il a notamment établi la relation

$$\sum_{c<C} \frac{1}{c} S(m,n;c) = O_{\varepsilon,m,n}\left(C^{\frac{1}{6}+\varepsilon}\right) \quad \text{pour} \quad (m,n) \neq (0,0)$$

A2.3. La connaissance que l'on a des $p_j(n)$ est comparable à celle que l'on avait des $\tau(n)$ avant le théorème de Deligne, i. e. d'assez mauvaises majorations individuelles, mais une bonne évaluation en moyenne quadratique à la Rankin. C'est ainsi qu'Iwaniec (1979) donne des majorations applicables (i. e. explicites) pour des sommes du type

$$\sum_{m} a_m \sum_{n} b_n \sum_{c} \frac{1}{c} g(c)\, S(m,n;c) \ .$$

A2.4. Motivés par diverses questions arithmétiques, notamment le théorème de Brun-Titchmarsh, Deshouillers et Iwaniec (1982) étendent ces estimations au cas où la sommation sur c n'est effectuée que sur certaines progressions arithmétiques (disons modulo q). Il faut alors considérer le groupe de congruence $\Gamma_0(q)$ et la difficulté principale provient du fait que l'on ignore si les valeurs propres positives du laplacien sont au moins égales à $\frac{1}{4}$ (conjecture de Selberg) : les éventuelles valeurs propres λ inférieures à $\frac{1}{4}$ conduiraient à une contribution prépondérante des termes $\hat{g}(\lambda)$; l'article cité explique comment on peut partiellement contourner cet obstacle en prenant en compte la moyenne sur le module, moyenne qui intervient de façon naturelle dans les applications arithmétiques.

A2.5. Pour comprendre la nature des formes de Maass, sur lesquelles on connaît bien peu de choses, hormis leur existence, Phillips et Sarnak ont étudié récemment la stabilité de ces fonctions propres sous des déformations de la surface $PSL_2(\mathbb{Z})\backslash H$; l'alternative espérée est la suivante :

- ou bien ces fonctions propres sont généralement stables ; alors elles sont de nature "analytique" et on doit pouvoir les construire.
- ou bien ces fonctions propres sont généralement instables ; alors elles sont de nature "arithmétiques".

Soit u_j la fonction de Maass associée à λ_j . Phillips et Sarnak construisent une fonction $L(u_j,s)$ et relient sa nullité au point $\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda_j-\frac{1}{4}}$ à la stabilité de la fonction propre. Utilisant (A2.1), Deshouillers et Iwaniec donnent un équivalent pour la moyenne quadratique des valeurs de ces fonctions L aux points spéciaux. Cela confirme la nature arithmétique des formes de Maas, déjà suggérée par la formule sommatoire (A2.1).

BIBLIOGRAPHIE

L.M. ADLEMAN and D.R. HEATH-BROWN - *The first case of Fermat's last theorem*, Invent. Math. 79(1985), 409-416.

E. BOMBIERI - *On the large sieve*, Mathematika 12(1965), 201-225.

R.W. BRUGGEMAN - *Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. 70(1982), 1-18.

J.-M. DESHOUILLERS and H. IWANIEC - *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. 70(1982), 219-288.

J.-M. DESHOUILLERS and H. IWANIEC - *On the Brun - Titchmarsh theorem on average*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 34(1984), 319-333.

J.-M. DESHOUILLERS, H. IWANIEC, R. PHILLIPS and P. SARNAK - *On Maass cusp forms* (to appear).

É. FOUVRY - Thèse de Doctorat d'Etat, Bordeaux (1981).

É. FOUVRY - *Théorème de Brun - Titchmarsh ; application au théorème de Fermat*, Invent. Math. 79(1985), 383-407.

É. FOUVRY and H. IWANIEC - *On a theorem of Bombieri - Vinogradov type*, Mathematika 27(1980), 135-152.

D.R. HEATH-BROWN - *Sieve identities and gaps between primes*, Astérisque 94 (1982), 61-65.

C. HOOLEY - *On the largest prime factor of* $p+a$, Mathematika 20(1973), 135-143.

H. IWANIEC - *Fourier coefficients of cusp forms and the Riemann zeta-function*, Sém. th. Nb. Bordeaux (1979-1980), exposé n° 18, 36 pages.

H. IWANIEC - *A new form of the error term in the linear sieve* - Acta Arith. 37(1980), 307-321.

H. IWANIEC - *On the Brun - Titchmarsh theorem*, J. Math. Soc. Japan 34(1982), 95-123.

H. IWANIEC and M. JUTILA - *Primes in short intervals*, Ark. Mat. 17(1979), 167-176.

N.V. KUZNECOV - *Petersson hypothesis for parabolic forms of weight zero and Linnik hypothesis. Sums of Kloosterman sums*, Math. Sb. 111(1980), 334-383.

Y. MOTOHASHI - *A note on the least prime in an arithmetic progression with a prime difference*, Acta Arith. 17(1970), 283-285.

Y. MOTOHASHI - *On some improvements of the Brun - Titchmarsh theorem*, I *and* II, J. Math. Soc. Japan 26(1974), 306-323 and 27(1975), 444-453.

Y. MOTOHASHI - *An induction principle for the generalization of Bombieri's prime number theorem*, Proc. Japan Acad. Sci. 52(1976), 273-275.

P. RIBENBOIM - *Thirteen lectures on Fermat's last theorem*, Springer Verlag, Berlin (1979).

E.C. TITCHMARSH - *A divisor problem*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 54(1930), 414-429.

R.C. VAUGHAN - *Sommes trigonométriques sur les nombres premiers*, C.R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 285(1977), 981-983.

A.I. VINOGRADOV - *The density hypothesis for Kirichlet's L-series*, Izv. Akad. Nauk, SSSR, Ser. Mat. 29(1965), 903-934 ; corrigendum : ibid. 30 (1966), 719-720.

Jean-Marc DESHOUILLERS

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et
d'Informatique
351 cours de la Libération
33405 TALENCE Cedex